Внешняя геометрия выпуклых поверхностей

А.В.Погорелов

А. В. Погорелов

Внешняя геометрия выпуклых поверхностей

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1969

517.4
П 43
УДК 513.73

Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. Погорелов А. В. Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1969.

Теория выпуклых поверхностей — это раздел геометрии, где основные результаты за последние 25—30 лет получены советскими геометрами. Предлагаемая монография содержит изложение этих результатов. Она является как бы продолжением известной книги академика А. Д. Александрова «Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей» (1948 г.).

Чтение книги не предполагает специальной геометрической подготовки. Однако ввиду разнообразия применяемых методов исследования требуется известная подготовка в смежных разделах математики. В Дополнении к книге сформулирован ряд нерешенных вопросов, которые могут быть предметом исследования молодых геометров. В ряде случаев указаны реальные подходы к решению.

Библиографических ссылок — 72. Рисунков — 35.

2-2-3
76-68

Оглавление

Глава VII

Выпуклые поверхности с данным сферическим изображением

Глава VIII

Геометрическая теория уравнений Монжа — Ампера эллиптического типа

Глава IX

Поверхности ограниченной внешней кривизны

Введение

Вопросами теории выпуклых поверхностей, преимущественно вопросами геометрии «в целом», издавна занимались многие известные математики (Коши, Миндинг, Христоффель, Минковский, Либман, Вейнгартен, Гильберт, Вейль, Бернштейн, Бляшке, Кон-Фоссен, Г. Леви и др.). Поставленные ими проблемы, разработанные методы исследования и полученные результаты не потеряли своего значения и в настоящее время.

Один из первых результатов теории выпуклых поверхностей был получен Коши, который доказал равенство замкнутых выпуклых многогранников, одинаково составленных из конгруэнтных граней. Эта теорема и знаменитая лемма, лежащая в основании доказательства, послужили предпосылкой для получения многих фундаментальных результатов современной теории. В частности, этот результат используется в доказательстве существования выпуклого многогранника, реализующего заданную многогранную метрику, и в других теоремах существования и единственности для многогранников.

Миндинг высказал гипотезу о неизгибаемости сферы. Доказательство этой гипотезы (Либман, Минковский, Гильберт, Вейль) привело к постановке общей проблемы о неизгибаемости и однозначной определенности произвольной выпуклой поверхности. Проблема для случая регулярных поверхностей была решена Кон-Фоссеном. Разработанные при этом методы, основанные на исследовании индекса специальных векторных полей на поверхности, исследовании экстремума инвариантно построенных вспомогательных функций и интегральные формулы нашли широкое применение в работах геометров следующих поколений.

Минковский поставил и решил проблему существования замкнутой выпуклой поверхности с данной гауссовой кривизной. Это решение в его аналитическом истолковании дает обобщенное решение некоторого дифференциального уравнения и естественно ставит вопрос о регулярности обобщенного решения.

Г. Вейль поставил и наметил решение проблемы существования замкнутой выпуклой поверхности с данной метрикой. Эта проблема послужила предметом исследования многих

геометров и получила исчерпывающее решение в самой общей постановке для общих метрик и общих пространств.

К началу тридцатых годов нашего века возможности аналитического аппарата для исследования выпуклых поверхностей «в целом» были в значительной степени исчерпаны. В качестве примера можно привести упомянутую проблему Вейля. Решение этой проблемы, намеченное Вейлем, было завершено только 20 лет спустя Г. Леви с использованием тонких результатов теории аналитических уравнений типа Монжа — Ампера. Стало ясно, что для дальнейшего развития теории необходимо привлечение новых средств исследования: теории функций вещественного переменного, функционального анализа, теоретико-множественной топологии, теории дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. Применение этих средств потребовало обобщенного объекта исследования. Так, вместо выпуклой поверхности как поверхности с положительной гауссовой кривизной объектом исследования стала выпуклая поверхность как граница выпуклого тела (или ее часть). Выпуклые поверхности в таком общем определении и стали предметом исследования советских геометров начиная с 30-х годов.

В 1948 г. вышла в свет монография А. Д. Александрова «Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей». Эта книга представляет собой систематическое изложение построенной ее автором теории общих выпуклых поверхностей. Как следует из названия книги, она содержит результаты, относящиеся в основном к внутренней геометрии поверхности. Венцом теории А. Д. Александрова является общая теорема, формулирующая необходимые и достаточные условия того, чтобы заданная метрика была метрикой выпуклой поверхности. Этой теоремой в основном завершается построение внутренней геометрии выпуклых поверхностей. Вместе с тем она ставит новые проблемы, относящиеся уже к «внешней» геометрии, к изучению формы поверхности, реализующей заданную метрику.

В этой связи приобретает особое значение проблема единственности выпуклой поверхности с данной метрикой (проблема однозначной определенности). Решение этой проблемы, данное Кон-Фоссеном, было недостаточно не только потому, что в теореме Кон-Фоссена рассматривается регулярная (трижды дифференцируемая) поверхность, но главным образом потому, что класс поверхностей, в котором решается проблема, ограничен тем же условием регулярности. Применение теорем однозначной определенности в соединении с теоремами реализации А. Д. Александрова эффективно лишь тогда, когда единственность гарантируется в классе общих выпуклых поверхностей, без предположения о регулярности априори, даже если метрика поверхности достаточно регулярна.

Так же, как и в других разделах современной математики, исследование нерегулярного объекта, в данном случае общей выпуклой поверхности, является не целью, а главным образом средством глубже понять и изучить регулярный объект. Теория общих выпуклых поверхностей хорошо иллюстрирует это положение. Проблема изгибаний регулярных поверхностей была предметом многочисленных исследований геометров 19 и 20 веков. Однако до работ А. Д. Александрова все известные результаты в этой области выглядели довольно скромно. Только постановка этой проблемы для общих выпуклых поверхностей привела к ее принципиальному решению и свела ее к задаче весьма простого содержания. Правда, как это бывает и в других разделах математики, решение проблемы в общей постановке приводит, вообще говоря, к обобщенному решению. В этой связи, естественно, возникает вопрос степени регулярности обобщенного решения задачи с регулярными данными. В нашем случае речь идет о регулярности выпуклой поверхности с регулярной метрикой. Решение этой проблемы открывает широкие возможности применения методов и результатов теории общих выпуклых поверхностей к решению задач в классической постановке.

С проблемой изгибания поверхностей тесно связана другая проблема, которая привлекала внимание многих геометров, — это проблема бесконечно малых изгибаний, в частности проблема жесткости выпуклых поверхностей. Необходимость решения этой проблемы диктуется потребностями теории упругих оболочек. Дело в том, что условия прочности конструкции, содержащей в качестве элементов упругие оболочки, требуют, как правило, геометрической жесткости последних. Реальная оболочка, проектируемая в форме регулярной поверхности, на самом деле никогда не является таковой. Что же касается условия выпуклости, то оно достигается легко. Поэтому проблему жесткости, — если стремиться использовать ее в приложениях, — следует решать в классе нерегулярных общих выпуклых поверхностей. Таким образом, можно считать обоснованной постановку и этой проблемы общих выпуклых поверхностей.

Теория общих выпуклых поверхностей А. Д. Александрова распространяется без труда на выпуклые поверхности в пространствах постоянной кривизны — эллиптическое пространство и пространство Лобачевского. Поэтому и для этих пространств возникают указанные проблемы однозначной определенности, регулярности и существования бесконечно малых изгибаний. Их решение в этих более общих пространствах позволяет глубже понять результаты и раскрыть возможности применяемых методов исследования.

Глубокое понимание результатов теории выпуклых поверхностей в евклидовом пространстве и пространствах постоянной кривизны, а также совершенствование методов исследования позволяют распространить постановку основных проблем на выпуклые поверхности в общем римановом пространстве и применить к их решению методы, отточенные на объектах указанных простейших пространств. Здесь, как и в случае евклидова пространства, естественно ставятся проблемы изометрического погружения, проблема однозначной определенности, проблема изгибаний и жесткости.

Все рассмотренные до сих пор проблемы теории выпуклых поверхностей были связаны с метрикой поверхности. Если говорить о регулярных поверхностях, то эти проблемы связаны с первой квадратичной формой поверхности — ее линейным элементом (ds^2). Существует и другая проблематика, которая для случая регулярных поверхностей связана с третьей квадратичной формой — линейным элементом сферического изображения. Здесь речь идет о поверхностях, поставленных в такое точечное соответствие, при котором внешние нормали поверхностей в соответствующих точках параллельны и одинаково направлены. Исторически первыми проблемами такого сорта являются проблема Христоффеля о существовании и единственности замкнутой выпуклой поверхности с данной суммой главных радиусов кривизны и упомянутая проблема Минковского о существовании и единственности замкнутой выпуклой поверхности с заданным произведением главных радиусов кривизны. Естественное обобщение этих проблем состоит в решении вопроса о существовании и единственности замкнутой выпуклой поверхности с заданной произвольной функцией главных радиусов кривизны.

В теории выпуклых поверхностей широко применяются методы исследования и результаты смежных областей математики. Обратно, многие геометрические методы исследования оказываются в свою очередь применимыми в этих смежных областях, а геометрические результаты допускают аналитическое толкование. В частности, многие вопросы теории выпуклых поверхностей в их аналитическом истолковании приводят к вопросам существования и единственности решения дифференциальных уравнений в частных производных. Часто это бывают уравнения Монжа — Ампера эллиптического типа. Общие теоремы существования и единственности выпуклых поверхностей позволяют построить геометрическую теорию уравнений Монжа — Ампера эллиптического типа с теоремами существования и единственности весьма общего содержания.

Естественным обобщением метрики выпуклой поверхности является метрика ограниченной кривизны. Метрика ограничен-

ной кривизны находится в таком же отношении к метрике выпуклой поверхности, как метрика произвольной регулярной поверхности к метрике регулярной поверхности с положительной гауссовой кривизной. Вопрос о реализации метрики ограниченной кривизны на поверхностях евклидова пространства с сохранением достаточно сильных связей между внутренней метрикой и внешней формой поверхности пока не решен. В этой связи, конечно, разумно поставить вопрос об изучении достаточно общих классов поверхностей, имеющих метрику ограниченной кривизны.

Мы аргументировали постановку ряда проблем, естественно возникающих на пути построения теории выпуклых поверхностей. Решению этих проблем, в большинстве случаев достаточно полному, и посвящена предлагаемая книга. Ее название — «Внешняя геометрия выпуклых поверхностей», — отражая содержание, в то же время подчеркивает ее связь с монографией А. Д. Александрова «Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей», и в некотором смысле она является продолжением книги А. Д. Александрова.

Чтение книги не предполагает специальной геометрической подготовки. Однако ввиду разнообразия применяемых методов исследования требуется известная подготовка в смежных разделах математики. Книга рассчитана прежде всего на геометров — студентов старших курсов, аспирантов и научных работников. Некоторые главы книги могут быть интересными и для математиков других специальностей.

В Дополнении к книге сформулирован ряд нерешенных вопросов, которые могут быть предметом исследования молодых геометров. Задачи эти разной трудности, но почти во всех случаях к их решению указаны реальные подходы.

Глава I

Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей

Внутренняя геометрия поверхности изучает фигуры на поверхности и связанные с ними геометрические величины, инвариантные при изометрических преобразованиях, т. е. при деформациях, сохраняющих длины кривых на поверхности. Если поверхность регулярна, то это будут преобразования, сохраняющие первую квадратичную форму, т. е. линейный элемент поверхности. В случае регулярных поверхностей угол между кривыми, площадь поверхности, гауссова кривизна поверхности, геодезическая кривизна кривой и геодезические линии — все это объекты внутренней геометрии.

При переходе к общим, нерегулярным поверхностям многие из указанных понятий, по крайней мере в их классическом определении, теряют смысл. В связи с этим в теории нерегулярных поверхностей прежде всего возникает проблема определения основных понятий внутренней геометрии, естественно обобщающих понятия классической теории регулярных поверхностей.

Основным средством исследования регулярных поверхностей является применение анализа бесконечно малых. Эффективность этого средства в применении к регулярным поверхностям связана с тем, что эти поверхности допускают достаточно регулярное аналитическое задание. Возможности применения анализа при изучении нерегулярных поверхностей весьма ограничены, так как функции, входящие в уравнения таких поверхностей, нерегулярны. В связи с этим возникает вторая проблема, которая состоит в разработке метода исследования нерегулярных поверхностей.

Многие теоремы внутренней геометрии регулярных поверхностей при переходе к нерегулярным поверхностям теряют смысл, так же как и понятия, к которым они относятся. В связи с этим при построении внутренней геометрии нерегулярных поверхностей возникает третья проблема. Она состоит в формулировке и доказательстве содержательных теорем, естественно обобщающих соответствующие теоремы классической теории поверхностей.

Все эти проблемы в применении к общим выпуклым поверхностям и даже к нерегулярным поверхностям более общего

вида (многообразия ограниченной кривизны) были решены А. Д. Александровым.

Прежде всего А. Д. Александров определил основные понятия: выпуклой поверхности, кратчайшей, угла между кривыми, кривизны поверхностей, площади поверхности и поворота кривой. Далее А. Д. Александров разработал метод исследования. Сущность этого метода состоит в приближении общей выпуклой поверхности выпуклым многогранником, а абстрактно заданной выпуклой метрики — многогранной метрикой. Применяя этот метод, А. Д. Александров распространил на случай общих выпуклых поверхностей основные интегральные теоремы классической теории поверхностей. В частности, им установлено общее свойство взаимного расположения кратчайших (неналегание кратчайших). Доказано существование угла между кратчайшими. Изучена внутренняя кривизна поверхности и распространена на общие выпуклые поверхности известная теорема Гаусса о равенстве интегральной кривизны и площади сферического изображения. Изучен поворот кривой и распространена на общие выпуклые поверхности теорема Гаусса — Боннэ. Найдены необходимые и достаточные условия существования выпуклой поверхности, реализующей абстрактно заданную метрику.

Исследования А. Д. Александрова по внутренней геометрии выпуклых поверхностей подытожены им в монографии [2] «Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей». Настоящая глава представляет собой конспективное изложение содержания этой книги. Изложение последующих глав существенно использует понятия и результаты внутренней геометрии выпуклых поверхностей.

§ 1. Выпуклые тела и выпуклые поверхности

Множество M в трехмерном евклидовом пространстве называется *выпуклым*, если оно вместе с любыми двумя его точками X и Y содержит соединяющий их прямолинейный отрезок (рис. 1). Замкнутое плоское выпуклое множество с внутренними точками называется *выпуклой областью*.

Связная часть границы выпуклой области называется *выпуклой кривой*. Граница конечной выпуклой области называется *замкнутой выпуклой кривой*. Замкнутая выпуклая кривая гомеоморфна окружности.

Прямая g, проходящая через точку X границы выпуклой области G, называется *опорной*, если вся область располагается в одной из полуплоскостей, определяемых этой прямой (рис. 2). Через каждую граничную точку выпуклой области проходит по крайней мере одна опорная прямая.

Если выпуклая кривая γ является границей выпуклой области G или частью ее границы, то опорная прямая в каждой точке кривой γ к области G называется также опорной прямой кривой γ.

Точки выпуклой кривой подразделяются на гладкие и угловые. Именно, точка X выпуклой кривой γ называется *гладкой*,

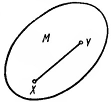

Рис. 1.

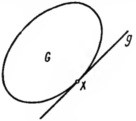

Рис. 2.

если через эту точку проходит единственная опорная прямая. В противном случае точка X называется *угловой* точкой. В угловой точке опорные прямые заполняют некоторый вертикальный угол с вершиной в этой точке, причем стороны этого угла тоже являются опорными прямыми (рис. 3).

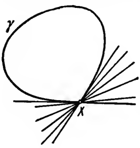

Рис. 3.

Всякая выпуклая кривая является спрямляемой, т. е. имеет определенную длину. Если замкнутая кривая $\bar{\gamma}$ охватывает выпуклую кривую γ, то длина γ не превосходит длины $\bar{\gamma}$.

Выпуклым телом называется замкнутое выпуклое множество в пространстве, имеющее внутренние точки. Для того, чтобы замкнутое выпуклое множество было выпуклым телом, необходимо и достаточно, чтобы не существовало плоскости, содержащей это множество. Пересечение (общая часть) любой совокупности выпуклых тел, если оно содержит внутренние точки, тоже является выпуклым телом.

Область (связное открытое множество) на границе выпуклого тела называется *выпуклой поверхностью*. Связная компонента границы выпуклого тела называется *полной выпуклой поверхностью*. Если исключить два тривиальных случая, когда выпуклое тело есть все пространство или область между двумя параллельными плоскостями, то полную выпуклую поверхность можно определить просто как границу выпуклого тела. Граница конечного выпуклого тела гомеоморфна сфере и называется *замкнутой выпуклой поверхностью*. Всякая полная выпуклая поверхность гомеоморфна либо плоскости, либо сфере, либо ци-

линдру. В последнем случае поверхность сама является цилиндром.

Подобно тому как в случае выпуклых плоских областей, для выпуклых тел вводится понятие опорной плоскости. Именно, плоскость σ, проходящая через граничную точку X тела K, называется *опорной* в этой точке X, если все точки тела расположены по одну сторону от плоскости σ, т. е. в одном из определяемых ею полупространств. Через каждую граничную точку выпуклого тела проходит по крайней мере одна опорная плоскость. Единичный вектор, перпендикулярный опорной плоскости и направленный в полупространство, не содержащее точек тела, называется *внешней нормалью* к этой опорной плоскости.

Выпуклое тело V, составленное из полупрямых, исходящих из точки S, называется *выпуклым конусом*; при этом исключается тот случай, когда тело V совпадает со всем пространством. Определяемое таким образом понятие выпуклого конуса содержит в себе как частный случай двугранный угол и полупространство. Поверхность выпуклого конуса обычно также называют выпуклым конусом. В указанных двух частных случаях говорят о вырождении конуса как поверхности в двугранный угол или плоскость.

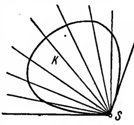

Рис. 4.

С каждой точкой S границы выпуклого тела K естественным образом связывается некоторый конус $V(S)$, образуемый полупрямыми, исходящими из точки S и пересекающими тело K по крайней мере в одной точке, отличной от S (рис. 4). Этот конус называется *касательным конусом* в точке S, а его поверхность — касательным конусом выпуклой поверхности, ограничивающей тело.

В зависимости от вида касательного конуса точки выпуклой поверхности подразделяются на конические, ребристые и гладкие. Именно, точка X выпуклой поверхности называется *конической*, если касательный конус $V(X)$ в этой точке не вырождается. Если же касательный конус $V(X)$ вырождается в двугранный угол или плоскость, то X называется *ребристой* или соответственно *гладкой* точкой. Негладкие точки на выпуклой поверхности представляют собой в некотором смысле исключение. Именно, множество ребристых точек имеет меру нуль, а множество конических точек не более чем счетно.

Простейшим нетривиальным выпуклым телом является *выпуклый многогранник* — пересечение конечного числа полупространств. Поверхность выпуклого многогранника составлена из выпуклых плоских многоугольников и тоже называется выпуклым многогранником. Многоугольники, из которых составлена

поверхность многогранника, называются *гранями* многогранника, их стороны — *ребрами* многогранника, а вершины — *вершинами* многогранника.

В теории выпуклых тел важную роль играет понятие выпуклой оболочки. *Выпуклая оболочка* множества M представляет собой пересечение всех полупространств, содержащих M. Следовательно, она является выпуклым множеством и притом наименьшим среди всех выпуклых множеств, содержащих M. Каждый выпуклый многогранник есть выпуклая оболочка своих вершин (конечных и бесконечно удаленных), и поэтому однозначно ими определяется.

Для последовательности выпуклых поверхностей определяется понятие сходимости. Говорят, что последовательность выпуклых поверхностей F_n сходится к выпуклой поверхности F, если любое открытое множество G одновременно пересекает или не пересекает поверхность F и все поверхности F_n при $n>N(G)$. Любую выпуклую поверхность можно представить как предел выпуклых многогранников или регулярных выпуклых поверхностей.

Бесконечные совокупности выпуклых поверхностей обладают важным свойством *компактности*, которое состоит в том, что из любой последовательности полных выпуклых поверхностей, не удаляющихся в бесконечность, всегда может быть выделена сходящаяся подпоследовательность с пределом в виде выпуклой поверхности, может быть, вырождающейся (в дважды покрытую плоскую область, прямую, полупрямую или отрезок).

В заключение отметим весьма употребительное свойство сходимости опорных плоскостей сходящейся последовательности выпуклых поверхностей. Пусть F_n — последовательность выпуклых поверхностей, сходящаяся к выпуклой поверхности F, X_n — точка на поверхности F_n и α_n — опорная плоскость в этой точке. Тогда, если последовательность точек X_n сходится к точке X поверхности F и последовательность опорных плоскостей α_n сходится к плоскости α, то эта плоскость является опорной для поверхности F в точке X. Отсюда, в частности, следует, что если последовательность точек X_n на выпуклой поверхности F сходится к точке X этой поверхности и опорные плоскости α_n в точках X_n сходятся к плоскости α, то эта плоскость будет опорной в точке X.

§ 2. Многообразия с внутренней метрикой

Пусть R — метрическое пространство, т. е. множество элементов любой природы, в котором для каждой пары элементов X, Y определено число $\rho(X, Y)$, именуемое расстоянием и удовлетворяющее условиям:

1. $\rho(X, Y) \geqslant 0$.
2. $\rho(X, Y) = 0$ тогда и только тогда, когда $X \equiv Y$.
3. $\rho(X, Y) + \rho(Y, Z) \geqslant \rho(X, Z)$ (неравенство треугольника).

Например, евклидово пространство с обычным расстоянием между точками, очевидно, является метрическим. *Кривой* в метрическом пространстве R называется непрерывный образ любого отрезка. Подобно тому как в обычном пространстве, для кривых в метрическом пространстве вводится понятие длины. Если кривая γ задается отображением $X = X(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, то за *длину* кривой γ принимают число

$$l_\gamma = \sup \sum \rho(X(t_{k-1}), X(t_k)), \qquad a \leqslant t_1 \leqslant t_2 \ldots \leqslant b,$$

где $\rho(X(t_{k-1}), X(t_k))$ — расстояние между точками $X(t_{k-1})$ и $X(t_k)$ в пространстве R, а верхняя грань берется по всем конечным разбиениям отрезка (a, b) точками t_k. Определяемое таким образом понятие длины кривой обладает характерным для нее свойством аддитивности. Именно, если кривая γ составлена из кривых γ_1 и γ_2, то длина кривой γ равна сумме длин кривых γ_1 и γ_2.

Подобно тому как для кривых евклидова пространства, множество кривых ограниченной длины в компактной области метрического пространства компактно, т. е. из любой бесконечной последовательности таких кривых можно выделить сходящуюся подпоследовательность. При этом длина предельной кривой не больше нижнего предела длин кривых этой подпоследовательности.

Допустим, что любые две точки X, Y метрического пространства R можно соединить спрямляемой кривой. Тогда в пространстве R естественно определяется внутреннее расстояние $\rho^*(X, Y)$ между точками X, Y как нижняя грань длин кривых, соединяющих эти точки. Легко видеть, что это расстояние удовлетворяет условиям 1—3 метрического пространства. Определяемая таким способом метрика ρ^* называется *внутренней метрикой* пространства R. Если $\rho(X, Y) = \rho^*(X, Y)$ для любых X и Y, то пространство R называется *пространством с внутренней метрикой*. Всюду в дальнейшем рассматриваемое пространство предполагается двумерным многообразием с внутренней метрикой.

Пусть R — многообразие с внутренней метрикой; кривая γ в многообразии R называется *кратчайшей*, если ее длина равна расстоянию между ее концами и, следовательно, не больше длины любой другой кривой, соединяющей те же точки. Каждый отрезок кратчайшей также является кратчайшей. Предельная кривая для сходящейся последовательности кратчайших есть кратчайшая.

В общем случае не всякие две точки в многообразии можно соединить кратчайшей, но каждая точка многообразия имеет окрестность, любые две точки которой допускают соединение кратчайшей. Если многообразие R метрически полно, т. е. любое замкнутое ограниченное множество в нем компактно, то любые две точки такого многообразия можно соединить кратчайшей.

Говорят, что в многообразии с внутренней метрикой выполняется *условие неналегания кратчайших*, если любые две несовпадающие кратчайшие с общими концами не имеют других общих точек, кроме концов. При условии неналегания для взаимного расположения двух кратчайших могут быть только следующие возможности (рис. 5): *1)* они не имеют общих точек, *2)* они имеют только одну общую точку, *3)* они имеют

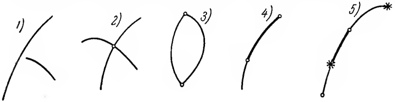

Рис. 5.

только две общие точки, и тогда эти точки суть их концы, *4)* одна из кратчайших содержится в другой, *5)* кратчайшие совпадают на некотором отрезке, одним концом которого является конец одной кратчайшей, а другим концом — конец другой кратчайшей. Из этих свойств взаимного расположения кратчайших как следствие получается, что если AB — кратчайшая и C — ее внутренняя точка, то существует только одна кратчайшая, соединяющая точки A и C — отрезок кратчайшей AB между этими точками. Если точки A_n и C_n сходятся к A и C соответственно, и если существует кратчайшая, соединяющая точки A_n и C_n, то при $n \to \infty$ эти кратчайшие сходятся к отрезку AC кратчайшей AB.

Множество G в многообразии с внутренней метрикой называется *выпуклым*, если любые две его точки можно соединить кратчайшей, целиком содержащейся в G. Выпуклые области в многообразии с внутренней метрикой при условии неналегания кратчайших обладают рядом свойств, аналогичных свойствам выпуклых областей на плоскости. Отметим некоторые из них.

1) Если точки A и B принадлежат выпуклой области G, и точка A является внутренней точкой, то всякая кратчайшая AB проходит целиком внутри G (исключая, может быть, точку B, если она лежит на границе G).

2) Если пересечение двух выпуклых областей имеет внутренние точки, то оно выпукло.

3) Если кратчайшая, проходящая внутри выпуклой области, разбивает ее на части, то каждая из частей будет выпуклой.

Многоугольником в многообразии с внутренней метрикой называется компактное множество с внутренними точками, граница которого состоит из конечного числа кратчайших (рис. 6). При условии неналегания кратчайших пересечение любых двух выпуклых многоугольников, если оно содержит внутренние точки, есть выпуклый многоугольник (рис. 7). Каждая из частей, на

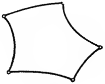

Рис. 6.

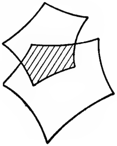

Рис. 7.

которые выпуклый многоугольник разбивается кратчайшей, также является выпуклым многоугольником. Любой многоугольник допускает сколь угодно мелкие триангуляции, т. е. разбиения на сколь угодно малые треугольники.

Каждая точка многообразия с внутренней метрикой при условии неналегания кратчайших имеет гомеоморфную кругу окрестность в виде выпуклого многоугольника.

Нетривиальным примером многообразия с внутренней метрикой, в котором выполняется условие неналегания кратчайших, является выпуклая поверхность (см. § 3). Поэтому для выпуклых поверхностей имеют место все отмеченные выше свойства таких многообразий.

§ 3. Свойство выпуклости внутренней метрики выпуклой поверхности

Основным средством исследования внутренней метрики выпуклой поверхности в теории А. Д. Александрова является приближение общей выпуклой поверхности выпуклыми многогранниками. При этом важную роль играет следующая теорема о сходимости метрик.

Если последовательность замкнутых выпуклых поверхностей F_n сходится к замкнутой выпуклой поверхности F и две последовательности точек X_n и Y_n на F_n сходятся соответственно

к точкам X и Y на F, то расстояния между точками X_n и Y_n, измеренные на поверхностях F_n, сходятся к расстоянию между точками X и Y, измеренному на F, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \rho_{F_n}(X_n, Y_n) = \rho_F(X, Y).$$

Эта теорема усиливается в том смысле, что указанная в ней сходимость оказывается равномерной. Именно:

Для каждой замкнутой выпуклой поверхности F и любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, что, как только отклонение выпуклой поверхности S от F меньше δ *) *и расстояния каких-либо точек X и Y на F от точек A и B на S тоже меньше δ, то*

$$|\rho_F(X, Y) - \rho_S(A, B)| < \varepsilon,$$

где ρ_F и ρ_S — расстояния на F и S соответственно.

Как следствие теоремы о сходимости метрик получается следующая теорема о сходимости кратчайших.

Если последовательность замкнутых выпуклых поверхностей F_n сходится к поверхности F и последовательность пар точек X_n и Y_n, лежащих на F_n, сходится к паре точек X и Y на F, то из всякой последовательности кратчайших $\gamma(X_n, Y_n)$ на поверхностях F_n можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к кратчайшей $\gamma(X, Y)$ на F.

Важнейшим свойством внутренней метрики выпуклой поверхности является *свойство выпуклости.* Оно состоит в следующем.

Пусть γ и γ' — две кратчайшие, исходящие из точки O на выпуклой поверхности F, X и X' — переменные точки на этих кратчайших, x и x' — расстояния точек X и X' от точки O, $z(x, x')$ — расстояние между X и X', причем все расстояния берутся на поверхности F. Пусть $\alpha(x, x')$ — угол в плоском треугольнике со сторонами x, x', $z(x, x')$, лежащий против стороны $z(x, x')$. Тогда $\alpha(x, x')$ является невозрастающей функцией x и x' на всяком интервале значений $0<x<x_0$, $0<x'<x_0'$, на котором существует кратчайшая XX'.

Оказывается, свойство выпуклости дает исчерпывающую характеристику внутренней метрики выпуклой поверхности. Всякое двумерное многообразие с внутренней метрикой, обладающее этим свойством, локально изометрично выпуклой поверхности.

Свойство выпуклости метрики доказывается сначала для замкнутых выпуклых многогранников. Доказательство в существенной части опирается на следующие свойства кратчайших, представляющие и самостоятельный интерес:

*) Это значит, что S содержится в δ-окрестности поверхности F, а F в свою очередь содержится в δ-окрестности поверхности S.

1. Кратчайшая, исходящая из точки O на выпуклом многограннике, в окрестности точки O представляет собой прямолинейный отрезок.

2. Кратчайшая на выпуклом многограннике не может проходить через его вершины.

3. Если точки A и B не являются вершинами многогранника, то соединяющая их кратчайшая $\gamma(A, B)$ на многограннике имеет окрестность, которую можно развернуть на плоскость. При этом сама кратчайшая переходит в прямолинейный отрезок.

4. Для кратчайших на выпуклом многограннике выполняется условие неналегания кратчайших.

Основанное на этих свойствах доказательство выпуклости внутренней метрики замкнутого выпуклого многогранника затем распространяется на общую выпуклую поверхность путем приближения ее многогранниками и переходом к пределу. Соответствующая теорема гласит:

На всякой замкнутой выпуклой поверхности выполняется условие выпуклости в целом.

Для незамкнутых поверхностей свойство выпуклости их внутренней метрики устанавливается путем включения данной поверхности или ее части в замкнутую выпуклую поверхность. Таким образом получаются теоремы:

У каждой точки на выпуклой поверхности (вообще говоря, незамкнутой) существует окрестность, в которой выполняется условие выпуклости.

Метрика бесконечной полной выпуклой поверхности удовлетворяет условию выпуклости в целом.

Свойство выпуклости метрики общей выпуклой поверхности позволяет естественным образом ввести понятие угла между кратчайшими, который определяется как предел угла $\alpha(x, x')$, фигурирующего в условии выпуклости, при $x, x' \to 0$. Угол между кратчайшими в смысле этого определения, очевидно, всегда существует.

Выпуклость метрики имеет своим следствием выполнение условия неналегания кратчайших на общей выпуклой поверхности. Именно, если две кратчайшие γ и γ', исходящие из точки O на выпуклой поверхности, совпадают на некотором отрезке OA, то одна из них является частью другой.

Как следствие свойства выпуклости получается, что углы треугольника, образованного кратчайшими на выпуклой поверхности, не меньше соответствующих углов плоского треугольника со сторонами той же длины.

На свойстве выпуклости метрики основано доказательство следующей теоремы о сходимости углов между кратчайшими:

Если последовательность выпуклых поверхностей F_n сходится к выпуклой поверхности F (в частности, может быть $F_n \equiv F$) и

кратчайшие γ'_n, γ''_n, исходящие из точки O_n на F_n, сходятся к кратчайшим γ' и γ'', исходящим из O на F, то угол $\alpha(\gamma', \gamma'')$ не превосходит нижнего предела угла $\alpha(\gamma'_n, \gamma''_n)$ при $n \to \infty$, т. е.

$$\alpha(\gamma', \gamma'') \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \alpha(\gamma'_n, \gamma''_n).$$

§ 4. Основные свойства угла между кратчайшими на выпуклой поверхности

Пусть F — выпуклая поверхность, O — точка на ней, γ_1 и γ_2 — кратчайшие, исходящие из точки O. Возьмем на кратчайших точки X_1 и X_2 и построим плоский треугольник со сторонами $\rho_F(O, X_1)$, $\rho_F(O, X_2)$, $\rho_F(X_1, X_2)$. Пусть $\alpha(X_1, X_2)$ — угол этого треугольника, противолежащий стороне, равной $\rho_F(X_1, X_2)$. По определению углом $\alpha(\gamma_1, \gamma_2)$ между кратчайшими γ_1 и γ_2 в точке O называется предел угла $\alpha(X_1, X_2)$ при $X_1, X_2 \to O$. Определяемый таким образом угол существует для любых двух кратчайших, исходящих из одной точки.

Имеет место следующая теорема о сложении углов между кратчайшими, исходящими из одной точки.

Пусть из точки O на выпуклой поверхности исходят три кратчайшие γ_1, γ_2, γ_3; α_{12}, α_{23} и α_{13} — углы между этими кратчайшими. Тогда, если для точек X_1 и X_3 кратчайших γ_1 и γ_3, сколь угодно близких к точке O, кратчайшая X_1X_3 пересекает кратчайшую γ_2, то

$$\alpha_{13} = \alpha_{12} + \alpha_{23}.$$

Аналогичная теорема имеет место для n кратчайших, исходящих из одной точки. Доказательство основано на свойстве неналегания кратчайших и выпуклости метрики выпуклой поверхности.

В силу свойства неналегания кратчайших две кратчайшие γ и γ', исходящие из одной точки O на выпуклой поверхности, разбивают окрестность этой точки на два сектора. Пусть V — один из секторов, ограниченных кратчайшими. Проведем в этом секторе из точки O кратчайшие $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, занумерованные в порядке их следования от γ к γ'. Пусть $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — углы между соседними кратчайшими, т. е. γ и γ_1, γ_1 и γ_2, ..., γ_n и γ'. *Углом сектора V* называется точная верхняя грань суммы углов $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ по всем конечным совокупностям кратчайших γ_i внутри сектора.

Угол сектора V, ограниченного кратчайшими γ и γ', исходящими из одной точки O, не меньше угла между самими кратчайшими γ и γ'. Если же кратчайшая XX', соединяющая точки X и X' на γ и γ', при X и X', сколь угодно близких к O, проходит

в секторе V, то угол сектора V равен углу между кратчайшими γ и γ'. Следовательно, всегда угол одного из двух взаимно дополняющих секторов равен углу между ограничивающими его кратчайшими.

Углы секторов складываются точно так же, как углы секторов на плоскости. Именно, если сектор W составлен из секторов U и V, то его угол равен сумме углов секторов U и V. Отсюда следует, что сумма углов двух взаимно дополняющих секторов не зависит от этих секторов, а зависит только от точки, являющейся их общей вершиной. Это позволяет определить *полный угол вокруг точки O* на выпуклой поверхности как сумму углов двух взаимно дополнительных секторов с вершиной в этой точке.

Полный угол вокруг точки на выпуклой поверхности всегда $\leqslant 2\pi$. Для выпуклых многогранников утверждение очевидно. В случае общей выпуклой поверхности оно доказывается предельным переходом от выпуклых многогранников путем использования теоремы о сходимости углов между кратчайшими.

Если точка O делит кратчайшую γ на части γ' и γ'', то угол каждого из секторов, образованных кратчайшими γ' и γ'', не меньше π. А так как сумма этих углов не больше 2π, то каждый из углов в точности равен π. Отсюда следует, что кратчайшая не может проходить через точки выпуклой поверхности, в которых полный угол меньше 2π.

Теорема о сходимости углов между кратчайшими (§ 3) позволяет доказать аналогичную теорему о сходимости углов секторов. Именно:

Пусть секторы V_n на выпуклых поверхностях, сходящихся к F, сходятся к сектору V. Тогда, если α и α_n — углы секторов V и V_n соответственно, то

$$\alpha \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \alpha_n.$$

Как следствие, отсюда получается, что *если точки O_n, лежащие на выпуклых поверхностях F_n, сходящихся к выпуклой поверхности F, сходятся в точке O на F, то полный угол ϑ в точке O на F не превосходит нижнего предела полного угла ϑ_n в точке O_n поверхности F_n, т. е.*

$$\vartheta \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \vartheta_n.$$

Отсюда в свою очередь вытекают два важных следствия:

а) *Пусть секторы V_n на выпуклых поверхностях F_n, сходящихся к выпуклой поверхности F, сходятся к сектору V на этой поверхности, и пусть полные углы ϑ_n вокруг вершин секторов V_n*

сходятся к полному углу ϑ вокруг вершины сектора V. Тогда, если α_n и α — углы секторов V_n и V соответственно, то

1) *существует* $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$ *и*

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha.$

б) *Пусть секторы V_n на выпуклых поверхностях F_n, сходящихся к F, сходятся к такому сектору V на F, угол вокруг вершины которого равен 2π. Тогда, если α и α_n означают углы секторов V и V_n, то*

1) *существует* $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$ *и*

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha.$

Из этих двух теорем вытекают аналогичные свойства углов между кратчайшими. Именно:

Пусть выпуклые поверхности F_n сходятся к выпуклой поверхности F и кратчайшие γ_n' и γ_n'', исходящие из точек O_n на поверхностях F_n, сходятся к кратчайшим γ' и γ'', исходящим из точки O на F, причем O_n сходятся к O. Тогда, если полные углы вокруг точек O_n сходятся к полному углу вокруг точки O, или если полный угол вокруг точки O равен 2π, то углы между кратчайшими γ_n' и γ_n'' сходятся к углу между предельными кратчайшими γ' и γ''.

В частности, если кратчайшие γ_n' и γ_n'', исходящие из одной и той же точки O на выпуклой поверхности F, сходятся к кратчайшим γ' и γ'', то

1) углы между кратчайшими γ_n' и γ_n'' сходятся к углу между кратчайшими γ' и γ'' и

2) углы обоих секторов, ограниченных кратчайшими γ_n' и γ_n'', сходятся соответственно к углам секторов, ограниченых кратчайшими γ' и γ''.

Существование полукасательных в каждой точке кратчайшей (§ 1 гл. II) позволяет выяснить пространственный смысл угла между кратчайшими на выпуклой поверхности в их общей точке. Дело в том, что касательному конусу выпуклой поверхности F в точке S, который мы определили как поверхность телесного конуса, образованного полупрямыми, исходящими из S и идущими внутрь тела, ограниченного поверхностью F, можно дать следующее эквивалентное определение.

Подвергнем поверхность F преобразованию подобия относительно центра S с коэффициентом подобия k. При $k\to\infty$ построенная так поверхность F_k сходится к конусу V, который и является касательным конусом поверхности F в точке S.

Если из точки S на поверхности F исходят кратчайшие γ' и γ'', то при указанном подобном преобразовании поверхности F

они переходят в кратчайшие γ_k' и γ_k'' на F_k, которые при $k \to \infty$ сходятся к полукасательным t' и t'' кратчайших γ' и γ'' в точке S.

Так как полный угол в точке S на поверхности F_k, очевидно, не зависит от k, то угол сектора, ограниченного кратчайшими γ_k' и γ_k'' на F_k, равен углу сектора, ограниченного кратчайшими γ' и γ'' на F, и одновременно равен углу сектора, ограниченного образующими t' и t'' на развертке касательного конуса.

Отсюда следует, что если точка S гладкая (касательный конус вырождается в плоскость), то угол между кратчайшими γ' и γ'', исходящими из точки S, равен углу между полукасательными к ним в этой точке.

§ 5. Кривизна выпуклой поверхности

Для общих выпуклых поверхностей вводится понятие *внутренней* и *внешней* кривизны.

Внутренняя кривизна ω определяется сначала для основных множеств — точек, открытых кратчайших и открытых треугольников — следующим образом.

Если M — точка и ϑ — полный угол вокруг нее на поверхности, то внутренняя кривизна M равна

$$\omega(M) = 2\pi - \vartheta.$$

Если M — открытая кратчайшая, т. е. кратчайшая с исключенными концами, то

$$\omega(M) = 0.$$

Если M — открытый треугольник, т. е. треугольник с исключенными сторонами и вершинами, то

$$\omega(M) = \alpha + \beta + \gamma - \pi,$$

где α, β, γ — углы треугольника.

Далее внутренняя кривизна определяется для элементарных множеств, т. е. таких множеств, которые представляются в виде теоретико-множественной суммы основных множеств, так что

$$M = \sum_1^n B_k.$$

Для таких множеств

$$\omega(M) = \sum_1^n \omega(B_k).$$

Доказывается, что определяемая таким образом внутренняя кривизна элементарных множеств не зависит от способа представления множества в виде суммы основных. Доказательство

существенно опирается на следующую элементарную, но важную теорему.

Пусть P — внутренняя часть геодезического многоугольника с углами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и эйлеровой характеристикой χ. Тогда кривизна P равна

$$\omega(P) = 2\pi\chi - \sum_{k=1}^{n} (\pi - \alpha_k).$$

Очевидно, внутренняя кривизна элементарных множеств на выпуклой поверхности является аддитивной функцией.

Пусть F — выпуклая поверхность и M — множество точек на ней. Отложим единичные внешние нормали ко всем опорным плоскостям поверхности в точках множества M из некоторой точки O. Концы этих нормалей образуют некоторое множество M^* на единичной сфере с центром O. Это множество называется *сферическим изображением* множества M. Площадь (лебегова мера) множества M^*, если она существует, называется *внешней кривизной* множества M.

Оказывается, *внешняя кривизна есть вполне аддитивная функция на выпуклой поверхности, определенная для всех борелевских множеств.*

Доказательство этой теоремы опирается на следующие два предложения, интересные и сами по себе. Первое из них доказывается достаточно просто:

1. *Сферическое изображение замкнутого множества на выпуклой поверхности является замкнутым множеством.*

2. *Множество тех точек сферического изображения выпуклой поверхности, у каждой из которых есть по крайней мере два прообраза на поверхности, имеет площадь, равную нулю.*

Для внешних кривизн выпуклых поверхностей имеют место следующие две теоремы о сходимости:

1. *Если последовательность выпуклых поверхностей F_n сходится к выпуклой поверхности F и последовательность замкнутых множеств M_n, лежащих на поверхностях F_n, сходится к замкнутому множеству M на F, то*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \psi(M_n) \leqslant \psi(M),$$

где ψ обозначает внешнюю кривизну соответствующего множества.

2. *Пусть последовательность выпуклых поверхностей F_n сходится к выпуклой поверхности F, G_n и G — открытые множества на поверхностях F_n и F, а $\bar{G}_n$ и $\bar{G}$ — замыкания этих множеств. Тогда, если множества $\bar{G}_n$ сходятся к $\bar{G}$, а множества $F - G_n$ сходятся к $F - G$, и внешние кривизны множеств $\bar{G}_n - G_n$ сходятся к внешней кривизне $\bar{G} - G$, то внешние кривизны G_n сходятся к внешней кривизне G.*

В частности, если границы областей G_n сходятся к границе G и внешняя кривизна границы области G равна нулю, то внешние кривизны областей G_n сходятся к внешней кривизне области G.

До сих пор внутренняя кривизна выпуклой поверхности была определена только для элементарных множеств. Теперь мы определим ее для замкнутых множеств как точную нижнюю грань внутренних кривизн элементарных множеств, содержащих данное замкнутое множество. Наконец, для любого борелевского множества внутреннюю кривизну определим как точную верхнюю грань внутренних кривизн содержащихся в нем замкнутых множеств.

То, что определение внутренней кривизны для замкнутых и вообще борелевских множеств не вступает в противоречие с введенным ранее определением внутренней кривизны для элементарных множеств, гарантируется следующей фундаментальной теоремой.

Внутренняя кривизна всякого борелевского множества на выпуклой поверхности равна его внешней кривизне, т. е. площади сферического изображения.

Доказательство этой теоремы проводится сначала для основных множеств — точек, открытых кратчайших и открытых треугольников. Основным средством доказательства является приближение общей выпуклой поверхности выпуклыми многогранниками.

Так как внутренняя и внешняя кривизны борелевских множеств совпадают, то в дальнейшем можно говорить вообще о кривизне поверхности.

Введение понятия кривизны выпуклой поверхности позволяет дополнить приведенные выше соотношения между элементами треугольника на выпуклой поверхности и плоского треугольника со сторонами той же длины. В частности,

Если α, β, γ — углы треугольника на выпуклой поверхности и α_0, β_0, γ_0 — соответствующие углы плоского треугольника с теми же сторонами, то

$$0 \leqslant \alpha - \alpha_0 \leqslant \omega, \quad 0 \leqslant \beta - \beta_0 \leqslant \omega, \quad 0 \leqslant \gamma - \gamma_0 \leqslant \omega,$$

где ω — кривизна треугольника.

Действительно, кривизна треугольника равна

$$\omega = \alpha + \beta + \gamma - \pi = (\alpha - \alpha_0) + (\beta - \beta_0) + (\gamma - \gamma_0).$$

и указанное соотношение вытекает из неотрицательности разностей $\alpha - \alpha_0$, $\beta - \beta_0$, $\gamma - \gamma_0$.

Пусть ABC — выпуклый треугольник на выпуклой поверхности и X, Y — две точки на его сторонах AB и AC, x, y — длины отрезков AX и AY сторон AB и AC, а z — расстояние от X до Y,

Построим плоский треугольник $A_0B_0C_0$ со сторонами той же длины, т. е. $A_0B_0 = AB$ и т. д. На его сторонах A_0B_0 и A_0C_0 возьмем точки X_0 и Y_0 так, чтобы $A_0X_0 = x$, $A_0Y = y$, и пусть $X_0Y_0 = z_0$. Тогда, если ω — кривизна треугольника ABC и d — его наибольшая сторона, то

$$0 \leqslant z - z_0 \leqslant 4\sqrt{xy}\sin\frac{\omega}{4} \leqslant \omega d.$$

Отсюда как следствие получается, что *если кривизна выпуклого треугольника на выпуклой поверхности равна нулю, то этот треугольник изометричен плоскому треугольнику*. Для того чтобы область G на выпуклой поверхности была локально изометрична плоскости, необходимо и достаточно, чтобы каждая ее точка имела окрестность с равной нулю кривизной.

§ 6. Существование выпуклого многогранника с данной метрикой

Метрика ρ, заданная на двумерном многообразии M, называется *выпуклой многогранной метрикой*, если каждая точка многообразия имеет окрестность, изометричную круговому конусу, причем вырождение конуса в плоскость не исключается. Очевидно, каждый выпуклый многогранник имеет выпуклую многогранную метрику. В частности, замкнутый выпуклый многогранник есть гомеоморфное сфере многообразие с многогранной выпуклой метрикой.

Возникает вопрос — нельзя ли любую многогранную выпуклую метрику, заданную на многообразии, гомеоморфном сфере, реализовать некоторым замкнутым выпуклым многогранником? Утвердительный ответ на этот вопрос дает следующая теорема А. Д. Александрова.

Всякая многогранная выпуклая метрика, заданная на сфере или многообразии, гомеоморфном сфере, реализуется замкнутым выпуклым многогранником (может быть, вырождающимся в дважды покрытый плоский многоугольник).

Приведем идею доказательства этой теоремы по А. Д. Александрову. Прежде всего мы замечаем, что число тех точек на многообразии, полный угол вокруг которых меньше 2π, т. е. точек с окрестностью, изометричной невырождающемуся конусу, конечно. Будем называть такие точки *вершинами*.

Легко показывается, что число вершин многогранной метрики, заданной на многообразии, гомеоморфном сфере, не может быть меньше трех. Далее, всякая многогранная выпуклая метрика с тремя вершинами реализуется дважды покрытым треугольником, а метрика с четырьмя вершинами — тетраэдром. Стороны треугольника и ребра тетраэдра равны расстояниям между вершинами многообразия в заданной метрике.

Предположим теперь, что каждая многогранная выпуклая метрика с $l-1$ вершиной реализуема и докажем, что реализуемы метрики с l вершинами. Для этого достаточно установить справедливость следующих трех предложений.

1. *Данную метрику ρ с l вершинами можно непрерывно соединить семейством таких же метрик $\rho(t)$ с метрикой ρ_0, заведомо реализуемой.*

2. *Если метрика $\rho(t_0)$ с l вершинами реализуема, то и все близкие к ней такие же метрики $\rho(t)$ тоже реализуемы.*

3. *Если метрики $\rho(t)$ с l вершинами для всех t, близких к t_0, реализуемы, то и метрика $\rho(t_0)$ реализуема.*

Первое предложение доказывается следующим образом. Не ограничивая общности, можно считать, что метрика ρ имеет по крайней мере пять вершин. Поэтому среди них найдутся две такие, в которых полные углы ϑ больше π. Действительно, так как многообразие гомеоморфно сфере, то

$$\Sigma(2\pi-\vartheta_k)=4\pi.$$

Отсюда следует, что по крайней мере два значения ϑ больше π.

Пусть A и B будут вершины с полным углом, большим π. Соединим их кратчайшей γ и разрежем многообразие по этой кратчайшей. В разрез «вклеим» два равных треугольника с основанием, равным длине γ, углом при вершине, которая совмещается с вершиной A, равным $\pi-\vartheta_A/2$, и углом при вершине, которая совмещается с вершиной B, равным t.

Полученное при этом многообразие также имеет многогранную выпуклую метрику с тем же самым числом вершин (l). Когда t изменяется от нуля до $\pi-\vartheta_B/2$, метрика $\tilde\rho(t)$ построенного многообразия непрерывно изменяется и переходит при $t=\vartheta_B/2$ в метрику заведомо реализуемую, так как число вершин этой метрики равно $l-1$. (Вместо двух вершин A и B в исходной метрике появляется только одна новая вершина C).

Пусть эта метрика $\tilde\rho_1$ реализована в виде многогранника P_1 с $l-1$ вершинами. Выдвинем немного его точку, соответствующую вершине A, во внешнюю сторону и построим выпуклую оболочку выдвинутой точки и самого многогранника P_1. Эта оболочка будет многогранником P_0 с l вершинами и с метрикой $\tilde\rho_0$, близкой к $\tilde\rho_1$. Можно теперь показать, что метрики $\tilde\rho(t)$ допускают такое малое изменение, при котором они переходят в непрерывное семейство метрик $\rho(t)$ с l вершинами, соединяющее данную метрику ρ с реализованной метрикой ρ_0 (которая близка или совпадает с $\tilde\rho_0$).

Покажем, как доказывается второе предложение. Для простоты предположим, что у многогранника $P(t_0)$, реализующего метрику $\rho(t_0)$, все грани являются треугольниками. Расположим

многогранник $P(t_0)$ таким образом, чтобы вершины A, B, C одной из его граней Δ_0 расположились в плоскости xy, причем вершина A в начале координат, вершина B на полуоси $x>0$, а вершина C — в полуплоскости $y>0$. Пусть вершины многогранника $P(t_0)$ получают малые смещения, но так, что для вершин грани Δ_0 сохраняется указанное расположение. При этом ребра многогранника тоже изменятся. Связь между координатами вершин и длинами ребер многогранника устанавливается системой равенств

$$d_{ij}=\{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2\}^{1/2}\equiv f_{ij}(x,\ y,\ z), \qquad (*)$$

где d_{ij} — длина ребра, соединяющего вершины $A_i(x_i,\ y_i,\ z_i)$ и $A_j(x_j,\ y_j,\ z_j)$.

Для того чтобы доказать реализуемость метрик $\rho(t)$, близких к $\rho(t_0)$, достаточно доказать разрешимость системы $(*)$ при заданных d_{ij}, близких к d_{ij}^0 (d_{ij}^0 — ребра многогранника $P(t_0)$). Число этих уравнений равно числу ребер многогранника $P(t_0)$, а число неизвестных (x), (y), (z) равно $3l-6$, где l — число вершин.

По формуле Эйлера для многогранника $P(t_0)$ имеем

$$l-k+f=2,$$

где l — число вершин, k — число ребер, а f — число граней многогранника. Так как по предположению все грани многогранника $P(t_0)$ суть треугольники, то $3f=2k$, и, следовательно,

$$3l-6=k.$$

Таким образом, число уравнений и число неизвестных системы $(*)$ одно и то же и равно $3l-6$.

Для того чтобы система $(*)$ была разрешима в окрестности значений (x^0), (y^0), (z^0), отвечающих многограннику $P(t_0)$, достаточно, чтобы ее якобиан был отличен от нуля. Для этого, в свою очередь, достаточно, чтобы система линейных уравнений

$$df_{ij}\,|_{P(t_0)}=0 \qquad (**)$$

относительно дифференциалов dx_i, dy_j, dz_k имела только нулевое решение. Геометрически это значит, что выпуклый многогранник $P(t_0)$ при указанном закреплении его грани Δ_0 не допускает бесконечно малых деформаций, при которых его ребра были бы стационарны. Согласно теореме о жесткости замкнутый выпуклый многогранник действительно не допускает таких деформаций. Тем самым второе утверждение доказано.

Что касается третьего утверждения, которым завершается доказательство теоремы, то оно доказывается просто. Из последовательности многогранников $P(t)$, реализующих метрики $\rho(t)$,

можно выделить подпоследовательность таких, у которых будут сходиться вершины. При этом будут сходиться и сами многогранники. Предельный многогранник $P(t_0)$ этой подпоследовательности реализует метрику $\rho(t_0)$.

§ 7. Существование замкнутой выпуклой поверхности с данной метрикой

Теперь мы рассмотрим вопрос о существовании замкнутой выпуклой поверхности, реализующей заданную метрику. Для того чтобы приступить к решению этого вопроса, выясним сначала, каким необходимым условиям надо подчинить заданную метрику.

Так как замкнутая выпуклая поверхность гомеоморфна сфере, то реализуемая метрика должна быть задана на многообразии, гомеоморфном сфере. Далее, она должна быть внутренней, так как таковой является метрика выпуклой поверхности. Наконец, не ограничивая общности ожидаемого результата, можно потребовать, чтобы заданная метрика удовлетворяла условию выпуклости (§ 3). Действительно, метрика каждой выпуклой поверхности удовлетворяет этому условию.

Оказывается, при выполнении перечисленных условий метрика действительно реализуется замкнутой выпуклой поверхностью. Однако последнее условие (выпуклость метрики) хотя и необходимо, но как достаточное условие, оно является слишком сильным. Его можно заменить более слабым требованием неотрицательности кривизны, которое состоит в том, чтобы для каждого достаточно малого треугольника, образованного кратчайшими, сумма нижних углов была не меньше π. *Нижний угол* между кривыми всегда существует и определяется следующим образом.

Пусть R — многообразие с внутренней метрикой ρ. Пусть O — произвольная точка R и γ_1, γ_2 — исходящие из этой точки кривые. Возьмем на кривых точки X_1, X_2 и построим плоский треугольник со сторонами $\rho(O, X_1)$, $\rho(O, X_2)$, $\rho(X_1, X_2)$. Угол этого треугольника, противолежащий стороне $\rho(X_1, X_2)$, обозначим $\alpha(X_1, X_2)$. Тогда по определению нижний угол между кривыми γ_1 и γ_2 в точке O равен

$$\alpha(\gamma_1, \gamma_2) = \varliminf_{X_1, X_2 \to O} \alpha(X_1, X_2).$$

Теорема о реализуемости заданной метрики выпуклой поверхностью гласит:

Внутренняя метрика неотрицательной кривизны, заданная на сфере или на многообразии, гомеоморфном сфере, реализуется замкнутой выпуклой поверхностью, которая, в частности,

может вырождаться в дважды покрытую выпуклую область плоскости.

Доказывается, что в многообразии с внутренней метрикой и неотрицательной кривизной выполняется условие выпуклости. Поэтому, чтобы не усложнять изложение, мы будем предполагать, что заданная метрика уже удовлетворяет этому условию, и в этом предположении докажем теорему реализуемости.

Итак, пусть R — гомеоморфное сфере многообразие, на котором задана внутренняя метрика, удовлетворяющая условию выпуклости. Подвергнем многообразие R достаточно мелкой триангуляции. Такая триангуляция возможна благодаря условию неналегания кратчайших (§ 1), которое в R выполняется. Пусть диаметр каждого треугольника этой триангуляции меньше δ.

Возьмем произвольный треугольник Δ_k триангуляции и построим плоский треугольник Δ_k^0 со сторонами той же длины. Построим топологическое отображение f треугольника Δ_k на Δ_k^0 таким образом, чтобы соответствующие вершины Δ_k и Δ_k^0 были соответствующими при гомеоморфизме f и чтобы этот гомеоморфизм на границе треугольников был изометрическим отображением. Составим теперь из треугольников Δ_k^0 гомеоморфное сфере многообразие R^0 с многогранной метрикой R_0 путем отождествления соответствующих точек сторон треугольников Δ_k^0, причем соответствующими считаются такие точки сторон треугольников Δ_k^0 и Δ_s^0, которые на Δ_k и Δ_s имеют совпадающие прообразы при гомеоморфизме f.

Так как углы треугольника Δ_k^0 не больше углов треугольника Δ_k, а полный угол в каждой точке многообразия R не больше 2π, то полный угол вокруг каждой точки многообразия R^0 тоже не больше 2π, и, следовательно, метрика R_0 является выпуклой многогранной метрикой.

Согласно теореме о реализуемости выпуклой многогранной метрики, заданной на многообразии, гомеоморфном сфере (§ 6), существует замкнутый выпуклый многогранник P_0, изометричный R_0. Гомеоморфизм f треугольников Δ_k на треугольники Δ_k^0 порождает гомеоморфизм R на R_0 и, следовательно, на P_0. Будем обозначать его также f. Утверждается, что отображение f многообразия R на многогранник P_0 при малом δ близко к изометрическому. Именно, если X и Y — две любые точки на R, fX и fY — их образы на P_0, то

$$|\rho_R(X, Y) - \rho_{P_0}(fX, fY)| < 4\pi\delta.$$

Действительно, пусть X и Y — две произвольные точки многообразия R и γ — соединяющая их кратчайшая. Этой кратчай-

шей в силу гомеоморфизма f соответствует некоторая кривая γ', соединяющая точки fX и fY. Подвергнем кривую γ' преобразованию, при котором отрезок ее γ'_k, содержащийся внутри треугольника Δ_k^0, заменяется кратчайшей γ_k^0, соединяющей его концы. Преобразованную кривую обозначим γ^0. Сравним теперь длины l кривых γ и γ^0.

Для отрезков z_k и z_k^0 этих кривых, расположенных внутри соответствующих треугольников Δ_k и Δ_k^0, согласно теореме, приведенной в § 5, имеет место оценка

$$|z_k - z_k^0| \leqslant \omega(\Delta_k)\,\delta,$$

где $\omega(\Delta_k)$ — кривизна треугольника Δ_k. Так как полная кривизна многообразия R равна 4π, то сумма всех кривизн $\omega(\Delta_k)$ для треугольников Δ_k, пересекающих γ, не превосходит 4π. Отсюда

$$|l(\gamma) - l(\gamma^0)| \leqslant \sum |z_k - z_k^0| \leqslant 4\pi\delta.$$

Так как γ — кратчайшая, соединяющая точки X и Y в многообразии R, то

$$\rho_{P_0}(fX,\ fY) - \rho_R(X,\ Y) \leqslant 4\pi\delta.$$

Аналогичным рассмотрением, соединяя кратчайшей точки fX и fY на многограннике, показывается, что

$$\rho_R(X,\ Y) - \rho_{P_0}(fX,\ fY) \leqslant 4\pi\delta.$$

Следовательно,

$$|\rho_R(X,\ Y) - \rho_{P_0}(fX,\ fY)| \leqslant 4\pi\delta.$$

Утверждение доказано.

Обозначим введенную на многообразии R триангуляцию через T_0. Разобьем каждый треугольник Δ этой триангуляции на более мелкие треугольники так, чтобы стороны треугольников полученной таким образом новой триангуляции были меньше $\delta_1 = \delta/2$. Эту триангуляцию обозначим T_1. Аналогично строим триангуляцию T_2 со сторонами треугольников, меньшими $\delta_2 = \delta_1/2$, и т. д. Очевидно, вершины триангуляции T являются вершинами T_1, вершины T_1 — вершинами T_2 и т. д. Подобно тому как с помощью триангуляции T_0 был построен многогранник P_0, построим с помощью триангуляций T_1, T_2, ... многогранники P_1, P_2, ...

Пусть A_i^k — вершины триангуляции T_k многообразия R. Им соответствуют вершины B_i^k многогранника P_k, причем может быть, что некоторые из них являются несобственными. Возьмем теперь такую подпоследовательность многогранников P_k, для

которой вершины B_i^k сходятся при $k \to \infty$. Такая подпоследовательность многогранников строится без труда. Так как сеть точек B_i^k на многограннике P_k неограниченно сгущается с ростом k, то при условии сходимости вершин B_i^k сами многогранники P_k сходятся к некоторой выпуклой поверхности F.

Метрики многогранников P_k в силу неравенства

$$|\rho_R(X, Y) - \rho_{P_k}(fX, fY)| \leqslant 4\pi\delta_k$$

сходятся к метрике многообразия R; с другой стороны, они сходятся к метрике предельной поверхности F. Отсюда следует, что на выпуклой поверхности F реализуется метрика многообразия R. Теорема доказана.

§ 8. Кривые на выпуклой поверхности

Для произвольных кривых на выпуклой поверхности вводится понятие угла между ними точно так же, как и для кратчайших. Именно, пусть на выпуклой поверхности F из точки O исходят кривые γ_1 и γ_2. Возьмем на этих кривых точки X_1, X_2 соответственно и построим плоский треугольник со сторонами $\rho(O, X_1)$, $\rho(O, X_2)$, $\rho(X_1, X_2)$. Пусть $\alpha(X_1, X_2)$ — угол плоского треугольника, противолежащий стороне $\rho(X_1, X_2)$. Будем говорить, что кривые γ_1 и γ_2 образуют в точке O определенный угол, если существует предел $\alpha(X_1, X_2)$ при $X_1, X_2 \to O$, и величину этого предела будем называть *углом между кривыми*.

В то время как угол между кратчайшими в их общей точке существует всегда (§ 4), между любыми двумя кривыми он может и не существовать. Легко привести соответствующие примеры кривых на плоскости. Для того чтобы выяснить условия существования угла между кривыми, вводится важное понятие о направлении кривой.

Будем говорить, что кривая γ, исходящая из точки O на выпуклой поверхности, *имеет в этой точке определенное направление*, если она сама с собой в смысле данного определения образует определенный угол, очевидно, равный нулю. Оказывается, кривая γ в точке O имеет определенное направление тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке полукасательную. Вопрос о существовании угла между кривыми решается следующей теоремой.

Для того чтобы кривые γ_1 и γ_2, исходящие из одной и той же точки O на выпуклой поверхности, образовали определенный угол, необходимо и достаточно, чтобы каждая из кривых в этой точке имела определенное направление. При этом угол между кривыми равен углу между полукасательными к ним на развертке касательного конуса в точке O.

Введем теперь понятие поворота кривой. *Поворот кривой* представляет собой интегральное обобщение геодезической кривизны регулярной кривой на регулярной поверхности. Определим сначала поворот ломаной, звенья которой являются кратчайшими. Пусть γ — такая ломаная без самопересечений и $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — ее внутренние вершины. Зададим на ломаной какое-нибудь направление. Тогда у нее определятся правая и левая стороны. Пусть α_i — измеренный справа угол сектора между звеньями ломаной, сходящимися в вершине A_i. Тогда правым поворотом ломаной γ называется величина

$$\varphi_r(\gamma) = \sum_i (\pi - \alpha_i),$$

где суммирование определяется по всем внутренним вершинам. Левый поворот ломаной $\varphi_l(\gamma)$ определяется аналогично, путем измерения углов между звеньями ломаной слева.

Пусть теперь γ — произвольная кривая без самопересечений с концами в точках A, B и с определенным направлением в этих точках. Задав направление на кривой γ, построим последовательность простых ломаных γ_n, сходящихся к γ, и расположенных в правой полуокрестности кривой. Пусть φ_n — правый поворот ломаной γ_n, а α_n и β_n — углы, образованные начальным и конечным звеньями ломаной с кривой γ и измеренные справа. Тогда правым поворотом кривой называется величина

$$\varphi_r(\gamma) = \lim_{\gamma_n \to \gamma} (\alpha_n + \beta_n + \varphi_n).$$

Предел, стоящий в правой части этого равенства, всегда существует и не зависит от выбора последовательности ломаных, сходящихся к γ. Таким образом, существование поворота обеспечивается только существованием определенных направлений на концах кривой.

Левый поворот $\varphi_l(\gamma)$ кривой γ определяется аналогично путем приближения кривой ломаными в ее левой полуокрестности.

Правый и левый повороты кривой обладают свойством аддитивности. Именно, если кривая γ делится точкой C на две части γ_1 и γ_2, и в точке C кривые γ_1 и γ_2 имеют определенные направления, то

$$\varphi(\gamma) = \varphi(\gamma_1) + \varphi(C) + \varphi(\gamma_2),$$

где $\varphi(\gamma)$, $\varphi(\gamma_1)$, $\varphi(\gamma_2)$ — повороты соответствующих кривых справа (слева), а $\varphi(C)$ — угол сектора между кривыми γ_1 и γ_2 в точке C справа (слева).

Пусть γ — замкнутая кривая без самопересечений на выпуклой поверхности. Задав направление на кривой γ, будем различать ее правую и левую стороны. Правый (левый) поворот

кривой γ определяется как предел правых (левых) поворотов замкнутых ломаных γ_n, сходящихся к γ, и расположенных в правой (левой) полуокрестности кривой γ. Если на кривой γ есть точка C с определенными направлениями кривой γ в этой точке, то правый (левый) поворот γ можно определить как сумму правого (левого) поворота кривой, разрезанной в точке C, и угла сектора, образованного кривой γ в точке C справа (слева).

Имеет место следующая теорема, обобщающая известную теорему Гаусса — Боннэ для регулярных поверхностей.

Если кривая γ ограничивает гомеоморфную кругу область G с кривизной $\omega(G)$, и поворот кривой γ со стороны области G равен $\varphi(\gamma)$, то

$$\omega(G) + \varphi(\gamma) = 2\pi.$$

Для случая, когда кривая γ является ломаной, эта теорема является простым следствием формулы для выражения кривизны многоугольной области (§ 5). В общем случае она доказывается предельным переходом от многоугольных областей, вписанных в область G.

На основе этой теоремы доказывается важное свойство поворотов кривой. Именно, *сумма правого и левого поворотов кривой равна кривизне (площади сферического изображения) этой кривой с исключенными концами.*

Укажем некоторые часто используемые приложения понятия поворота кривой.

Область G на выпуклой поверхности называется *выпуклой областью*, если любые две ее внутренние точки соединяются кратчайшей, не выходящей за пределы области G. Оказывается, каждая дуга кривой, ограничивающей выпуклую область, имеет со стороны области неотрицательный поворот.

Область G на выпуклой поверхности называется выпуклой в себе, если любые две ее внутренние точки можно соединить кратчайшей кривой внутри области, не обязательно являющейся кратчайшей на всей поверхности. Оказывается, для того чтобы замкнутая область G на выпуклой поверхности, ограниченная кривой γ, была выпуклой в себе, необходимо и достаточно, чтобы каждая дуга кривой γ имела со стороны области неотрицательный поворот.

Понятие поворота позволяет выделить интересный во многих отношениях класс кривых, именуемых квазигеодезическими. Кривая γ на выпуклой поверхности называется *квазигеодезической*, если у нее правый и левый поворот на любом отрезке неотрицательны. Каждая геодезическая является квазигеодезической, так как у нее на любом отрезке правый и левый повороты равны нулю. Однако геодезические кривые не исчерпывают весь

класс квазигеодезических. Например, окружность основания прямого кругового конуса является квазигеодезической, но она не будет геодезической, так как ни на каком участке не является кратчайшей.

Отметим некоторые свойства квазигеодезических.

1. Предел квазигеодезических (в частности, геодезических) является квазигеодезической.

2. В смысле внутренней метрики всякая квазигеодезическая является пределом геодезических.

3. На всякой выпуклой поверхности в любом направлении можно провести квазигеодезическую, может быть, не единственную.

В связи с третьим свойством квазигеодезических заметим, что на общей выпуклой поверхности могут быть направления, в которых нельзя провести геодезической. Например, из точки ребра окружности основания прямого кругового конуса в направлении этого ребра нельзя провести геодезической.

Вопросу о квазигеодезических посвящена работа [56].

§ 9. Площадь выпуклой поверхности

Как известно из дифференциальной геометрии, площадь регулярной поверхности является объектом внутренней геометрии поверхности, т. е. определяется только метрикой поверхности. Поэтому естественно площадь общей выпуклой поверхности так же определить чисто внутренним образом. Такое определение площади дано А. Д. Александровым и состоит в следующем.

Пусть P — многоугольник на выпуклой поверхности. Подвергнем его достаточно мелкой триангуляции T_n так, чтобы стороны треугольников были меньше $1/n$. Сопоставим каждому треугольнику Δ этой триангуляции плоский треугольник Δ_0 с теми же сторонами и обозначим через S_n сумму площадей этих плоских треугольников. Оказывается, независимо от выбора триангуляций T_n многоугольника P сумма S_n при $n \to \infty$ стремится к определенному пределу S. Этот предел и принимается за площадь многоугольника P на поверхности.

После того как определена площадь многоугольника, площадь замкнутых, открытых и вообще борелевских множеств вводится обычными приемами теории меры.

Доказательство существования предела последовательности S_n основано на следующей лемме.

Пусть Δ — треугольник на выпуклой поверхности, d — его диаметр, $\omega(\Delta)$ — кривизна внутренней области, а S_0 — площадь плоского треугольника Δ^0 со сторонами той же длины. Тогда при всяком $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение T треугольника Δ на меньшие треугольники Δ_k, что сумма S_T площадей плоских

треугольников Δ_k^0 *со сторонами той же длины удовлетворяет неравенству*

$$-\varepsilon < S_T - S_0 < \frac{1}{2}\omega(\Delta) d^2 + \varepsilon.$$

Доказательство этой леммы в свою очередь опирается на следующую лемму, относящуюся уже к выпуклым многогранникам.

Пусть Δ — *треугольник на выпуклом многограннике или вообще в многообразии с многогранной метрикой положительной кривизны,* Δ_0 — *плоский треугольник со сторонами той же длины,* d — *диаметр треугольника* Δ, ω — *кривизна его внутренней области,* S и S_0 — *площади треугольников* Δ и Δ_0. *Тогда*

$$0 \leqslant S - S_0 \leqslant \frac{1}{2}\omega d^2.$$

Первая лемма доказывается путем перехода от данной выпуклой поверхности к многообразию с многогранной метрикой, склеенному из треугольников Δ_k^0, и надлежащим использованием второй леммы.

Доказательство второй леммы основано на том, что, разрезая треугольник Δ по кратчайшей γ, соединяющей две внутренние вершины, и вклеивая в этот разрез надлежащую пару равных треугольников, можно уменьшить число внутренних вершин, не изменив при этом общую кривизну и увеличив площадь. Эта операция позволяет свести дело к случаю одной внутренней вершины. А рассмотрение в этом случае совершенно элементарно.

На основании первой леммы устанавливается, что последовательность S_n, фигурирующая в определении площади, сходится в смысле Коши, т. е. $|S_n - S_m| \to 0$ при $m, n \to \infty$, а следовательно, имеет предел S. Более того, из этой леммы получается оценка приближения к площади многоугольника суммами S_n. Именно, имеет место следующая теорема.

Всякий многоугольник на выпуклой поверхности имеет определенную площадь. Пусть S — *площадь многоугольника* P, *а* ω — *кривизна его внутренней области. Тогда, если многоугольник* P *разбить на треугольники диаметра* $\leqslant d$, *то сумма* S_T *площадей соответствующих плоских треугольников со сторонами той же длины удовлетворяет неравенству*

$$0 \leqslant S - S_T \leqslant \frac{1}{2}\omega d^2.$$

Внешнегеометрический смысл площади устанавливается с помощью следующей теоремы о сходимости площадей.

Пусть выпуклые поверхности F_n *сходятся к выпуклой поверхности* F *и многоугольники* P_n *на поверхностях* F_n *сходятся*

к многоугольнику P на F, причем числа сторон многоугольников P_n не превосходят некоторого данного числа. Тогда площади P_n сходятся к площади P.

Эта теорема легко следует из предыдущей.

На основании теоремы о сходимости площадей получается, что площадь многоугольника P на выпуклой поверхности F равна пределу площадей сходящихся к P многоугольников P_n, расположенных на выпуклых многогранниках, сходящихся к поверхности F, при условии, что число сторон многоугольников остается ограниченным.

Отсюда следует, что принятое нами внутреннее определение площади выпуклой поверхности эквивалентно ее внешнему определению как предела площадей выпуклых многогранников, сходящихся к данной поверхности.

Из внешнего определения площади выпуклой поверхности получается формула для площади поверхности. Именно, если выпуклая поверхность F представима в прямоугольных декартовых координатах x, y, z уравнением $z=z(x, y)$ и не имеет опорных плоскостей, параллельных оси z, то площадь всякого многоугольника P на этой поверхности определяется известным интегралом

$$S(P)=\iint\limits_{P'}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy,$$

где интегрирование выполняется по проекции P' многоугольника на плоскость xy.

§ 10. Удельная кривизна выпуклой поверхности

Каждая область G на выпуклой поверхности имеет определенную площадь $S(G)$ и кривизну $\omega(G)$. Отношение

$$\varkappa(G)=\frac{\omega(G)}{S(G)}$$

называется *удельной кривизной* области G. Если для всех областей G на выпуклой поверхности удельная кривизна ограничена некоторой постоянной, то такая поверхность называется *поверхностью ограниченной кривизны.*

Свойство поверхности иметь ограниченную удельную кривизну сохраняется при переходе к пределу. Именно, имеет место следующая теорема.

Если последовательность выпуклых поверхностей F_n с равномерно ограниченными удельными кривизнами сходится к поверхности F, то эта поверхность является поверхностью ограниченной кривизны.

Доказательство основано на теоремах сходимости площадей и кривизн сходящейся последовательности выпуклых поверхностей.

Удельная кривизна выпуклой поверхности в точке X, т. е. предел $\varkappa(G)$, когда область G стягивается к точке X, называется *гауссовой кривизной поверхности* в этой точке. Легко доказывается, что если гауссова кривизна существует в каждой точке поверхности, то она непрерывна.

Поверхности ограниченной кривизны обладают рядом свойств регулярных выпуклых поверхностей. В частности, из каждой точки выпуклой поверхности ограниченной кривизны в любом направлении можно провести кратчайшую на расстояние, зависящее только от удельной кривизны поверхности.

Доказательство простое. Дело в том, что если утверждение неверно, то должны существовать сколь угодно малые двуугольники с вершиной в данной точке. Для площади такого двуугольника Δ имеет место оценка (§ 9)

$$S \leqslant \frac{1}{2}\omega d^2,$$

где ω — кривизна, а d — диаметр двуугольника. Отсюда

$$\varkappa(\Delta) = \frac{\omega}{S} \geqslant \frac{2}{d^2},$$

и следовательно, удельная кривизна неограниченно растет, когда d убывает.

Существование кратчайшей из данной точки по любому направлению на длину $r_0 > 0$ позволяет ввести в окрестности этой точки полярные координаты r, ϑ. Если, кроме того, поверхность имеет определенную гауссову кривизну в каждой точке, то метрику поверхности в параметризованной окрестности можно задать линейным элементом

$$ds^2 = dr^2 + G(r, \vartheta)\, d\vartheta^2,$$

где коэффициент G является непрерывной дважды дифференцируемой по r функцией. Связь между этим коэффициентом и гауссовой кривизной поверхности устанавливается известной формулой

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}(\sqrt{G})_{rr}.$$

Если гауссова кривизна поверхности постоянна и больше нуля, то, как легко видеть, коэффициент G, удовлетворяя уравнению

$$(\sqrt{G})_{rr} + K\sqrt{G} = 0,$$

должен иметь вид

$$\sqrt{G}=\frac{1}{\sqrt{K}}\sin\sqrt{K}r.$$

Следовательно, такая поверхность локально изометрична сфере радиуса $1/\sqrt{K}$.

Если в треугольнике $\triangle$ на выпуклой поверхности удельная кривизна $\geqslant K$ ($\leqslant K$), то его углы не меньше (не больше) соответствующих углов треугольника $\triangle_K$ с теми же сторонами на сфере радиуса $1/\sqrt{K}$.

Если в треугольнике $\triangle$ на выпуклой поверхности удельная кривизна $\geqslant K$ ($\leqslant K$), то площадь S этого треугольника не меньше (не больше) площади треугольника Δ_K с теми же сторонами на сфере радиуса $1/\sqrt{K}$. Более того, имеют место оценки:

$$0\leqslant S(\triangle)-S(\triangle_K)\leqslant\frac{1}{2}(\omega(\triangle)-\omega(\triangle_K))\,d^2,$$

если в треугольнике $\triangle$ удельная кривизна $\geqslant K$, и

$$0\geqslant S(\triangle)-S(\triangle_K)\geqslant\frac{1}{2}(\omega(\triangle)-\omega(\triangle_K))\,d^2,$$

если в треугольнике $\triangle$ удельная кривизна $\leqslant K$.

Пусть γ_1 и γ_2 — две кратчайшие, исходящие из точки O на выпуклой поверхности. Пусть X_1 и X_2 — переменные точки на γ_1 и γ_2, $\rho(O, X_1)=x$, $\rho(O, X_2)=y$, $\rho(X_1, X_2)=z$ и $\alpha(x, y)$ — угол в треугольнике со сторонами x, y, z, противолежащий стороне z, на сфере S_K радиуса $1/\sqrt{K}$. Говорят, что метрика ρ поверхности удовлетворяет условию K-выпуклости, или является *K-выпуклой*, если для любых кратчайших γ_1 и γ_2 угол $\alpha(x, y)$ есть невозрастающая функция во всяком таком интервале $0<x<x_0$, $0<y<y_0$, в котором существует кратчайшая X_1X_2. Говорят, что метрика ρ удовлетворяет условию K-вогнутости, или является *K-вогнутой*, если $\alpha(x, y)$ является неубывающей функцией по x, y в таком же интервале. Имеет место следующая теорема.

Если на выпуклой поверхности удельная кривизна $\geqslant K$ ($\leqslant K$), то на этой поверхности выполняется условие K-выпуклости (K-вогнутости).

Точки выпуклой поверхности могут быть трех родов: конические, где касательный конус не вырождается и, следовательно, полный угол меньше 2π, ребристые — с касательным конусом, вырождающимся в двугранный угол, и плоские, где касательный конус вырождается в плоскость. Очевидно, на поверхности ограниченной кривизны не может быть конических точек, так

как в таких точках удельная кривизна равна бесконечности. Ребристые же точки могут быть и на поверхности ограниченной кривизны. Однако имеет место следующая теорема.

Если на выпуклой поверхности удельная кривизна любой достаточно малой области, содержащей точку A, не превосходит какого-нибудь постоянного числа, то точка A либо гладкая, либо через нее проходит прямолинейное ребро поверхности.

Отсюда как следствие получается, что замкнутая выпуклая поверхность ограниченной кривизны гладкая. Бесконечная полная выпуклая поверхность ограниченной кривизны, в любой конечной части не являющаяся цилиндром, гладкая.

Если через точку A выпуклой поверхности проходит прямолинейный отрезок, то на поверхности имеются сколь угодно малые области, содержащие точку A и имеющие сколь угодно малую удельную кривизну.

Следовательно, если удельная кривизна выпуклой поверхности заключена в положительных пределах для всех областей на поверхности, то такая поверхность гладкая. Доказательство двух последних теорем мы воспроизведем в главе второй.

§ 11. Теорема о склеивании. Другие теоремы существования

Теорема «о склеивании», о которой будет идти речь, позволяет из данных многообразий с внутренней метрикой и положительной кривизной путем отождествления (склеивания) границ снова получать многообразия с положительной кривизной. Эта теорема имеет многочисленные важные приложения и состоит в следующем.

Пусть $G_1, \ldots, G_n$ — замкнутые области в многообразиях с внутренней метрикой и положительной кривизной, ограниченные конечным числом кривых с ограниченной вариацией поворота. Пусть G — многообразие, составленное из областей G_k путем отождествления точек их границ таким образом, что выполняются следующие три условия:

1. *Отождествленные отрезки границ областей G_i и G_j имеют равные длины.*

2. *Сумма поворотов любых отождествленных отрезков границ областей G_i и G_j со стороны этих областей неотрицательна.*

3. *Сумма углов секторов в отождествленных точках областей $G_\alpha, \ldots, G_\beta$ со стороны этих областей не превосходит 2π.*

Тогда многообразие G имеет внутреннюю метрику положительной кривизны, совпадающую с метриками областей G_i в малых окрестностях соответствующих точек.

Поясним эту теорему. Прежде всего, в теореме идет речь о кривых ограниченной вариации поворота. Это значит, что если

какой-нибудь конечный отрезок γ такой кривой разбить точками A_k на отрезки γ_k, то

$$\sum_k (\varphi(\gamma_k) + \varphi(A_k)) < c(\gamma),$$

где постоянная $c(\gamma)$ не зависит от выбора точек A_k и их числа. Кривые ограниченной вариации поворота являются спрямляемыми. Поэтому можно говорить о длинах отождествляемых отрезков границ областей G_k.

В теореме утверждается, что многообразие G имеет внутреннюю метрику положительной кривизны, совпадающую с метриками многообразий G_k в малых окрестностях соответствующих точек. Метрика, о которой идет речь, определяется следующим образом. Две произвольные точки X и Y многообразия G соединяются всевозможными кривыми на G. Длина каждой такой кривой определяется как сумма длин ее частей, расположенных в областях G_k. Точная нижняя грань длин кривых принимается за расстояние между точками X и Y. Очевидно, определяемая так метрика будет внутренней, и она находится в вышеуказанном отношении к метрикам склеиваемых многообразий G_k. В доказательстве нуждается только утверждение о положительности кривизны этой метрики.

Теорема о склеивании очевидна для того случая, когда области G_k являются многоугольниками на многообразиях с многогранной выпуклой метрикой. В случае, когда области G_k являются многоугольниками на общих многообразиях с положительной кривизной, для доказательства теоремы многоугольники G_k разбиваются на мелкие треугольники Δ. Каждый из этих треугольников заменяется плоским треугольником Δ^0. Из плоских треугольников склеиваются многообразия G_k^0 с многогранной выпуклой метрикой. Наконец, из многообразий G_k^0 склеивается многообразие G^0. Условия теоремы о склеивании для многообразий G_k^0 оказываются выполненными. Теперь достаточно сделать предельный переход при условии неограниченного уменьшения треугольников Δ разбиения областей G_k. Доказательство теоремы о склеивании в общем случае основано на приближении областей G_k многоугольными и применении теоремы о склеивании для многоугольных областей.

Рассмотрим некоторые приложения теоремы о склеивании к доказательствам теорем о реализуемости абстрактно заданной выпуклой метрики.

Пусть G — гомеоморфная кругу выпуклая область в многообразии R с внутренней метрикой и положительной кривизной. Возьмем второй экземпляр области G, обозначив его G', и отождествим соответствующие точки кривых, ограничивающих эти

области. Это отождествление удовлетворяет условиям 1—3 теоремы о склеивании, так как отождествляемые отрезки границ имеют, очевидно, одинаковые длины и неотрицательные повороты (из-за выпуклости). По теореме о склеивании замкнутое многообразие $\bar{G}$, склеенное из областей G и G', будет иметь положительную кривизну. Согласно теореме § 7 это многообразие изометрично замкнутой выпуклой поверхности $\bar{F}$. Область F на поверхности $\bar{F}$, изометричная G, реализует метрику данного многообразия R в области G. Можно показать, что поверхность F имеет плоский край и однозначно проектируется на плоскость края, если поворот границы области G на любом отрезке больше нуля. Такая выпуклая поверхность называется *выпуклой шапкой.*

Так как каждая точка многообразия с внутренней метрикой и положительной кривизной имеет строго выпуклую окрестность, то каждое такое многообразие имеет окрестность, изометричную выпуклой шапке.

На основе теоремы о склеивании доказывается, что *всякая полная метрика положительной кривизны, заданная на плоскости, реализуется посредством бесконечной выпуклой поверхности.*

Доказательство этой теоремы достаточно просто и состоит в общих чертах в следующем. Возьмем на плоскости, где задана метрика, большой многоугольник P (многоугольник относительно заданной метрики). Пусть S — точка вне многоугольника. Построим петлю γ минимальной длины с узлом в точке S, охватывающую многоугольник P. Эта петля представляет собой ломаную, ограничивающую некоторый многоугольник $\bar{P}$, содержащий P. Все углы этого многоугольника, кроме, может быть, угла при вершине S, не больше π. Отождествим точки границы $\bar{P}$, равноудаленные от S (расстояния измеряются вдоль γ). При этом удовлетворяются условия теоремы о склеивании, и мы получаем из многоугольника $\bar{P}$ замкнутое многообразие с положительной кривизной. Это многообразие изометрично замкнутой выпуклой поверхности $\bar{F}$. Теперь остается сделать предельный переход при условии, что многоугольник P расширяется на всю плоскость.

На примере выпуклого конуса легко видеть, что полная метрика положительной кривизны, заданная на плоскости, может реализоваться бесконечной выпуклой поверхностью неоднозначно. С. П. Оловянишников доказал, что это имеет место всегда, если полная кривизна реализуемого многообразия меньше 2π. Именно, имеет место следующая теорема.

Пусть F — бесконечная полная выпуклая поверхность с полной кривизной $\omega<2\pi$ и γ — *бесконечная в одну сторону кривая на F, каждый отрезок которой является кратчайшей (такую кривую можно провести из любой точки на F). Пусть K — выпуклый*

конус с кривизной (площадью сферического изображения), равной полной кривизне ω поверхности F, и t — какая-либо образующая этого конуса. Тогда существуют две бесконечные выпуклые поверхности F_1 и F_2, изометричные F, имеющие конус K в качестве своего предельного конуса), и такие, что при их подобном сжатии в конус K линии γ_1 и γ_2, соответствующие γ, переходят в образующую t. Поверхности F_1 и F_2 отличаются ориентацией: если задано направление обхода на F_1, образующее с внешней нормалью правый винт, то соответствующее направление обхода на F_2 образует с внешней нормалью левый винт.*

Таким образом, реализуя полную метрику положительной кривизны бесконечной выпуклой поверхностью, мы можем произвольно задать предельный конус поверхности (лишь бы кривизна его была равна ω), и предельное направление t данного геодезического луча γ на поверхности конуса.

§ 12. Выпуклые поверхности в пространствах постоянной кривизны

Подобно тому как в евклидовом пространстве, теория выпуклых поверхностей может быть построена также в эллиптическом пространстве и пространстве Лобачевского, если под выпуклой поверхностью как и раньше понимать область на границе выпуклого тела. Выпуклое тело в пространстве Лобачевского определяется, как и в евклидовом пространстве. Именно, это тело, которое вместе с любыми двумя его точками содержит соединяющий их прямолинейный отрезок. Если пространство Лобачевского геодезически отобразить на внутренность евклидова шара (интерпретация Кели — Клейна), то выпуклые тела при этом будут изображаться евклидовскими выпуклыми телами.

Введение аналогичным образом понятия выпуклого тела в эллиптическом пространстве встречает затруднения из-за неоднозначности прямолинейного отрезка, соединяющего две данные точки. Это затруднение устраняется следующим образом. Выпуклое тело определяется как тело, для которого существует непересекающая его плоскость, и всякий отрезок, соединяющий две его произвольные точки и не пересекающий этой плоскости, принадлежит телу. Если эллиптическое пространство интерпретировать трехмерной сферой с попарно отождествленными диаметрально противоположными точками, то выпуклые тела

*) Предельным конусом поверхности F называется поверхность телесного конуса, который состоит из всех полупрямых, исходящих из данной точки X поверхности F и принадлежащих телу, ограниченному поверхностью F. Предельный конус определен однозначно с точностью до параллельного переноса, зависящего от выбора точки X.

будут изображаться выпуклыми множествами, расположенными на одной полусфере.

Так же как и в евклидовом пространстве, построение теории выпуклых поверхностей в пространствах постоянной кривизны (эллиптическом пространстве и пространстве Лобачевского) начинается с доказательства сходимости метрик сходящихся выпуклых поверхностей. Это позволяет затем изучать общие выпуклые поверхности путем приближения их выпуклыми многогранниками. В частности, первым шагом в этом направлении является доказательство свойства выпуклости метрики выпуклой поверхности. Для пространства кривизны K это свойство совпадает с рассмотренным в § 10 свойством K-выпуклости и состоит в следующем. Пусть из точки O на выпуклой поверхности в пространстве кривизны K исходят кратчайшие γ_1 и γ_2, X_1 и X_2 — точки на этих кратчайших. Построим плоский треугольник со сторонами $x=OX_1$, $y=OX_2$ и $z=X_1X_2$ на K-плоскости, т. е. на плоскости Лобачевского, если рассматривается поверхность в пространстве Лобачевского, или на эллиптической плоскости, если речь идет о поверхности в эллиптическом пространстве. Пусть $\alpha(x, y)$ — угол этого треугольника, противолежащий стороне, равной z. Тогда свойство выпуклости метрики состоит в том, что $\alpha(x, y)$ есть невозрастающая функция переменных x, y.

Из свойства выпуклости метрики выпуклой поверхности в пространстве R_K кривизны K выводятся различные следствия, аналогичные тем, которые получаются для метрики выпуклых поверхностей евклидова пространства. В частности, доказывается, что углы между сторонами треугольника на выпуклой поверхности в пространстве R_K не меньше соответствующих углов треугольника со сторонами той же длины на плоскости в R_K, т. е. на поверхности постоянной кривизны K. Отсюда следует, что в эллиптическом пространстве сумма углов треугольника на выпуклой поверхности всегда больше π. Таким образом, с точки зрения внутренней геометрии выпуклые поверхности в эллиптическом пространстве не представляют собой ничего нового в сравнении с выпуклыми поверхностями евклидова пространства. Каждая выпуклая поверхность эллиптического пространства локально изометрична некоторой выпуклой поверхности евклидова пространства.

Иначе обстоит дело с выпуклыми поверхностями в пространстве Лобачевского. В этом пространстве существуют выпуклые поверхности, не изометричные выпуклым поверхностям евклидова пространства даже в малом. Такова, например, плоскость Лобачевского. Она имеет отрицательную кривизну и поэтому не может быть изометрична выпуклой поверхности евклидова пространства, гауссова кривизна которой, если она существует,

всегда неотрицательна. Пространство Лобачевского отличается бо́льшим разнообразием топологических типов полных выпуклых поверхностей. Именно, для всякой области на сфере существует гомеоморфная ей полная выпуклая поверхность.

После того как доказано свойство выпуклости метрики выпуклой поверхности в пространстве R_K, дальнейшее развитие теории идет так же, как и для выпуклых поверхностей евклидова пространства. Именно, изучаются свойства угла между кратчайшими, вводится понятие угла сектора, ограниченного кратчайшими, выясняется внешнегеометрический смысл угла.

Для выпуклых поверхностей в пространстве постоянной кривизны K теория кривизны и площади развивается так же, как и для поверхностей евклидова пространства. Разница только в том, что теория кривизны строится от начала и до конца, т. е. до установления ее полной аддитивности, чисто внутренними средствами.

Понятие внешней кривизны для выпуклых поверхностей в пространстве постоянной кривизны K вводится следующим образом. Поверхность разбивается на малые области G_i. В каждой из областей G_i берется точка P_i. Внешние нормали поверхности в точках области G_i переносятся параллельно в смысле Леви-Чивита в точку P_i по прямолинейным путям. При этом они заполняют некоторый телесный угол $\psi(G_i)$. Внешняя кривизна поверхности определяется как $\lim \sum \psi(G_i)$ при условии, что разбиение поверхности на области G_i неограниченно измельчается. Оказывается, этот предел всегда существует и не зависит от способа разбиения поверхности на области G_i.

Связь между внешней, внутренней кривизной и площадью поверхности устанавливается обобщенной теоремой Гаусса. Если G — область на выпуклой поверхности в пространстве постоянной кривизны K, $\omega(G)$ — ее внутренняя кривизна, $\psi(G)$ — внешняя кривизна и $S(G)$ — площадь, то

$$\psi(G)+KS(G)=\omega(G).$$

Учение о повороте и направлении кривой, развитое для кривых на выпуклых поверхностях евклидова пространства, переносится без изменений на выпуклые поверхности в пространствах постоянной кривизны.

В пространствах постоянной кривизны имеют место теоремы о реализуемости абстрактно заданной метрики выпуклой поверхностью, аналогичные соответствующим теоремам для евклидова пространства. Например:

1. *Метрика кривизны $\geqslant K$, заданная на сфере, реализуется в пространстве постоянной кривизны K посредством замкнутой выпуклой поверхности.*

Условие, что метрика имеет кривизну $\geqslant K$, означает, что для любого достаточно малого треугольника в многообразии, где задана метрика, сумма нижних углов больше суммы углов треугольника со сторонами той же длины на K-плоскости.

2. *В многообразии с метрикой кривизны $\geqslant K$ всякая точка имеет окрестность, изометричную выпуклой поверхности в R_K.*

3. *В случае $K<0$ полная метрика кривизны $\geqslant K$, заданная в какой бы то ни было области на сфере, реализуется полной выпуклой поверхностью в пространстве Лобачевского кривизны K.*

§ 13. Многообразия ограниченной кривизны

Многообразия ограниченной кривизны представляют собой естественное обобщение двумерных римановых многообразий. Они находятся в таком же отношении к многообразиям положительной кривизны (§ 3), как общие римановы многообразия к римановым многообразиям с положительной гауссовой кривизной. Теория многообразий ограниченной кривизны построена А. Д. Александровым. Ему принадлежат определения основных понятий для этих многообразий и основные результаты. Систематическое изложение теории многообразий ограниченной кривизны содержится в монографии А. Д. Александрова и В. А. Залгаллера [17]. При всей общности многообразий ограниченной кривизны для них сохраняются многие понятия теории регулярных поверхностей. Таковы понятия геодезической, угла между геодезическими, исходящими из общей точки, площадь и интегральная кривизна любого компактного множества.

Пусть R — метрическое многообразие с метрикой ρ (т. е. метрическое пространство, являющееся многообразием). Для кривых в R можно определить понятие *длины кривой*. Именно, для кривой $x(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, длина определяется как

$$\sup \sum_s \rho(x(t_{s-1}),\ x(t_s)), \qquad a = t_0 < t_1 < t_2 \ldots < t_n = b.$$

Метрика ρ в многообразии R называется *внутренней*, если для любых двух точек X, Y из R расстояние $\rho(X, Y)$ между ними совпадает с точной нижней гранью длин кривых в R, соединяющих эти точки. Первое условие, которым выделяются многообразия ограниченной кривизны, состоит в том, что *R есть двумерное многообразие с внутренней метрикой.*

Кривая γ в многообразии R с внутренней метрикой называется *кратчайшей*, если она имеет наименьшую длину среди всех кривых в R, соединяющих ее концы. *Геодезическая* определяется как кривая, кратчайшая на каждом достаточно малом отрезке. Это надо понимать так, что каждая точка геодезиче-

ской имеет окрестность, являющуюся кратчайшей. Для кратчайших в многообразии R с внутренней метрикой доказываются следующие свойства:

1. Для каждой точки A и ее окрестности U существует такая окрестность $V \subset U$, что любые две точки из V соединяются кратчайшей в R, принадлежащей окрестности U.

2. Кратчайшая гомеоморфна прямолинейному отрезку, и, следовательно, в окрестности каждой ее внутренней точки можно различать две ее стороны (при заданном направлении обхода кратчайшей) — правую и левую.

3. Длина кратчайшей равна расстоянию между ее концами.

4. Пусть G — область в R. Назовем $\rho_G(X, Y)$ точную нижнюю грань длин кривых, соединяющих точки X, Y в G. Тогда ρ_G удовлетворяет аксиомам метрического пространства. Говорят, что метрика ρ_G индуцируется метрикой ρ в G. Доказывается, что у каждой точки области G имеется окрестность, где ρ_G совпадает с ρ.

Треугольником ABC называется замкнутое множество, ограниченное в гомеоморфной кругу области тремя кратчайшими, попарно соединяющими точки A, B, C. Эти точки называются вершинами треугольника, а кратчайшие — его сторонами. Говорят, что два треугольника не перекрываются, если их общая часть не содержит никакого треугольника, не вырождающегося в кратчайшую, и никакая сторона одного не пересекает сторону другого. При этом две кратчайшие называются пересекающимися, если они имеют общую внутреннюю точку, и одна из них имеет точки по разные стороны от другой. Треугольник в смысле данного определения может не иметь внутренних точек даже тогда, когда его вершины не лежат на одной кратчайшей.

Пусть из точки O многообразия R исходят две кривые γ_1 и γ_2. Возьмем на них точки A_1, A_2 и построим на плоскости треугольник со сторонами $\rho(O, A_1)$, $\rho(O, A_2)$, $\rho(A_1, A_2)$. Пусть $\alpha(A_1, A_2)$ — угол этого треугольника, противолежащий стороне $\rho(A_1, A_2)$. Верхним углом между кривыми γ_1 и γ_2 в точке O называется верхний предел угла $\alpha(A_1, A_2)$, когда $A_1, A_2 \to O$, т. е. $\rho(O, A_1) \to 0$, $\rho(O, A_2) \to 0$. Верхний угол между кривыми всегда существует. Просто угол между кривыми γ_1, γ_2 в точке O определяется обычным пределом угла $\alpha(A_1, A_2)$ при том же условии $A_1, A_2 \to O$. В отличие от верхнего угла обычный угол между кривыми может не существовать. *Верхним углом* $\underline{\alpha}$ треугольника A, B, C в вершине A называется верхний угол между кратчайшими AB и AC. *Избытком углов* треугольника ABC называется величина $\omega = \overline{\alpha} + \overline{\beta} + \overline{\gamma} - \pi$, где $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$ — верхние углы треугольника.

Второе и последнее условие, которым выделяются многообразия ограниченной кривизны, состоит в том, что

Для всякой компактной области G существует такое число $\nu(G)$, что для всякой конечной совокупности попарно неперекрывающихся треугольников T_i сумма абсолютных величин их избытков удовлетворяет неравенству

$$\Sigma|\bar{\omega}(T_i)| \leqslant \nu(G).$$

В. А. Залгаллер показал, что выполнения этого неравенства достаточно потребовать только для систем невырожденных (гомеоморфных кругу) неперекрывающихся треугольников.

Простейшим примером многообразий ограниченной кривизны являются многообразия с многогранной метрикой и римановы многообразия. Многообразие с многогранной метрикой определяется тем условием, что у него каждая точка имеет окрестность, изометричную конусу, в частности изометричную плоскости. Если определить кривизну в вершине A многообразия с многогранной метрикой равенством $\omega(A)=\pi-\vartheta$, где ϑ — полный угол в вершине конуса, изометричного окрестности точки A, то величина $\nu(G)=\Sigma|\pi-\vartheta_i|$, где суммирование ведется по всем вершинам A_i, принадлежащим G. В случае риманова многообразия величина $\nu(G)$ совпадает с интегралом от модуля гауссовой кривизны по площади поверхности.

Наряду с данным выше аксиометрическим определением многообразий ограниченной кривизны им можно дать другое, удобное для исследования конструктивное определение. Это определение вытекает из следующей теоремы.

Двумерное многообразие R с внутренней метрикой ρ является многообразием ограниченной кривизны тогда и только тогда, когда во всякой компактной области $G \subset R$ индуцированная в ней метрика ρ_G допускает равномерное приближение многогранными или римановыми метриками, у которых абсолютные кривизны в G ограничены в совокупности.

Благодаря этой теореме многообразия ограниченной кривизны можно исследовать путем приближения многогранниками и римановыми многообразиями.

Пусть G — открытое множество в R. Тогда положительная часть кривизны G (обозначается $\omega^+(G)$) определяется как точная верхняя грань сумм положительных избытков попарно неперекрывающихся треугольников, содержащихся в G. Аналогично, отрицательная часть кривизны G определяется как точная нижняя грань, взятая с обратным знаком, для сумм отрицательных избытков треугольников, содержащихся в G (обозначается $\omega^-(G)$). Для любого множества M

$$\omega^+(M)=\inf_{G\supset M}\omega^+(G), \qquad \omega^-(M)=\inf_{G\supset M}\omega^-(G).$$

Доказывается, что функции множеств ω^+ и ω^- имеют конечные значения для любых компактных множеств, неотрицательны и вполне аддитивны на кольце борелевских множеств.

Кривизной множества M называется разность $\omega^+(M) - \omega^-(M)$, а *абсолютной кривизной* — сумма $\omega^+(M)+\omega^-(M)$. Если избыток каждого треугольника равен нулю, то многообразие локально изометрично евклидовой плоскости, т. е. каждая точка имеет окрестность, изометричную плоской области.

Доказательство всех сформулированных выше утверждений существенно опирается на следующую лемму.

Всякое компактное множество M в многообразии с внутренней метрикой при любом $\varepsilon>0$ допускает покрытие конечным числом попарно неперекрывающихся треугольников диаметра меньше ε.

Для многообразий ограниченной кривизны вводится понятие *площади*. В случае многоугольников, т. е. областей, ограниченных геодезическими ломаными, это понятие вводится следующим образом. Многоугольник P разбивается на треугольники Δ_k достаточно малого диаметра. Возможность такого разбиения гарантируется указанной леммой. Для каждого треугольника Δ_k строится плоский треугольник с теми же сторонами и берется сумма площадей плоских треугольников. Доказывается, что при стремлении к нулю диаметров треугольников Δ_k сумма стремится к определенному пределу. Этот предел и называется площадью многоугольника P. Понятие площади для любого множества M вводится обычным приемом, после того как это понятие определено для многоугольников. Для случая многообразий с многогранной метрикой и римановых многообразий описанная конструкция приводит к обычной площади.

Для многообразий ограниченной кривизны строится теория кривых, подобно тому как она строилась для многообразий с выпуклой метрикой. Сначала вводится понятие направления кривой в данной точке. По определению, кривая γ, исходящая из точки O, имеет в этой точке определенное направление, если она сама с собой в этой точке образует определенный угол, очевидно, равный нулю. Кратчайшая, исходящая из точки O, заведомо имеет определенное направление в этой точке. Далее доказывается следующая теорема.

Для того чтобы две кривые, исходящие из точки O, образовали в этой точке определенный угол в смысле данного выше определения, необходимо и достаточно, чтобы каждая из них в точке O имела определенное направление. Кратчайшие, исходящие из одной точки, всегда образуют определенный угол в этой точке.

Две кривые, исходящие из точки O в различных направлениях, разбивают окрестность точки O на два сектора. *Углом*

сектора называется точная верхняя грань углов между последовательными непересекающимися кривыми, разбивающими сектор. Углы секторов складываются, как обычно. Именно, если кривая γ проходит внутри сектора V, ограниченного кривыми γ_1, γ_2, и V_1, V_2 — секторы, ограниченные кривыми γ_1, γ и γ, γ_2, то угол сектора V равен сумме углов секторов V_1 и V_2. Если окрестность точки A разбивается кривыми γ_1 и γ_2 на два сектора, то сумма углов этих секторов не зависит от кривых γ_1, γ_2 и в сумме с кривизной многообразия в точке A дает 2π.

Для кривых на многообразии ограниченной кривизны вводится понятие *поворота*, обобщающее понятие интегральной геодезической кривизны кривой на римановом многообразии. Это понятие вводится следующим образом. Пусть γ — простая кривая, соединяющая точки A, B и имеющая определенные направления в этих точках. У кривой γ можно различать две стороны (например, правую и левую). Соединим точки A и B простой ломаной $\bar{\gamma}$ (звенья ломаной кратчайшие) в правой полуокрестности кривой γ. Пусть α и β — углы, образованные начальным и конечным звеньями ломаной с кривой γ со стороны области G, ограниченной кривой γ и ломаной $\bar{\gamma}$, ϑ_i — углы в вершинах ломаной тоже со стороны G. Тогда правый поворот кривой γ определяется как предел выражения

$$\alpha + \beta + \sum_i (\pi - \vartheta_i)$$

при условии, что ломаная $\bar{\gamma}$ сходится к кривой γ, оставаясь справа от γ. Левый поворот кривой γ определяется аналогично (ломаная $\bar{\gamma}$ берется в левой полуокрестности кривой γ). Доказывается, что простая кривая с определенным направлением на концах всегда имеет правый и левый повороты в смысле данного определения. Кратчайшая всегда имеет определенные правый и левый повороты, однако, в отличие от выпуклых поверхностей, поворот может быть отличен от нуля, но неположителен. Правый и левый повороты кривой связаны с кривизной многообразия вдоль кривой. Именно, сумма правого и левого поворотов кривой равна кривизне многообразия на множестве внутренних точек кривой.

Подобно тому как для многообразий с выпуклой метрикой, вводится понятие поворота для замкнутой простой кривой. Доказывается теорема, обобщающая теорему Гаусса — Боннэ для регулярных поверхностей. Именно, *сумма кривизны гомеоморфной кругу области G и поворота ограничивающей ее кривой γ со стороны G равна 2π.*

Ю. Г. Решетняк в цикле работ [69] развивает аналитические методы исследования многообразий ограниченной кривизны.

В частности, он доказал возможность введения изотермических координат в многообразиях ограниченной кривизны и вывел формулу для линейного элемента многообразия в этих координатах.

Пусть в области G комплексного переменного z задана произвольная неотрицательная, измеримая по Борелю функция $\lambda(z)$. С помощью этой функции в G вводится метрика s_λ путем сопоставления каждой паре точек z_1 и z_2 числа

$$\rho_\lambda(z_1, z_2) = \inf_\gamma \int_\gamma \sqrt{\lambda}\,|ds|,$$

где интегрирование выполняется по дуге s кривой γ, соединяющей точки z_1 и z_2, а inf берется по всем спрямляемым кривым γ. Относительно введенной таким образом метрики говорят, что она задается линейным элементом

$$ds^2 = \lambda(z)\,|dz|^2.$$

Метрика s_λ называется *субгармонической*, если функция $\lambda(z)$ допускает представление

$$\lambda(z) = \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_G\int \ln\left|\frac{1}{z-\zeta}\right|\omega(dE_\zeta) + h(z)\right\},$$

где ω — вполне аддитивная функция множеств в G, $h(z)$ — гармоническая функция, а интеграл берется в смысле Лебега — Стильтьеса.

Доказывается, что *всякое двумерное многообразие с субгармонической метрикой является многообразием ограниченной кривизны, причем функция множеств ω имеет простой геометрический смысл — это кривизна многообразия. Обратно, всякое многообразие ограниченной кривизны локально изометрично многообразию с субгармонической метрикой.*

Глава II

Регулярность выпуклых поверхностей с регулярной метрикой

Одним из самых сильных средств исследования изгибаний выпуклых поверхностей является метод склеивания, основанный на следующей теореме (так называемой «теореме о склеивании»), принадлежащей А. Д. Александрову (§ 11, гл. I).

Пусть F_1 и F_2 — две выпуклые поверхности, гомеоморфные кругу, ограниченные кривыми γ_1 и γ_2 одинаковой длины. Пусть между кривыми γ_1 и γ_2 установлено точечное соответствие, сохраняющее длины дуг этих кривых, и в соответствующих точках сумма геодезических кривизн кривых γ_1 и γ_2 на поверхностях F_1 и F_2 неотрицательна. Тогда существует замкнутая выпуклая поверхность F, состоящая из двух частей, одна из которых изометрична F_1, а другая F_2.

Покажем, например, как с помощью этой теоремы может быть доказана изгибаемость сферического сегмента. Если сегмент меньше полусферы, то он, очевидно, изгибаем, так как полусфера изгибается в веретенообразную поверхность вращения. Если же сегмент больше полусферы, то возможность его изгибаний становится далеко не очевидной. Известно, например, что Либман, впервые доказавший неизгибаемость замкнутых регулярных поверхностей, некоторое время был убежден в неизгибаемости сферического сегмента, большего полусферы, и даже опубликовал соответствующее «доказательство».

Теорема о склеивании позволяет решить поставленный вопрос об изгибании сферического сегмента совсем просто. Представим себе, что круг, дополняющий сегмент до замкнутой выпуклой поверхности, деформируется в эллипс, близкий к этому кругу, но так, что длина эллипса все время равна длине окружности круга. Поскольку эллипс мало отличается от круга, а для круга и сегмента условия теоремы о склеивании выполнены с избытком (сумма геодезической кривизны края сегмента и кривизны окружности круга существенно положительна), то они выполнены так же для эллипса и сегмента. Полученная в результате склеивания эллипса и сегмента замкнутая выпуклая поверхность содержит область, изометричную сегменту, но не равную ему, так как точки края сегмента, подклеиваемые к концам малой оси эллипса, заведомо сближаются.

С точки зрения классической теории поверхностей, которая рассматривает только достаточно регулярные поверхности, дан-

ное выше доказательство изгибаемости сферического сегмента не вполне удовлетворительно, так как неизвестно, будет ли регулярной построенная нами изометричная сегменту выпуклая поверхность. Этим недостатком обладают все решения задач об изгибании регулярных выпуклых поверхностей, получаемые применением теоремы о склеивании.

Естественно, возникает следующая проблема [57, 58]: в какой степени регулярность внутренней метрики выпуклой поверхности предопределяет регулярность самой поверхности? Более подробно, пусть в некоторой параметризации u, v коэффициенты линейного элемента

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

выпуклой поверхности Φ являются достаточно регулярными функциями параметров u, v. Вопрос: что можно сказать о регулярности вектор-функции $r(u, v)$, задающей поверхность? Решение этой проблемы составляет основной результат настоящей главы.

Доказательство регулярности выпуклой поверхности с регулярной метрикой, которое мы предлагаем, довольно сложно. Оно опирается на глубокое изучение внешней геометрии общих выпуклых поверхностей и выпуклых поверхностей с регулярной метрикой. В связи с этим многие результаты, которые получаются на пути решения основной проблемы, представляют самостоятельный интерес. В этой связи следует особо отметить теоремы о геодезических И. М. Либермана (§ 1), теоремы А. Д. Александрова о гладкости и строгой выпуклости выпуклых поверхностей ограниченной удельной кривизны (§ 2), теоремы о нормальных кривизнах выпуклых поверхностей, априорные оценки нормальных кривизн и других геометрических характеристик регулярных поверхностей.

Теорема о регулярности выпуклой поверхности с регулярной метрикой в соединении с теоремами о реализуемости выпуклых метрик (А. Д. Александров) позволяет получить теоремы о реализуемости регулярных метрик с положительной гауссовой кривизной регулярными поверхностями. Таким образом, эти результаты становятся достоянием классической теории поверхностей. Их аналитическое истолкование приводит к общим теоремам о разрешимости краевых задач для уравнения изгибания (уравнения Дарбу).

§ 1. Внешнегеометрические свойства геодезических линий на выпуклой поверхности

Геодезические, в частности кратчайшие, будут одним из основных элементов наших геометрических построений на выпуклых поверхностях. В связи с этим в настоящем параграфе мы изучим основные внешнегеометрические свойства геодезических,

т. е. их свойства как кривых в пространстве. Внутреннегеометрические свойства этих замечательных кривых рассмотрены в § 2 гл. I. Начнем наше изложение одной теоремой Буземана и Феллера [25]. Применение этой теоремы является существенным пунктом многих доказательств.

Теорема 1. *Пусть F — полная выпуклая поверхность, ограничивающая тело K, и γ — кривая, расположенная вне тела K и соединяющая точки X и Y поверхности F.*

Тогда длина l_γ кривой γ не меньше расстояния $\rho_F(X, Y)$ между ее концами на поверхности, причем заведомо больше этого расстояния, если кривая не лежит целиком на поверхности.

Доказательство. Если кривая γ не лежит целиком на поверхности F, то существует кривая $\bar{\gamma}$, соединяющая точки X и Y, тоже расположенная вне тела K и с длиной, меньшей длины кривой γ.

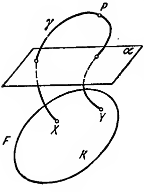

Рис. 8.

Действительно, пусть P — точка кривой γ, не лежащая на поверхности F. Проведем плоскость α, отделяющую точку P от поверхности F (рис. 8). Пусть γ_P — связная часть кривой γ, содержащая точку P и с концами на плоскости α. Заменим отрезок γ_P кривой γ его проекцией на плоскость α. Тогда получим кривую $\bar{\gamma}$, обладающую свойствами кривой γ, но заведомо меньшей длины.

Пусть l_0 — точная нижняя грань длин кривых, соединяющих точки X и Y вне тела K. Очевидно, существует последовательность таких кривых γ_n, по длине сходящихся к l_0. Не ограничивая общности, можно считать эту последовательность сходящейся к некоторой кривой γ_0. Кривая γ_0 лежит на поверхности F, так как в противном случае ее длину (l_0) можно уменьшить, что невозможно по определению l_0. Так как всякая кривая на поверхности имеет длину, не меньшую расстояния между ее концами, то длина γ_0 не меньше $\rho(X, Y)$. Тем более длина кривой γ не меньше $\rho(X, Y)$. Если кривая γ не лежит целиком на поверхности, то, как показано выше, ее длину можно уменьшить и, следовательно, в этом случае длина γ строго больше расстояния между ее концами $\rho(X, Y)$. Теорема доказана полностью.

С помощью теоремы Буземана, так мы будем называть теорему 1, легко доказывается следующая теорема о кратчайших на поверхности выпуклой шапки. Напомним, что выпуклой шап-

кой называется выпуклая поверхность с плоским краем, однозначно проектирующаяся на плоскость края.

Теорема 2. *Любые две точки выпуклой шапки можно соединить кратчайшей.*

Доказательство. Дополним выпуклую шапку ω до полной выпуклой поверхности полуцилиндром (рис. 9). Пусть X и Y — две произвольные точки шапки ω. На поверхности, составленной из шапки ω и полуцилиндра, их можно соединить кратчайшей γ.

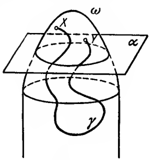

Рис. 9.

Проведем плоскость α, параллельную основанию шапки и отделяющую точки X и Y от края шапки. Если утверждение теоремы неверно, то кривая γ должна пересекать плоскость α. Но тогда ее можно укоротить, заменив часть кривой, расположенную под плоскостью α (со стороны основания шапки), ее проекцией на эту плоскость. А это противоречит теореме Буземана в применении ее к укороченной кривой. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть X_0 — фиксированная точка на выпуклой поверхности F, X — точка поверхности, близкая к X_0, $\rho(X)$ и $\delta(X)$ — расстояния между точками X и X_0 на поверхности и в пространстве соответственно. Тогда*

$$\rho(X)/\delta(X) \to 1,$$

когда точка X неограниченно приближается к точке X_0.

Доказательство. Допустим, утверждение теоремы неверно. Тогда существует последовательность точек X_n, сходящаяся к точке X_0, такая, что

$$\rho(X_n)/\delta(X_n) > \lambda > 1.$$

Обозначим F_n выпуклую поверхность, которая получается из F преобразованием подобия с центром X_0 и коэффициентом подобия $1/\delta(X_n)$. При $n \to \infty$ эта последовательность поверхностей сходится к касательному конусу K_0 поверхности F в точке X_0. Точке X_n поверхности F на поверхности F_n соответствует некоторая точка Y_n, пространственное расстояние которой от X_0 равно единице. При $n \to \infty$ точка Y_n неограниченно приближается к конусу K_0 (рис. 10).

Пусть g — полупрямая, исходящая из точки X_0, продолжение которой проходит внутрь тела, на границе которого расположена поверхность F. Сместим прямолинейный отрезок X_0Y_n

в направлеиии полупрямой g иа малое расстояиие ε в положение $X_0'Y_n'$. При достаточио большом n ломаиая $Y_nY_n'X_0'X_0$ расположеиа вне тела, иа граиице которого иаходится поверхность F_n. Поэтому расстояиие между точками X_0 и Y_n иа F_n, равное, очевидио, $\rho(X_n)/\delta(X_n)$, меньше $1+2\varepsilon$. Приияв $\varepsilon<(\lambda-1)/2$, получим $\rho(X_n)/\delta(X_n)\leqslant\lambda$ и, таким образом, приходим к противоречию. Теорема доказаиа.

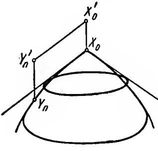

Рис. 10.

Осиовиым предложеиием о геодезических на выпуклой поверхности является теорема И. М. Либермана о выпуклости геодезической иа проектирующем ее цилиидре [45]. При всей простоте этого предложеиия из иего вытекают важные и многочисленные следствия, в целом дающие достаточно полную виешиюю характеристику геодезических лииий на выпуклой поверхиости. Вот эта теорема.

Теорема 4. *Пусть γ — геодезическая на выпуклой поверхности F, и g — полупрямая, образующая со всеми внешними нормалями поверхности вдоль геодезической углы, меньшие $\pi/2$. Тогда на цилиндре Z, проектирующем геодезическую γ в направлении g, кривая γ является выпуклой и обращена выпуклостью в направлении g* (рис. 11, *а*, *б*).

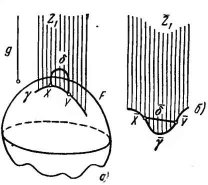

Рис. 11.

Доказательство. Прежде всего заметим, что теорему достаточио доказать для окрестиости произвольно взятой точки P на геодезической γ, так как выпуклость кривой в окрестности каждой ее точки в одном и том же направлеиии влечет за собой выпуклость в целом.

Пусть γ' — отрезок геодезической γ длииы ε, содержащий даиную точку P в качестве одиой из виутреиних точек. Если ε достаточио мало, то γ' будет кратчайшей, причем не только на поверхиости F, ио и иа полиой выпуклой поверхности, частью которой является F. Поэтому теорему достаточио доказать для случая, когда γ является кратчайшей на полной выпуклой поверхности.

Разверием цилиндр Z на плоскость (рис. 11, *б*). Полученную при этом полосу между двумя параллельными прямыми развертка $\bar{\gamma}$ кривой γ разбивает на две части $\bar{Z}_1$ и $\bar{Z}_2$, одна из которых, иапример $\bar{Z}_1$, соответствует части Z_1 цилиндра Z, расположеиной вие поверхности.

Допустим, теорема неверна. Тогда на кривой $\bar{\gamma}$ иайдется пара точек $\bar{X}$ и $\bar{Y}$, которые можно соединить прямолииейиым отрезком $\bar{\delta}$ в области $\bar{Z}_1$. Отрезку $\bar{\delta}$ на цилиндре Z соответствует кривая δ, соединяющая точки X и Y поверхности F и лежащая вие тела, ограииченного этой поверхностью. Согласно теореме Буземана длина этой кривой больше расстояния между точками X и Y иа F, которое совпадает с длииой отрезка XY геодезической γ. Таким образом, отрезок $\bar{X}\bar{Y}$ кривой $\bar{\gamma}$, равиый по длине отрезку XY кратчайшей γ, должен быть короче прямолииейиого отрезка $\bar{\delta}$ с концами $\bar{X}$ и $\bar{Y}$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Теорема Либермаиа позволяет выяснить дифференциальные свойства геодезической. Имеино, с ее помощью доказывается следующая теорема.

Теорема 5. *Геодезическая γ на выпуклой поверхности F имеет в каждой точке правую и левую полукасательные, непрерывные соответственно справа и слева.*

Доказательство. Пусть g_1, g_2, g_3 — три полупрямые, исходящие из точки X_0 геодезической γ внутрь тела, ограниченного поверхностью F. В малой окрестности точки X_0 внутренние нормали поверхности F вдоль геодезической образуют с полупрямыми g_i углы, меиьшие $\pi/2$.

Пусть e_i — единичные векторы, направленные вдоль полупрямых g_i, а $r(s)$ — вектор точки геодезической, соответствующей дуге s. Согласио теореме 4 Либермаиа каждая из векторфуикций $e_i r(s)$, рассматриваемая в окрестности точки X_0, является выпуклой, следовательно, имеет правую и левую производные, иепрерывные справа или слева соответствеиио. А так как

$$r(s) = \frac{(re_1)(e_2 \times e_3)}{(e_1 e_2 e_3)} + \frac{(re_2)(e_3 \times e_1)}{(e_2 e_3 e_1)} + \frac{(re_3)(e_1 \times e_2)}{(e_3 e_1 e_2)},$$

то этими свойствами обладает и функция $r(s)$. Отсюда следует существоваиие правой и левой полукасательных к геодезической γ с указаниыми свойствами непрерывности. Теорема доказаиа. Теорема 5 дополняется следующей теоремой.

Теорема 5а: *Геодезическая на выпуклой поверхности имеет почти везде, исключая, может быть, не более чем счетное множество точек, касательную, непрерывную на множестве тех точек, где она существует.*

Доказательство этой теоремы не отличается от доказательства теоремы 5. Оно основано на свойствах дифференцируемости выпуклых функций и данном выше представлении вектора точки геодезической $r(s)$ через выпуклые функции $(r(s)e_1)$, $(r(s)e_2)$, $(r(s)e_3)$.

Свойства непрерывности полукасательных вдоль геодезической на выпуклой поверхности уточняются следующей теоремой.

Теорема 6. *Если углы между внешними нормалями выпуклой поверхности вдоль геодезической с исключенными концами меньше $\vartheta<\pi/2$, то углы между правыми (левыми) полукасательными в любых двух точках этой геодезической не превосходят 2ϑ.*

Доказательство. Пусть точка X_2 на геодезической γ находится справа от X_1, t_1 — правая полукасательная геодезической γ в точке X_1 и n_1 — внешняя нормаль к опорной плоскости поверхности в этой точке. Проведем полупрямую g, образующую с полупрямыми t_1 и n_1 углы $\pi-\vartheta$ и $\pi/2-\vartheta$ соответственно. Так как внешние нормали поверхности вдоль геодезической γ образуют с полупрямой g углы, меньшие $\pi/2$, то условия теоремы Либермана для геодезической γ и полупрямой g выполнены. Из этой теоремы следует, что правая полукасательная t_2 в точке X_2 геодезической γ образует с полупрямой g угол не меньше $\pi-\vartheta$.

Так как обе полукасательные t_1 и t_2 образуют с полупрямой g углы, не меньшие $\pi-\vartheta$, то они образуют друг с другом угол не больше 2ϑ. Теорема доказана.

Теорема 6а. *Если углы между внешними нормалями выпуклой поверхности вдоль геодезической с исключенными концами меньше ϑ, то углы между правой и левой полукасательными в двух любых точках геодезической не меньше $\pi-2\vartheta$.*

Доказательство. Пусть речь идет о правой полукасательной τ_1 в точке X_1 и левой полукасательной τ_2 в точке X_2. Так как геодезическая имеет почти всюду касательную (теорема 5а), то существует последовательность точек A_n с касательными t_n в них, сходящаяся к точке X_1 справа. Пусть t'_n и t''_n — правая и левая полукасательные касательной t_n. По теореме 5 полукасательные t'_n сходятся к правой полукасательной τ_1 в точке X_1. После этого достаточно воспользоваться теоремой 6 в применении к полукасательным t''_n, τ_2 и перейти к пределу при $A_n\to X_1$. Как следствие теоремы 6а получается следующая теорема.

Теорема 7. *Если точка X геодезической на выпуклой поверхности является гладкой точкой поверхности, то эта точка является также гладкой точкой геодезической.*

Значит, на гладкой выпуклой поверхности любая геодезическая является гладкой кривой.

Теорема 8. *Пусть X и Y — две точки на выпуклой поверхности и γ — соединяющая их геодезическая. Тогда, если углы между внешними нормалями поверхности вдоль геодезической γ с исключенными концами не превосходят ϑ, то угол между полукасательной к геодезической в точке X и отрезком XY не больше 2ϑ.*

Доказательство. Пусть $r(s)$ — вектор точки вдоль геодезической в зависимости от дуги s. Так как производная $r'(s)$ почти везде существует, ограничена и $|r'(s)|=1$ (теорема 3), то

$$\overrightarrow{XY}=r(Y)-r(X)=\int\limits_{(X)}^{(Y)} r'(s)\,ds.$$

После этого достаточно заметить, что вектор $r'(X)$ образует с любым вектором $r'(s)$ угол, не больший 2ϑ, и утверждение теоремы становится очевидным.

С помощью теоремы 4 выясняется характер сходимости полукасательных сходящейся последовательности геодезических, именно, доказывается следующая важная теорема.

Теорема 9. *Пусть $F_1, F_2, \ldots$ — бесконечная последовательность выпуклых поверхностей, сходящаяся к выпуклой поверхности F, X_n — точка на поверхности F_n, γ_n — геодезическая на F_n, исходящая из точки X_n, и t_n — полукасательная геодезической γ_n в точке X_n.*

Пусть при $n\to\infty$ последовательность точек X_n сходится к точке X поверхности F, последовательность геодезических γ_n сходится к геодезической γ на F, и последовательность полукасательных t_n сходится к полупрямой t.

Пусть, наконец, t_0 — любая полупрямая, идущая из точки X внутрь тела, на границе которого расположена поверхность F. Тогда:

1) полупрямая t образует с полупрямой t_0 угол не меньший, чем угол между полукасательной геодезической γ в точке X с той же полупрямой t_0;

2) полупрямая t лежит в одной из опорных плоскостей поверхности F в точке X.

Доказательство. Прежде всего сделаем несколько замечаний о плоских выпуклых кривых, к рассмотрению которых с помощью теоремы Либермана сводится доказательство этой теоремы. Пусть в плоскости xy имеем выпуклую кривую C, задаваемую уравнением

$$y=f(x)$$

в декартовых координатах x, y. Кривая C имеет в каждой точке правую и левую полукасательные. Образуемые ими углы

с осями координат монотонно изменяются при движении вдоль кривой. Отсюда следует, что если координаты x и y точки кривой рассматривать как функции ее дуги s, то каждая из этих функций имеет монотонную правую и левую производные, а следовательно, сами функции $x(s)$ и $y(s)$ являются выпуклыми. Очевидно, кривая C задается любой из двух функций $x(s)$, $y(s)$.

Пусть мы имеем бесконечную последовательность выпуклых кривых C_n: $y=f_n(x)$, исходящих из начала координат O, обращенных выпуклостью в сторону $y<0$. Пусть при $n\to\infty$ эти кривые сходятся к выпуклой кривой C: $y=f(x)$. Каждой из кривых C_n, C соответствует пара функций $x_n(s)$ и $y_n(s)$, соответственно $x(s)$ и $y(s)$. Сходимость кривых C_n влечет за собой сходимость функций $x_n(s)$ и $y_n(s)$ к $x(s)$ и $y(s)$ соответственно. А из выпуклости и сходимости функций $x_n(s)$ получается

$$x'(0)\leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n'(0).$$

Это значит, что угол, образуемый полукасательной к предельной крнвой C в точке O с полуосью $y>0$, не больше нижнего предела углов, образуемых полукасательными кривых C_n с той же полуосью.

Обратнмся теперь к доказательству теоремы. Так как полупрямая t_0 направлена внутрь тела, ограниченного поверхностью F, то на некотором отрезке геодезической γ в окрестности точки X внутренние нормали поверхности вдоль этой геодезической образуют с направлением t_0 углы, меньше $\pi/2-\varepsilon$, где ε — малое положительное число. Не ограничивая общности, можно считать, что это выполнено вдоль всей геодезической γ. Прн достаточно большом n внутренние нормали поверхностей F_n вдоль геодезических γ_n будут образовывать с направлением t_0 углы, меньшие $\pi/2$.

Обозначим через Z_n цилиндр, проектирующий геодезическую γ_n в направлении t_0, а через Z — цнлнндр, проектнрующий геодезнческую γ в том же направленин. Развернем каждый цилиндр Z_n и Z на плоскость xy и расположим его так, чтобы направление проектирования t_0 совпадало с направлением полуоси $y>0$, точки X_n и X были совмещены с началом координат O, а разворачивание происходило бы на полуплоскость $x>0$. При таком разворачиванин геодезические γ_n переходят в выпуклые кривые C_n, обращенные выпуклостью в сторону $y<0$ и сходящиеся к выпуклой кривой C, в которую переходит геодезическая γ. По доказанному выше полукасательная кривой C в точке O образует с полуосью $y>0$ угол, не больший нижнего предела углов, образуемых полукасательными кривых C_n в точке O с той же полуосью $y>0$.

Допустим теперь, что теорема иеверна. Тогда найдутся геодезические γ_n со сколь угодно большими номерами n, такие, что для образуемых их полукасательными в точках X_n углов α с направлением t_0 будет $\alpha(t_n, t_0) < \alpha(t, t_0) - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Отсюда

$$\varlimsup_{n\to\infty} \alpha(t_n, t_0) < \alpha(t, t_0) - \varepsilon.$$

Но это противоречит свойству сходимости углов для плоских кривых C_n. Действительно, $\alpha(t_n, t_0)$ и $\alpha(t, t_0)$ совпадают с углами, которые образуют полукасательиые кривых C_n и C с полуосью $y > 0$, а по доказанному должно быть

$$\varliminf_{n\to\infty} \alpha(t_n, t_0) \geqslant \alpha(t, t_0).$$

То, что полупрямая t лежит в одной из опориых плоскостей поверхиости F, можио заключить следующим образом. Каждая полукасательная t_n лежит в некоторой опорной плоскости σ_n поверхности F_n. Из последовательности плоскостей σ_n можно выделить сходящуюся подпоследовательиость. Предельиая плоскость этой подпоследовательности содержит полупрямую t и является опориой для поверхиости F. Теорема доказана полностью. Из теоремы 9 вытекают два важных следствия.

1. *Если полупрямая t касается поверхности F, т. е. совпадает с одной из образующих касательных конуса поверхности F в точке X, то она является полукасательной кривой γ в этой точке.*

Действительно, в этом случае в качестве полупрямой t_0 можно взять полупрямую сколь угодио близкого к t направления. Отсюда следует, что полукасательиая к γ образует с t сколь угодно малый угол. А это может быть только в том случае, когда полупрямая t совпадает с полукасательиой.

2. *Если точка X является гладкой точкой поверхности F, то полупрямая t будет полукасательной геодезической γ.*

В самом деле, в точке X поверхность F имеет только одну опорную плоскость. Поэтому всякая полупрямая, исходящая из точки X и лежащая в этой плоскости, касается поверхности F в точке X. В частности, это отиосится к полупрямой t. После этого достаточио воспользоваться предыдущим следствием теоремы 9.

§ 2. Специальное разложение радиуса-вектора точки выпуклой поверхности в окрестности произвольной начальной точки

Простота исследования «в малом» регулярных поверхиостей связаиа с возможностью удобиого разложения радиуса-вектора точки поверхиости в окрестности произвольно взятой начальной точки. Сейчас мы получим аналогичное разложение для общих

выпуклых поверхностей без каких-либо предположений о регулярности.

Теорема 1. *Пусть F — общая выпуклая поверхность, X и Y — две точки на ней и γ — соединяющая их кратчайшая. Отложим на полукасательной к кратчайшей γ в точке X отрезок $X\bar{Y}$, равный длине кратчайшей γ.*

Тогда единичный вектор, имеющий направление $Y\bar{Y}$, принадлежит выпуклой оболочке сферического изображения кратчайшей γ с исключенными концами (рис. 12).

Доказательство. Рассмотрим сначала тот случай, когда поверхность F является выпуклым многогранником. В этом

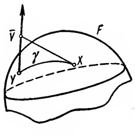

Рис. 12.

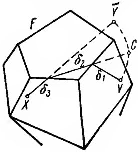

Рис. 13.

случае кратчайшая γ представляет собой ломаную, звенья которой лежат на гранях многогранника, а вершины на его ребрах. Обозначим $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ последовательные звенья ломаной γ при движении от Y к X, $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ — ребра многогранника, которые пересекает ломаная, $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}$ — углы многогранника при этих ребрах, наконец, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — грани многогранника, в которых лежат звенья $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ соответственно.

Подвергнем ломаную γ следующему преобразованию. Сначала повернем звено δ_1 вместе с гранью α_1, в которой оно лежит, на угол $\pi - \vartheta_1$ около ребра k_1. При этом звено δ_1 окажется на продолжении звена δ_2. Затем оба звена δ_1 и δ_2 повернем около ребра k_2 на угол $\pi - \vartheta_2$. Тогда оба звена δ_1 и δ_2 окажутся на продолжении звена δ_3 и т. д. После поворота около ребра k_{n-1} ломаная γ перейдет в прямолинейный отрезок $X\bar{Y}$ (рис. 13).

При описанной деформации ломаной γ ее конец Y движется по гладкой кривой, составленной из дуг окружностей, полукасательные к которым, проведенные в направлении $Y\bar{Y}$, параллельны и одинаково направлены с внешними нормалями к опорным плоскостям многогранника F вдоль кратчайшей γ. Отсюда очевидным образом следует, что единичный вектор направле-

ния $Y\overline{Y}$ принадлежит выпуклой оболочке кратчайшей γ с исключенными концамн.

Рассмотрим теперь общий случай. Возьмем на кратчайшей γ две точки X' и Y', близкне к точкам X и Y соответственно, н обозначим γ' отрезок кратчайшей, заключенный между нимн. По свойству неналегания кратчайших (§ 3 гл. I) γ' является единственной кратчайшей, соедняющей точки X' и Y'. Отложим на полукасательной к кратчайшей γ' в точке X' отрезок, равный длине этой кратчайшей, н обозначим $\overline{Y}'$ конец этого отрезка.

Построим последовательность выпуклых многогранников F^n, сходящихся к поверхности F, вписанных в эту поверхность, и содержащих точки X' и Y' в числе нх вершин. Такая последовательность многогранников строится без труда следующим образом. На поверхностн F берем достаточно густую сеть точек S_n, содержащую точкн X', Y', н образуем выпуклую оболочку Φ этого множества. Это будет выпуклый многогранник. Еслн поверхность F полная, то этот многогранннк н есть F^n. Если F — неполная поверхность, то F^n получается из Φ соответствующим вырезанием.

Соединим точки X' н Y' на многогранннке F^n кратчайшей γ'_n и построим точку $\overline{Y}'_n$ подобно тому, как для поверхности F и кратчайшей γ' была построена точка $\overline{Y}'$. Так как γ' является единственной кратчайшей, соединяющей точки X' и Y' на поверхности F, то при $n \to \infty$ кратчайшие γ'_n сходятся к γ'. Длнны кратчайших γ'_n всегда сходятся к длнне γ'. Полукасательные кратчайших γ'_n в точке X' сходятся к полукасательной γ' в этой же точке (следствие 1 теоремы 9, § 1). Отсюда следует, что точкн $\overline{Y}'_n$ сходятся к точке $\overline{Y}'$, а значит, направление вектора $Y'\overline{Y}'_n$ сходится к направленню вектора $Y'\overline{Y}'$.

Так как прн достаточно большом n сферннческое нзображение крнвой γ'_n попадает в сколь угодно малую окрестность сферического нзображения кривой γ', то, переходя к пределу прн $n \to \infty$, заключаем, что единичный вектор, имеющий направление $Y'\overline{Y}'$, прннадлежит выпуклой оболочке сферического изображения кратчайшей γ'.

Пусть теперь точки X' н Y' неограниченно прнближаются соответственно к концам X н Y кратчайшей γ. Так как при этом длина дуги γ' сходится к длине дугн γ, а полукасательная к γ' в точке X' сходится к полукасательной к γ в точке X, то направление $Y'\overline{Y}'$ сходится к направлению $Y\overline{Y}$, и, следовательно, единичный вектор направления $Y\overline{Y}$ принадлежит выпуклой оболочке сферического нзображения кратчайшей γ с исключенными концами. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть сохраняются обозначения теоремы* 1 *и, кроме того, пусть* $\tau(Y)$ — *единичный касательный вектор* γ *в точке* X, $n(Y)$ — *единичный вектор направления* $\overline{Y}Y$; $\vartheta(Y)$ — *угол между векторами* $\tau(Y)$ *и* $n(Y)$.

Тогда, если точка Y *произвольным образом неограниченно приближается к точке* X, *то*

$$\vartheta(Y) \to \pi/2, \qquad |Y\overline{Y}|/|XY| \to 0.$$

Доказательство. Допустим, первое утверждение неверно. Тогда существует последовательность точек Y_k, сходящаяся к X, такая, что при каждом k угол

$$\left|\vartheta(Y_k) - \frac{\pi}{2}\right| > \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Подвергнем поверхность F преобразованию подобия относительно центра X с коэффициентом подобия $1/s(Y_k)$, где $s(Y_k)$ — расстояние между точками X и Y_k на поверхности F. При этом получим поверхность F_k с кратчайшей γ_k на ней. Так же, как для поверхности F и кратчайшей γ, построим для поверхности F_k и кратчайшей γ_k векторы τ_k и n_k. Эти векторы параллельны $\tau(Y_k)$ и $n(Y_k)$, а поэтому образуют угол $\left|\vartheta_k - \frac{\pi}{2}\right| > \varepsilon$.

Последовательность поверхностей F_k при $k \to \infty$ сходится к касательному конусу V поверхности F в точке X. Не ограничивая общности, можно считать, что кратчайшие γ_k сходятся при этом к отрезку единичной длины одной из образующих конуса V, а сама образующая является пределом полукасательных кратчайших γ_k в начальной точке X. При достаточно большом k сферическое изображение кратчайшей γ_k с исключенными концами содержится в сколь угодно малой окрестности сферического изображения упомянутой образующей конуса V без ее начальной точки X и, следовательно, ϑ_k при достаточно большом k сколь угодно мало отличается от $\pi/2$. Мы пришли к противоречию. Первое утверждение теоремы доказано.

Допустим теперь, что неверно второе утверждение теоремы. Тогда существует последовательность точек Y_k, сходящаяся к X, такая, что при каждом k

$$|Y_k\overline{Y}_k|/s(Y_k) > \varepsilon > 0.$$

Как и при доказательстве первого утверждения, построим последовательность выпуклых поверхностей F_k. Так как при $k \to \infty$ поверхности F_k сходятся к касательному конусу V поверхности F в точке X, кратчайшие γ_k сходятся к единичному отрезку одной из образующих конуса V и полукасательные к γ_k в точке X сходятся к упомянутой образующей, то отношение $|Y_k\overline{Y}_k|/s(Y_k)$ стремится к нулю, вопреки предположению. Теорема доказана полностью.

Как следствие теоремы 1 получается следующее удобное для наших целей представление радиуса-вектора произвольной точки выпуклой поверхности в окрестности данной начальной точки.

Теорема 3. *Пусть X_0 — гладкая точка выпуклой поверхности, X — близкая к ней точка, $\tau(X)$ — единичный вектор полукасательной в точке X_0 к кратчайшей, соединяющей точки X и X_0, $s(X)$ — длина кратчайшей.*

Тогда для радиуса-вектора $r(X)$ точки X имеет место следующее представление:

$$r(X)=r(X_0)+\tau(X)s(X)+\nu(X),$$

где $\nu(X)$ — вектор, направление которого при $X\to X_0$ сходится к направлению внутренней нормали поверхности в точке X_0, и, кроме того,

$$|\nu(X)|/s(X)\to 0.$$

Теорема 4. *Геодезическая линия на выпуклой поверхности в каждой гладкой точке поверхности имеет соприкасающуюся плоскость, нормальную к касательной плоскости. На гладкой выпуклой поверхности соприкасающаяся плоскость геодезической непрерывно изменяется при движении вдоль кривой.*

Доказательство. По определению соприкасающаяся плоскость кривой в точке O есть предельное положение плоскости, проходящей через касательную к кривой в точке O и близкую к O точку X кривой, когда $X\to O$. Воспроизведем построение, указанное в теореме 1. Тогда построенная плоскость содержит отрезок касательной OY и отрезок XY, имеющий направление, близкое к нормали поверхности в точке O. При $X\to O$ эта плоскость переходит в нормальную плоскость поверхности, проходящую через касательную к геодезической в точке O.

Так как геодезическая на гладкой выпуклой поверхности гладкая, то ее соприкасающаяся плоскость, определяемая непрерывно зависящими от точки касательной к геодезической и нормалью к поверхности, также изменяется непрерывно. Теорема доказана.

Воспользуемся теоремой 3 для доказательства одной леммы, которая нам понадобится при доказательстве однозначной определенности выпуклых шапок в § 6.

Лемма. *Пусть F_1 и F_2 — две гладкие выпуклые поверхности, касающиеся плоскости xy в начале координат O и обращенные выпуклостью в сторону $z<0$. Пусть между поверхностями установлено точечное соответствие, удовлетворяющее условиям:*

1. *Если X_1 и X_2 — соответствующие точки поверхностей, то кратчайшие γ_1 и γ_2, соединяющие эти точки на поверхностях F_1*

и F_2 с точкой O, имеют одинаковые длины s и общую полукасательную в точке O.

2. В окрестности точки O для z-координаты точек X_1 и X_2 выполняется неравенство

$$z(X_1)+As^2 \leqslant z(X_2) \leqslant Bs^2,$$

где A и B — положительные постоянные.

Тогда в окрестности точки O поверхность F_2 содержится внутри поверхности F_1. Более того, для функций $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$, задающих эти поверхности в окрестности точки O, выполняется условие

$$z_1(x, y)+C(x^2+y^2) \leqslant z_2(x, y),$$

где C — положительная постоянная.

Доказательство. Прежде всего заметим, что если точки X и Y на гладкой выпуклой поверхности достаточно близки к некоторой точке O, то прямая, соединяющая эти точки, образует с нормалью к поверхности в точке O угол, близкий к $\pi/2$.

Воспроизведем теперь конструкцию, указанную в формулировке теоремы 1. Именно, отложим на общей полукасательной кратчайших γ_1 и γ_2 от точки O отрезок s, равный длине кратчайших. Полученную точку Y соединим с точками X_1, X_2 и рассмотрим треугольник X_1X_2Y (рис. 14). По теореме 3 при достаточно малом s его стороны YX_1 и YX_2 образуют малый угол, так как их направления близки к нормали поверхностей в точке O, т. е. к направлению оси z. Отсюда ввиду условия 2 леммы следует, что стороны X_1X_2 и YX_2 являются величинами одного порядка малости, и, следовательно, отрезки X_1X_2 и X_2Y также образуют малый угол.

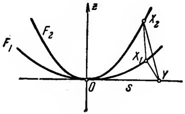

Рис. 14.

Проведем через точку X_2 прямую, параллельную оси z. Она пересечет поверхность F_1 в некоторой точке X_1', вообще говоря, отличной от X_1. Так как отрезки X_1X_1' и X_2X_1' сходятся в точке X_1' под углом, близким к прямому, то $z(X_2)>z(X_1')$. Более того, разность $z(X_2)-z(X_1')$ имеет порядок X_1X_2. Следовательно, в достаточно малой окрестности точки O будет $z(X_2)-z(X_1')>A's^2$, где A' — постоянная, меньшая A. Величина s^2, очевидно, эквивалентна x^2+y^2, где x и y — координаты проекции точки X_2 на плоскость xy. Лемма доказана.

§ 3. Выпуклые поверхности ограниченной удельной кривизны

По А. Д. Александрову, выпуклая поверхность F имеет в точке X ограниченную удельную кривизну, если эта точка имеет окрестность, такую, что для любой области G, принадлежащей этой окрестности, отношение кривизны поверхности в области G к площади области ограничено некоторой постоянной, не зависящей от области G, т. е.

$$\omega(G)/S(G) < C < \infty.$$

Если в каждой точке поверхности удельная кривизна ограничена, то такая поверхность называется *поверхностью ограниченной удельной кривизны*. Так как внутренняя кривизна поверхности равна ее внешней кривизне, т. е. площади сферического изображения, то в данном выше определении удельной кривизны $\omega(G)$ можно считать площадью сферического изображения области G.

Для выпуклых поверхностей ограниченной удельной кривизны имеет место следующая важная теорема А. Д. Александрова [5].

Теорема 1. *Каждая точка X выпуклой поверхности ограниченной удельной кривизны или гладкая, или принадлежит прямолинейному ребру, причем точка X не является концом этого ребра.*

Доказательство. Если точка X не является гладкой и не является внутренней точкой прямолинейного ребра, лежащего на поверхности, то могут быть только следующие три возможности:

1) точка X коническая;

2) точка X ребристая, причем через нее не проходит никакое прямолинейное ребро;

3) точка X является концом прямолинейного ребра. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что в каждом из этих случаев внешняя удельная кривизна поверхности не ограничена.

Если точка X коническая, то сферическое изображение любой сколь угодно малой окрестности точки X на поверхности покрывает сферическое изображение касательного конуса поверхности в точке X. Следовательно, площадь сферического изображения любой окрестности точки X не меньше площади сферического изображения конуса. Так как у точки X существуют окрестности сколь угодно малой площади, то удельная кривизна в конической точке поверхности не ограничена.

Пусть теперь точка X ребристая и через нее не проходит никакое прямолинейное ребро. Касательный конус поверхности в

такой точке представляет собой двугранный угол. Пусть α_1 и α_2 — грани этого угла, а g — его ребро. Проведем плоскость σ, параллельную ребру g, пересекающую его грани α_1 и α_2 под равными углами и отстоящую на расстоянии z от точки X. Если z достаточно мало, то шапка E, которую отрезает плоскость от поверхности F, проектируется на плоскость σ однозначно.

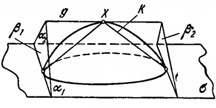

Рис. 15.

Проведем теперь две плоскости β_1 и β_2 перпендикулярно к ребру g так, чтобы они упирались в край шапки (рис. 15). Полуплоскости α_1 и α_2, плоскости β_1, β_2 и σ ограничивают трехгранную призму. Площадь поверхности этой призмы без площади грани, лежащей в плоскости σ, не меньше площади поверхности шапки, и она равна

$$2z^2 \operatorname{tg} \vartheta + \frac{2z}{\cos \vartheta}(x_1 + x_2) = \frac{2z}{\cos \vartheta}(z \sin \vartheta + x_1 + x_2),$$

где x_1 и x_2 — расстояния плоскостей β_1 и β_2 от точки X, а ϑ — половина двугранного угла, образуемого гранями призмы α_1 и α_2. Таким образом, для площади $S(E)$ поверхности шапки имеем

$$S(E) < \frac{2z}{\cos \vartheta}(z + x_1 + x_2).$$

Оценим теперь площадь сферического изображения шапки. Для этого рассмотрим конус K, проектирующий основание шапки из точки X. Сферическое изображение шапки E покрывает сферическое изображение конуса K, так как для каждой опорной плоскости конуса существует параллельная опорная плоскость шапки. По той же причине сферическое изображение четырехгранного угла, проектирующего из точки X грань призмы, лежащую в плоскости σ, покрывается сферическим изображением конуса K.

Сферическое изображение этого четырехгранного угла есть сферический четырехугольник с диагоналями, пересекающимися под прямым углом и равными по длине $\pi - 2\vartheta$ и $\pi - 2\varphi$, где 2ϑ — угол, образуемый гранями α_1 и α_2, а 2φ — угол, образуемый двумя другими противолежащими гранями. Если z достаточно мало, $\pi - 2\varphi$ тоже мало, и площадь сферического четырехугольника $\approx \frac{1}{2}(\pi - 2\vartheta)(\pi - 2\varphi)$. Во всяком случае, существует постоянная $m \neq 0$ такая, что площадь четырехугольника будет больше $m(\pi - 2\vartheta)(\pi - 2\varphi)$.

Так как $\pi - 2\varphi = \operatorname{arctg}\frac{z}{x_1} + \operatorname{arctg}\frac{z}{x_2}$, то ввиду малости отношений z/x_1 и z/x_2 можно считать, что $\pi - 2\varphi > \frac{1}{2}\left(\frac{z}{x_1} + \frac{z}{x_2}\right)$. Таким образом, для площади сферического изображения рассматриваемого четырехгранного угла, а следовательно, и для площади ω сферического изображения шапки E имеем:

$$\omega(E) > \frac{m}{2}(\pi - 2\vartheta)\left(\frac{z}{x_1} + \frac{z}{x_2}\right).$$

Отсюда для удельной кривизны шапки E получаем

$$\frac{\omega(E)}{S(E)} > \frac{m\cos\vartheta}{4}(\pi - 2\vartheta)\left(\frac{1}{z + x_1 + 2x_2} + \frac{1}{z + 2x_1 + x_2}\right),$$

т. е. она неограниченно растет, когда отрезающая шапку E плоскость σ приближается к точке X.

Случай, когда точка X является концом прямолинейного ребра g, рассматривается аналогично. Нужно только плоскость σ проводить через точку X_1 ребра g, отличную от X, на малом расстоянии z от точки X. При этом получается, что если точка X_1 приближается к X, а z убывает быстрее, чем расстояние между X и X_1, то удельная кривизна шапки, отрезаемой плоскостью σ от поверхности F, неограниченно растет.

Итак, если в точке X выпуклой поверхности F удельная кривизна ограничена, то или точка X гладкая, или через точку X проходит прямолинейное ребро, по которому поверхность имеет излом, причем точка X не является концом этого ребра. Никакие другие особенности в точке X невозможны.

Из теоремы 1 вытекают важные следствия.

Следствие 1. *Выпуклые шапки с ограниченной удельной кривизной являются гладкими.*

Действительно, нарушение гладкости может быть только из-за наличия прямолинейного ребра, концы которого лежат на границе шапки. Но тогда шапка вырождается в плоскую выпуклую область.

Следствие 2. *Если полная выпуклая поверхность с ограниченной удельной кривизной не является цилиндром, то она гладкая. В частности, все замкнутые поверхности ограниченной удельной кривизны гладкие.*

В самом деле, ребро, из-за наличия которого нарушается гладкость, должно быть некоторой прямой. С другой стороны, выпуклая поверхность, содержащая целую прямую, является цилиндрической.

Во многих случаях оказывается полезной следующая теорема, также принадлежащая А. Д. Александрову [5].

Теорема 2. *Пусть F — выпуклая поверхность, g — прямолинейный отрезок на поверхности F, X — точка отрезка g.*

Тогда существует последовательность областей на поверхности, сходящихся к точке X, удельные кривизны которых неограниченно убывают.

Доказательство. Касательный конус поверхности в точке X есть или двугранный угол, или плоскость. В обоих случаях прямая, содержащая отрезок g, разбивает касательный конус на две полуплоскости α_1 и α_2 (рис. 16).

Проведем плоскость σ через точку X перпендикулярно к отрезку g. Она пересекает поверхность по выпуклой кривой γ. Полукасательные этой кривой в точке X суть полупрямые, по которым плоскость σ пересекает полуплоскости α_1, α_2. Не ограничивая общности, можно считать, что каждая из этих полукасательных имеет с кривой γ только одну общую точку, именно точку X. В противном случае кривая γ содержала бы прямолинейный отрезок с концом в точке X.

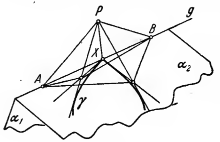

Рис. 16.

Но тогда на F была бы плоская область и построение областей, существование которых утверждается теоремой 2, не составляло бы труда.

Пусть n — внешняя нормаль поверхности F в точке X, образующая с полуплоскостями α_1 и α_2 равные углы, P — точка на ней, близкая к точке X; A и B — точки отрезка g, взятые по разные стороны от точки X.

Опорные полупрямые кривой γ, проведенные из точки P, вместе с полупрямыми PA и PB образуют ребра выпуклого четырехгранного угла E с вершиной в точке P.

Угол E вырезает на поверхности F некоторую область G в виде криволинейного четырехугольника, площадь которого, очевидно, не меньше площади соответствующего четырехугольника $\overline{G}$ на полуплоскостях α_1, α_2, а кривизна меньше кривизны угла E. Поэтому удельная кривизна области G не больше отношения кривизны E к площади четырехугольника $\overline{G}$.

Если расстояние h точки P от точки X мало по сравнению с расстоянием точки X от точек A и B, то кривизна угла E

$$\omega(E) \leqslant \frac{ch}{d},$$

где d — расстояние между точками A и B, а c — некоторая постоянная.

Площадь четырехугольника $\overline{G}$ равна

$$S(\overline{G}) = \frac{1}{2} d(\delta_1(h) + \delta_2(h)),$$

где $\delta_1(h)$ и $\delta_2(h)$ — расстояния точки X от вершин четырехугольника $\overline{G}$, отличных от A и B.

Очевидно, когда точка P неограниченно приближается к X, т. е. когда $h \to 0$, будем иметь

$$\frac{h}{\delta_1(h)} \to 0, \quad \frac{h}{\delta_2(h)} \to 0.$$

Поэтому отношение

$$\frac{\omega(E)}{S(\overline{G})} \leqslant \frac{2ch}{d^2(\delta_1(h) + \delta_2(h))}$$

стремится к нулю, если точки A, B и P надлежащим образом неограниченно приближать к точке X.

Так как удельная кривизна области G меньше отношения $\omega(E)/S(\overline{G})$, то действительно существует последовательность областей на поверхности F, сходящихся к точке P и удельные кривизны которых неограниченно убывают. Теорема доказана.

Для гладких точек выпуклой поверхности мы введем понятие верхней и нижней кривизн следующим образом.

Пусть F — выпуклая поверхность и X_0 — ее гладкая точка, X — произвольная точка поверхности F, $h(X)$ — расстояние точки X от касательной плоскости α к поверхности в точке X_0, $d(X)$ — расстояние проекции точки X на плоскость α от точки X_0. Тогда под *верхней* (соответственно *нижней*) кривизной поверхности F в точке X_0 мы будем понимать верхний (соответственно нижний) предел отношения $2h(X)/d^2(X)$, когда $X \to X_0$.

Приведем несколько очевидных свойств верхней и нижней кривизн.

1. Пусть выпуклые поверхности F_1 и F_2 имеют общую точку X_0 и общую касательную плоскость в этой точке. .

Тогда, если достаточно малая окрестность точки X_0 на поверхности F_1 лежит внутри поверхности F_2, то в X_0 верхняя и нижняя кривизны поверхности F_1 не меньше соответствующих кривизн поверхности F_2.

2. Если X_0 — точка на регулярной выпуклой поверхности, то верхняя (нижняя) кривизна в точке X_0 совпадает с наибольшей (соответственно наименьшей) кривизной нормальных сечений в этой точке. В частности, верхняя и нижняя кривизны в каждой точке сферы радиуса R равны $1/R$.

3. Если в гладкой точке X_0 выпуклой поверхности F нижняя кривизна положительна, то существует сфера, касающаяся

поверхности F в точке X_0, причем достаточно малая окрестность точки X_0 на F находится внутри сферы. Если же в точке X_0 верхняя кривизна ограничена, то существует сфера, касающаяся поверхности F в точке X_0, причем достаточно малая окрестность точки X_0 на сфере находится внутри поверхности F.

Нижеследующие две теоремы устанавливают некоторую связь между удельной кривизной поверхности и ее верхней и нижней кривизнами.

Теорема 3. *Если в гладкой точке X_0 выпуклой поверхности F нижняя кривизна положительна, а удельная кривизна ограничена, то верхняя кривизна в точке X_0 тоже ограничена.*

Теорема 4. *Если поверхность F — существенно выпуклая, и в гладкой точке X_0 имеет бесконечную удельную кривизну, то верхняя кривизна в этой точке бесконечна.*

Доказательство теоремы 3. Проведем касательную плоскость α к поверхности в точке X_0 и обозначим через $L(X)$ расстояние произвольной точки X поверхности F от плоскости α, через $d(X)$ — расстояние ее проекции на плоскость α от точки X_0.

Допустим, что теорема неверна. Тогда существует последовательность точек X_k, сходящаяся к X_0, такая, что

$$\lambda_k = \frac{h(X_k)}{d^2(X_k)} \to \infty, \quad \text{когда} \quad k \to \infty.$$

Покажем, что в таком случае существует последовательность областей на поверхности F, сходящихся к точке X_0, удельные кривизны которых неограниченно растут. Для этого от поверхности F отрежем шапку F_k плоскостью, параллельной плоскости α и проходящей через точку X_k. Оценим удельную кривизну шапки F_k.

Так как нижняя кривизна поверхности F в точке X_0 положительна, то существует положительная постоянная c_1 такая, что для всех точек X, достаточно близких к X_0, имеем $c_1 < h(X)/d^2(X)$, и, следовательно, $d(X) < \sqrt{\frac{h(X)}{c_1}}$.

Построим конус K, проектирующий основание шапки F_k из точки X_0. Внешняя кривизна конуса K меньше внешней кривизны шапки.

Опишем около конуса K трехгранный угол следующим образом. Первую грань проведем через образующую конуса X_0X_k. Две другие грани угла проведем касательно к конусу K и так, чтобы их следы на плоскости основания шапки F_k были перпендикулярны к следу первой грани.

Внешняя кривизна трехгранного угла меньше, чем кривизна конуса K и, следовательно, меньше внешней кривизны шапки F_k.

Оценим кривизну трехгранного угла.

Пусть Y_2 — точка основания шапки F_k, лежащая во второй грани трехгранного угла, h_k — высота шапки. Тогда $c_1 < h_k/d^2(Y_2)$. Отсюда

$$\sqrt{c_1 h_k} < \frac{h_k}{d(Y_2)} \leqslant \operatorname{tg} \varphi_2,$$

где φ_2 — угол, образуемый второй гранью трехгранного угла и плоскостью α. Аналогично для угла φ_3, образуемого третьей гранью и плоскостью α, имеем

$$\sqrt{c_1 h_k} < \operatorname{tg} \varphi_3.$$

И, наконец, для угла φ_1, образуемого первой гранью трехгранного угла и плоскостью α, получим

$$\sqrt{\lambda_k h_k} < \operatorname{tg} \varphi_1.$$

Принимая во внимание малость углов φ_1, φ_2, φ_3, можно считать

$$\varphi_1 > \frac{1}{2} \sqrt{\lambda_k h_k}, \qquad \varphi_2 + \varphi_3 > \sqrt{c_1 h_k}.$$

Сферическое изображение трехгранного угла есть сферический треугольник с основанием $\varphi_2 + \varphi_3$ и высотой φ_1. Площадь этого треугольника не меньше

$$\frac{1}{2} \varphi_1 (\varphi_2 + \varphi_3) > \frac{1}{4} h_k \sqrt{c_1 \lambda_k}.$$

Если высота h_k шапки F_k достаточно мала, то ее площадь мало отличается от площади ее основания. Во всяком случае, она не больше удвоенной площади основания. А так как для всех точек X поверхности F, принадлежащих основанию шапки с высотой h_k, расстояние

$$d(X) < \sqrt{\frac{h_k}{c_1}},$$

то площадь основания шапки не больше площади круга радиуса $\sqrt{\frac{h_k}{c_1}}$, и, следовательно, для площади шапки достаточно малой высоты h_k получается оценка

$$S(F_k) < 2\pi \frac{h_k}{c_1}.$$

Кривизна $\omega(F_k)$ шапки F_k не меньше кривизны трехгранного угла и, следовательно, не меньше $\frac{1}{4} h_k \sqrt{c_1 \lambda_k}$. Поэтому удельная кривизна шапки

$$\frac{\omega(F_k)}{S(F_k)} > \frac{1}{8\pi} c_1 \sqrt{c_1 \lambda_k}$$

и неограниченно растет при $k \to \infty$, так как $\lambda_k \to \infty$ по предположению. Мы пришли к противоречию с условием теоремы об ограниченности удельной кривизны. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4. Допустим, что теорема неверна. Тогда, сохраняя предыдущие обозначения, для всех X из достаточно малой окрестности точки X_0 на F будем иметь

$$h(X)/d^2(X) < c_2,$$

где c_2 — некоторая постоянная.

Построим сферу, касающуюся поверхности F в точке X_0, расположенную по ту же сторону касательной плоскости α, что и поверхность F, такую, чтобы некоторая окрестность точки X_0 на поверхности была вне сферы. Это возможно, так как по предположению верхняя кривизна поверхности F в точке X_0 конечна.

Возьмем на внешней нормали поверхности F в точке X_0 точку S и построим два конуса, проектирующих сферу и поверхность F соответственно. Пусть $\sigma(S)$ — площадь той части поверхности F, которая видна из точки S; $\bar{\sigma}(S)$ — площадь части сферы, которую видно из S; $f(S)$ — площадь области плоскости α, которая находится внутри конуса, проектирующего сферу; $\omega(S)$ — внешняя кривизна конуса, проектирующего поверхность; $\bar{\omega}(S)$ — внешняя кривизна конуса, проектирующего сферу.

Если точка S достаточно близка к X_0, то конус, проектирующий сферу, содержится внутри конуса, проектирующего поверхность. Поэтому

$$\omega(S) < \bar{\omega}(S).$$

Далее,

$$\sigma(S) > f(S), \quad f(S) > c'\bar{\sigma}(S), \quad \frac{\bar{\omega}(S)}{\bar{\sigma}(S)} < \frac{1}{R^2},$$

где c' — некоторая абсолютная постоянная, а R — радиус сферы.

Из последних четырех неравенств, как следствие, получаем

$$\frac{\omega(S)}{\sigma(S)} < \frac{1}{c'R^2}.$$

Чтобы обнаружить в этом противоречие, достаточно показать, что та часть поверхности F, которая видна из точки S, стягивается к точке X_0, когда S приближается к X_0. Но это действительно так, ибо в противном случае на F существовал бы прямолинейный отрезок, содержащий точку X_0, что невозможно, так как поверхность F существенно выпуклая. Теорема доказана.

§ 4. Построение выпуклой поверхности с бесконечной верхней кривизной на заданном множестве точек

В настоящем параграфе будет построена выпуклая поверхность F, однозначно проектирующаяся на плоскость xy и удовлетворяющая следующим условиям:

1) поверхность F имеет положительную нижнюю кривизну в каждой гладкой точке,

2) для заданного множества M меры нуль в плоскости xy каждая гладкая точка поверхности F, проектирующаяся в множество M, имеет бесконечную верхнюю кривизну. Поверхность F понадобится нам при доказательстве однозначной определенности шапок в § 6. Она используется нами и в доказательстве других теорем единственности для поверхностей с ограниченной регулярностью. Метод построения поверхности F применяется в доказательствах общих теорем существования для поверхностей в гл. VII, VIII.

Лемма 1. *Пусть C — замкнутая ломаная в полупространстве $z \geqslant 0$, однозначно проектирующаяся на плоскость xy в выпуклую ломаную $\bar{C}$, ограничивающую выпуклый многоугольник G. Пусть в многоугольнике G заданы точки $\bar{A}_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ и каждой точке $\bar{A}_i$ поставлено в соответствие число $\omega_i > 0$, причем $\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n < 2\pi$.*

Тогда существует выпуклый многогранник с границей C, однозначно проектирующийся на плоскость xy, с вершинами, проектирующимися в точки $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_n$ и внешними кривизнами в этих вершинах, соответственно равными $\omega_1, \ldots, \omega_n$ (рис. 17).

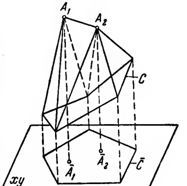

Рис. 17.

Доказательство. Проведем через точки $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_n$ прямые $g_1, \ldots, g_n$, параллельные оси z.

Рассмотрим теперь все выпуклые многогранники с границей C, обращенные выпуклостью в сторону $z > 0$, с вершинами на прямых $g_1, \ldots, g_n$ и внешними кривизнами в этих вершинах не больше $\omega_1, \ldots, \omega_n$ соответственно. Совокупность таких многогранников обозначим T. В том, что T не пусто, можно убедиться, рассмотрев область, ограниченную ломаной C на выпуклой оболочке ломаной C и отрицательной полуоси z. Эта область

представляет собой многогранник с границей C и без внутренних вершин.

Многогранники P из T ограничены в совокупности. В самом деле, все они расположены над плоскостью xy внутри цилиндрической поверхности Z, проведенной через ломаную C, с образующими, параллельными оси z. Проведем плоскость α над ломаной C, параллельную плоскости xy. Пусть γ — выпуклый многоугольник, по которому эта плоскость пересекает многогранник P, и A — наиболее удаленная от плоскости α вершина многогранника P. Кривизна в вершине многогранного угла, проектирующего многоугольник γ из точки A, не больше кривизны многогранника P, а последняя в свою очередь не больше $\omega_1+\ldots+\omega_n<2\pi$. Вместе с тем, если вершина A достаточно удалена от плоскости α, кривизна многогранного угла, проектирующего γ, будет сколь угодно близка к 2π. Таким образом, вершина A не может быть как угодно далека от плоскости α, и следовательно, многогранники из T ограничены в совокупности.

Отнесем каждому многограннику P из T число $s(P)$, равное сумме расстояний от плоскости xy всех точек многогранника, лежащих на прямых $g_1, \ldots, g_n$, даже если некоторые из них и не являются вершинами.

Среди многогранников P из T существует многогранник P_0, для которого число $s(P)$ имеет наибольшее значение. Покажем, что P_0 и есть тот многогранник, существование которого утверждается теоремой. Действительно, многогранник P_0 имеет границей ломаную C, его вершины лежат на прямых g_i и, следовательно, проектируются в заданные точки $\bar{A}_i$, кривизна в каждой вершине, лежащей на прямой g_i, не больше ω_i. Покажем, что она равна ω_i.

Допустим, что в вершине A_k многогранника P_0, лежащей на прямой g_k, кривизна меньше ω_k. Сместим эту вершину вверх по прямой g_k на малое расстояние δ. При этом внешние кривизны во всех вершинах, кроме A_k, не увеличиваются. И если взять δ достаточно малым, то кривизна в вершине A_k хотя и увеличится, но все же останется меньше ω_k. А так как при смещении вершины A_k вверх $s(P)$ увеличивается, то для P_0 максимум $s(P)$ не достигается. Мы пришли к противоречию. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть M — любое множество в плоскости xy меры нуль и $\bar{M}$ — любое ограниченное множество, содержащее M.*

Тогда существует строго выпуклая шапка F, основание которой лежит в плоскости xy и покрывает множество $\bar{M}$, причем удельная кривизна в каждой точке шапки больше нуля, а в тех точках, которые проектируются в M, она равна бесконечности.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что множество $\bar{M}$ заключено внутри квадрата C_1, ограниченного прямыми $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=a$.

Построим последовательность открытых множеств G_k, удовлетворяющих следующим условиям:

1) G_1 — квадрат C_1 без границы;
2) $G_k \subset G_{k-1}$;
3) мера (площадь) G_k не больше $a^2/4^k$;
4) множество M содержится в каждом G_k.

Разобьем теперь квадрат C_1 на маленькие квадраты со сторонами $\delta_n = a/2^n$ прямыми, параллельными сторонам квадрата C_1. Совокупность всех квадратов этого разбиения обозначим T_n.

Отнесем каждой точке плоскости xy, являющейся центром квадрата из T_n, число 2^{k-2n}, если этот квадрат содержится в G_k, но не содержится в G_{k+1}. Легко проверить, что сумма всех чисел, отнесенных центрам квадратов из T_n, не превосходит единицы и, следовательно, меньше 2π.

Пусть C_2 — произвольная выпуклая замкнутая ломаная в плоскости xy, содержащая внутри себя квадрат C_1. Согласно лемме 1 существует выпуклый многогранник P_n с границей C_2, вершины которого проектируются на плоскость xy в центры квадратов T_n и имеют кривизны, равные числам, которые отнесены центрам квадратов.

Рассмотрим теперь последовательность многогранников $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ Так как многогранники P_n ограничены в совокупности, то из последовательности P_n можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Не ограничивая общности, можно считать, что сама последовательность P_n сходится. Пусть F — выпуклая поверхность, являющаяся пределом последовательности P_n.

Покажем, что удельная кривизна поверхности F в каждой точке X, которая на плоскость xy проектируется в точку множества M, равна бесконечности.

Пусть G — произвольная область на поверхности F, расположенная в достаточно малой окрестности H точки X, проекция которой на плоскость xy принадлежит множеству M. Обозначим через $\bar{G}$ проекцию области G на плоскость xy. Пусть $\bar{R}$ — замкнутое множество в $\bar{G}$ с площадью, не меньшей половины площади $\bar{G}$, и R — замкнутое множество на F, которое проектируется в $\bar{R}$. При достаточно большом n замкнутое множество $\bar{U}_n$, состоящее из квадратов, принадлежащих T_n и пересекающихся с $\bar{R}$, содержится внутри $\bar{G}$. Пусть U_n — замкнутое множество на многограннике P_n, проектирующееся в множество $\bar{U}_n$.

Так как $U_n \to R$ при $n \to \infty$ и R — замкнутое множество, то сферическое изображение U_n попадает при достаточно большом n в любую достаточно малую окрестность сферического изображения множества R. Отсюда следует, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \omega(U_n) \leqslant \omega(R) \leqslant \omega(G). \tag{1}$$

Оценим $\omega(U_n)$. Если окрестность H точки X достаточно мала, область $\bar{G}$ будет принадлежать открытому множеству G_k с достаточно большим номером k. Число квадратов из T_n, содержащихся в $\bar{U}_n$, не меньше $\frac{1}{2} S(\bar{G}) \frac{2^{2n}}{a^2}$, так как они покрывают больше половины площади $\bar{G}$. Так как над центром каждого квадрата расположена вершина многогранника P_n с кривизной не меньше 2^{k-2n}, то кривизна

$$\omega(U_n) \geqslant \frac{1}{2a^2} S(\bar{G}) 2^k.$$

Далее, $S(G) \leqslant \frac{1}{\cos \vartheta_0} S(\bar{G})$, где ϑ_0 — наибольший угол, образуемый опорными плоскостями F в точках, принадлежащих H, с плоскостью xy. Поэтому

$$\omega(U_n) \geqslant \frac{\cos \vartheta_0}{2a^2} S(G) 2^k,$$

откуда

$$\varlimsup_{n \to \infty} \omega(U_n) \geqslant \frac{\cos \vartheta_0}{2a^2} S(G) 2^k. \tag{2}$$

Из неравенств (1) и (2) следует:

$$\frac{\omega(G)}{S(G)} \geqslant \frac{\cos \vartheta_0}{2a^2} 2^k. \tag{3}$$

Если область G стягивается к точке X, то ее проекция $\bar{G}$ в конце концов попадает внутрь области G_k с любым номером k, откуда следует, что

$$\frac{\omega(G)}{S(G)} \to \infty \quad \text{при} \quad G \to X.$$

Из неравенства (3) следует также, что удельная кривизна в произвольной точке X поверхности F положительна в том смысле, что

$$\lim_{G \to X} \frac{\omega(G)}{S(G)} > 0.$$

По теореме 2 § 3 отсюда следует, что шапка F существенно выпуклая. Лемма 2 доказана полностью.

Теорема 1. *Пусть M — любое множество меры нуль в плоскости xy и $\bar{M}$ — любое ограниченное множество, содержащее M.*

Тогда существует выпуклая шапка Ω с основанием в плоскости xy, покрывающим множество $\bar{M}$, причем нижняя кривизна шапки во всех гладких точках положительна, а верхняя кривизна в точках, проектирующихся в точки множества M, бесконечна.

Доказательство. Согласно лемме 2 существует шапка с основанием в плоскости xy, покрывающим ε-окрестность множества $\overline{M}$, причем удельная кривизна ее бесконечна в каждой гладкой точке, которая проектируется в точку множества M. Пусть $z=f(x, y)$ — уравнение этой шапки.

Рассмотрим выпуклую поверхность, задаваемую уравнением

$$z=f(x, y)-\varepsilon'(x^2+y^2), \quad \varepsilon'>0.$$

При достаточно малом ε' часть этой поверхности, расположенная над плоскостью xy, представляет собой выпуклую шапку Ω, основание которой лежит в плоскости xy и покрывает множество $\overline{M}$. Покажем, что она обладает свойствами, указанными в теореме 1.

Пусть Φ: $z=\varphi(x, y)$ — выпуклая поверхность и $z=\psi(x, y)$ — касательная плоскость к ней в точке $X_0(x_0, y_0)$. Пусть $X_1(x_1, y_1)$ — близкая к X_0 точка поверхности Φ. Обозначим через d расстояние между точкой X_0 и проекцией $\overline{X}_1$ точки X_1 на касательную плоскость в точке X_0, а через δ — расстояние между точками X_1 и $\overline{X}_1$. Тогда при достаточной близости точки X_1 к X_0 величина d^2 имеет порядок $(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2$, а величина δ имеет порядок $|\varphi(x_1, y_1)-\psi(x_1, y_1)|$. Отсюда следует, что поверхность Φ имеет в точке X_0 положительную нижнюю кривизну, если

$$\underline{\lim}_{X_1 \to X_0} \frac{|\varphi(x_1, y_1)-\psi(x_1, y_1)|}{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}>0.$$

Поверхность Φ имеет в точке X_0 бесконечную верхнюю кривизну, если

$$\overline{\lim}_{X_1 \to X_0} \frac{|\varphi(x_1, y_1)-\psi(x_1, y_1)|}{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}=\infty.$$

Из указанных свойств верхней и нижней кривизны выпуклой поверхности следует, что если хотя бы одна из двух выпуклых поверхностей $z=f_1(x, y)$ или $z=f_2(x, y)$, обращенных выпуклостью в одну сторону, в точке (x_0, y_0) имеет положительную нижнюю кривизну, то поверхность $z=f_1(x, y)+f_2(x, y)$ тоже имеет положительную нижнюю кривизну в этой точке. Если хотя бы одна из поверхностей в точке (x_0, y_0) имеет бесконечную верхнюю кривизну, то верхняя кривизна поверхности $z=f_1(x, y)+$ $+f_2(x, y)$ в точке (x_0, y_0) также бесконечна.

Поверхность $z=-\varepsilon'(x^2+y^2)$ и поверхность F: $z=f(x, y)$ обращены выпуклостью в одну сторону, именно в сторону $z>0$. Первая из этих поверхностей имеет положительную кривизну в каждой точке. Следовательно, поверхность Ω: $z=$ $=f(x, y)-\varepsilon'(x^2+y^2)$ имеет положительную нижнюю кривизну в каждой гладкой точке.

Поверхность $z=f(x, y)$ имеет бесконечную верхнюю кривизну в каждой точке, проектирующейся в множество M, так как в такой точке поверхность имеет бесконечную удельную кривизну и, следовательно, бесконечную верхнюю кривизну (теорема 4 § 3). Отсюда заключаем, что поверхность Ω в каждой гладкой точке, проектирующейся в множество M, имеет бесконечную верхнюю кривизну. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* Ω: $z=\omega(x, y)$ — *выпуклая поверхность, существование которой устанавливается теоремой* 1. *Тогда каждая поверхность* Ω_λ: $z=\lambda\omega(x, y)$ *при* $\lambda\neq 0$ *обладает свойствами поверхности* Ω, *т. е. ее нижняя кривизна в каждой гладкой точке положительна, а верхняя кривизна в каждой точке, проектирующейся в множество* M, *бесконечна.*

Доказательство очевидно.

§ 5. Вспомогательная поверхность Φ и некоторые ее свойства

В настоящем параграфе с помощью двух данных изометричных выпуклых поверхностей F_1 и F_2 будет построена некоторая вспомогательная поверхность Φ. Такая поверхность возникает у нас при доказательстве однозначной определенности выпуклых шапок в § 6. Поэтому, чтобы не загружать это доказательство деталями, мы выделяем рассмотрение поверхности Φ в специальный параграф.

Лемма 1. Пусть F — *выпуклая поверхность с регулярной метрикой и положительной гауссовой кривизной. Пусть* (u, v) — *регулярная координатная сеть на поверхности, регулярная в том смысле, что коэффициенты линейного элемента поверхности*

$$ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$$

суть регулярные (дважды дифференцируемые) функции переменных u, v.

Тогда вектор-функция $r(u, v)$, *задающая поверхность, гладкая, т. е. имеет непрерывные первые производные* r_u, r_v, *удовлетворяющие условию* $r_u\times r_v\neq 0$.

Доказательство. По теореме А. Д. Александрова (теорема 1 § 3) поверхность F гладкая. Возьмем произвольную точку (u, v) на поверхности F и построим геодезическую γ, касательную к линии u ($v=\text{const}$) в этой точке. Отложим на линии u и геодезической γ от точки (u, v) отрезки малой длины s и обозначим через A и B концы этих отрезков. Так как параметризация u, v является регулярной, то расстояние $\rho(A, B)$ между точками A и B на поверхности при $s\to 0$ будет величиной более высокого порядка малости, чем s. Отсюда следует существование производной r'_s вдоль линии u, так как производ-

ная r'_s вдоль геодезической существует. Ввиду регулярности параметризации u, v на поверхности существование производной r'_s при $v=\mathrm{const}$ влечет за собой существование производной r_u. Аналогично доказывается существование производной r_v.

Докажем непрерывность производной r_u. Очевидно, для этого достаточно показать, что единичный касательный вектор τ к координатным линиям u является непрерывной функцией переменных u, v. Пусть $A(u, v)$ — произвольная точка поверхности F и $B(u+\Delta u, v+\Delta v)$ — близкая к ней точка. Проведем через точки A и B кратчайшую и обозначим $\tau'(A)$ и $\tau'(B)$ единичные касательные векторы к ней в точках A, B (рис. 18). В силу регулярности параметризации u, v поверхности, при достаточной близости точек A и B, углы α и β близки. Касательные векторы $\tau'(A)$ и $\tau'(B)$ близки по теореме 8 § 1. Замечая теперь, что все четыре вектора $\tau(A)$, $\tau(B)$, $\tau'(A)$ и $\tau'(B)$ образуют с нормалью поверхности в точке A углы, близкие к $\pi/2$, заключаем о близости векторов $\tau(A)$ и $\tau(B)$. А это означает непрерывность вектор-функции τ. Как указано выше, непрерывность τ в силу регулярности внутренней метрики поверхности влечет за собой непрерывность производной $r_u(u, v)$. Аналогично доказывается непрерывность производной $r_v(u, v)$. Условие $r_u \times r_v \neq 0$ следует из положительной определенности квадратичной формы ds^2, так как $(r_u \times r_v)^2 = EG - F^2$. Лемма доказана.

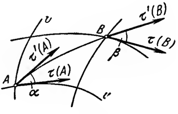

Рис. 18.

Пусть F — выпуклая поверхность, заданная уравнением

$$z=f(x, y).$$

Функция $f(x, y)$ в общем случае нерегулярна. В точках нарушения геометрической гладкости поверхности эта функция не имеет даже первых производных. Однако имеет место следующая теорема Буземана и Феллера *).

Функция $f(x, y)$, задающая выпуклую поверхность, почти всюду имеет второй дифференциал, т. е. допускает представление

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x, y) + a_1 \Delta x + a_2 \Delta y + \\ + \frac{1}{2}(a_{11}\Delta x^2 + 2a_{12}\Delta x \Delta y + a_{22}\Delta y^2) + \varepsilon \cdot (\Delta x^2 + \Delta y^2),$$

где $\varepsilon(x, y, \Delta x, \Delta y) \to 0$ *при* $\Delta x^2 + \Delta y^2 \to 0$.

*) А. Д. Александров распространил эту теорему на случай выпуклых гиперповерхностей [7].

Подобно тому как для гладких выпуклых поверхностей в § 3, для произвольной гладкой поверхности мы определим понятие верхней и нижней кривизны. Полупрямую, исходящую из данной точки O гладкой поверхности Φ, назовем внутренней нормалью, если она перпендикулярна касательной плоскости поверхности и если существуют сколь угодно близкие к O точки поверхности с той стороны касательной плоскости, куда направлена эта полупрямая. Если окрестность точки O на поверхности является плоской, то внутренней нормалью будем считать любую полупрямую, перпендикулярную касательной плоскости.

Возьмем точку X на поверхности Φ, близкую к точке O, и обозначим через $d(X)$ расстояние ее до точки O, а через $\delta(X)$ — взятое со знаком расстояние до касательной плоскости, считая его положительным, если точка X находится с той стороны касательной плоскости в O, куда направлена внутренняя нормаль. Назовем нижней кривизной поверхности Φ в точке O величину

$$\varliminf_{X\to 0} 2\delta(X)/d^2(X),$$

а верхней кривизной —

$$\varlimsup_{X\to 0} 2\delta(X)/d^2(X).$$

Очевидно, верхняя кривизна не меньше нижней.

Лемма 2. *Пусть F_1 и F_2 — две изометричные выпуклые поверхности с регулярной метрикой и положительной гауссовой кривизной. Пусть в начале координат O совпадают две соответствующие по изометрии точки поверхностей F_1, F_2 и соответствующие по изометрии направления в этих точках. Пусть, наконец, обе поверхности расположены по одну сторону их общей касательной плоскости в точке O, причем эта плоскость не перпендикулярна плоскости xy.*

Введем на поверхностях F_1 и F_2 общую регулярную параметризацию u, v (точки, соответствующие по изометрии, имеют одинаковые координаты u, v). Пусть $r_1(u, v)$, $r_2(u, v)$ будут вектор-функции, задающие поверхности F_1 и F_2. Обозначим через $r_2^*(u, v)$ зеркальное отображение вектора $r_2(u, v)$ в плоскости xy.

Тогда вектор-функция $r = r_1(u, v) + r_2^*(u, v)$, рассматриваемая в достаточно малой окрестности точки O, задает гладкую поверхность Φ, однозначно проектирующуюся на плоскость xy. На поверхности Φ нет точек с положительной нижней и в то же время бесконечной верхней кривизной. Если в точках $X_1(u, v)$ и $X_2(u, v)$ поверхности F_1 и F_2 дважды дифференцируемы, то в соответствующей точке $X(u, v)$ поверхность Φ не может иметь положительной нижней кривизны.

Доказательство. Прежде всего заметим, что вектор-функция $r=r_1(u, v)+r_2(u, v)$, рассматриваемая в окрестности точки O, очевидно, задает гладкую поверхность Φ'. Действительно, в точке O $r_u \times r_v = 4r_{1u}\times r_{1v} \neq 0$. Следовательно, по непрерывности $r_u \times r_v \neq 0$ и в некоторой окрестности этой точки. Поверхность Φ' однозначно проектируется на плоскость xy, так как z — компонента вектора $r_u \times r_v$ отлична от нуля в точке O, а следовательно, и вблизи этой точки. Так как векторы r_1+r_2 и $r_1+r_2^*$ отличаются только z-компонентой, то вектор-функция $r_1(u, v)+r_2^*(u, v)$ тоже задает некоторую гладкую поверхность Φ, однозначно проектирующуюся на плоскость xy. Очевидно, плоскость xy является касательной плоскостью этой поверхности в точке O.

Пусть $\overline{X}$ — произвольная фиксированная точка поверхности F_1, близкая к O. Как показано в § 2 (теорема 3), для вектор-функции $r_1(X)$, задающей поверхность F_1, имеет место следующее представление:

$$r_1(X) = r_1(\overline{X}) + \tau_1(X)s(X) + \nu_1(X),$$

где $s(X)$ — расстояние на поверхности между точками X и $\overline{X}$, а $\tau_1(X)$ — единичный касательный вектор кратчайшей, соединяющей точки X и $\overline{X}$ в точке $\overline{X}$. При $X \to \overline{X}$ направление вектора $\nu_1(X)$ сходится к внутренней нормали поверхности в точке $\overline{X}$, а величина $|\nu_1(X)|$ стремится к нулю, причем быстрее чем $s(X)$, т. е. $|\nu_1(X)|/s(X) \to 0$. Аналогичное разложение имеет место для вектора $r_2(X)$. Таким образом, вектор-функцию $r(X)$, задающую поверхность Φ, можно представить в виде

$$r(X) = r(\overline{X}) + (\tau_1(X) + \tau_2^*(X))\, s(X) + \nu_1(X) + \nu_2^*(X).$$

Так как в точке O, а следовательно, и в ее окрестности $\tau_1(X) + \tau_2^*(X) \neq 0$, то существует постоянная c_1, такая, что

$$|r(X) - r(\overline{X})| > c_1 s(X). \qquad (1)$$

Пусть n_1, n_2, n_2^* и n — единичные векторы внешних нормалей поверхностей F_1, F_2, F_2^* и Φ (F_2^* означает поверхность, полученную зеркальным отражением поверхности F_2 в плоскости xy). Покажем, что $n_1 n = -n_2^* n \neq 0$.

Действительно, пусть τ_1 и τ_1' — два единичных взаимно перпендикулярных касательных вектора поверхности F_1 в точке $\overline{X}$, τ_2^* и $\tau_2'^*$ — соответствующие по изометрии касательные векторы поверхности F_2^*. Положим

$$A = n_1 n = (\tau_1,\ \tau_1',\ n),$$
$$B = -n_2^* n = (\tau_2^*,\ \tau_2'^*,\ n).$$

Имеем

$$A^2 = 1 - (\tau_1 n)^2 - (\tau_1' n)^2,$$
$$B^2 = 1 - (\tau_2^* n)^2 - (\tau_2'^* n)^2.$$

Так как векторы $\tau_1 + \tau_2^*$ и $\tau_1' + \tau_2'^*$ лежат в касательной плоскости поверхности Φ, то

$$\tau_1 n + \tau_2^* n = (\tau_1 + \tau_2^*)\, n = 0,$$
$$\tau_1' n + \tau_2'^* n = (\tau_1' + \tau_2'^*)\, n = 0.$$

Отсюда

$$A^2 = B^2.$$

Покажем, что A и B отличны от нуля. Допустим, что $A=0$. Тогда вектор n касается поверхности F_1 в точке $\overline{X}$. Примем его за вектор τ_1. Так как $\tau_1 n + \tau_2^* n = 0$, то должно быть $\tau_2^* = -n$. Но тогда $\tau_1 + \tau_2^* = 0$, что невозможно в точке O, а следовательно, и вблизи этой точки, в частности в точке $\overline{X}$. Так как величины $A(\overline{X})$ и $B(\overline{X})$ непрерывно зависят от точки $\overline{X}$, а при $\overline{X} \equiv O$, очевидно, $A=B$, то $A^2=B^2 \neq 0$ влечет за собой $A=B$ для всех $\overline{X}$, близких к O.

Пусть теперь поверхность Φ в точке $\overline{X}$ (мы имеем в виду точку с вектором $r(\overline{X})$) имеет положительную нижнюю кривизну. Тогда

$$(r(X) - r(\overline{X}))\, n = (\nu_1(X) + \nu_2^*(X))\, n > c_1 (r(X) - r(\overline{X}))^2,$$

где c_1 — положительная постоянная. Отсюда, принимая во внимание неравенство (1), получаем

$$\nu_1(X)\, n + \nu_2^*(X)\, n > \beta_1 s^2(X), \tag{2}$$

где β_1 тоже положительная постоянная.

Так как при $X \to \overline{X}$ направления векторов $\nu_1(X)$ и $\nu_2^*(X)$ сходятся к направлению нормалей n_1 и n_2^*, а $nn_1 = -n_2^* n \neq 0$, то при достаточной близости X к $\overline{X}$ величины $\nu_1(X)\, n$ и $\nu_2^*(X)\, n$ сохраняют знаки. Не ограничивая общности, можно считать $\nu_1(X)\, n > 0$, а $\nu_2^*(X)\, n \leqslant 0$. То, что в первом неравенстве надо ставить знак «больше», а не «больше или равно», следует из того, что величины $\nu_1(X)\, n$ и $\nu_2^*(X)\, n$ противоположных знаков и удовлетворяют неравенству (2). Так как $\nu_1(X)\, n > 0$, а $\nu_2^*(X)\, n \leqslant 0$, то из неравенства (2) следует

$$\nu_1(X)\, n > \beta_1 s^2(X). \tag{3}$$

Таким образом, при достаточно малом $s(X)$, не равном нулю, $|\nu_1(X)| \neq 0$.

Разложим вектор $\nu_1(X)$ на сумму двух векторов следующим образом:

$$\nu_1(X) = n_1\delta_1(X) + t_1(X),$$

где $\delta_1(X)$ — расстояние точки X от касательной плоскости поверхности F_1 в точке $\bar{X}$. Имеем: $n\nu_1(X) = nn_1\delta_1(X) + nt_1(X)$. Подставляя это выражение для $n\nu_1(X)$ в неравенство (3), получим

$$\delta_1(X) = \frac{\beta_1 s^2(X)}{nn_1 + \frac{nt_1(X)}{\delta_1(X)}}.$$

Так как $nn_1 \neq 0$, а $t_1(X)/\delta_1(X) \to 0$ при $s(X) \to 0$, то существует положительная постоянная β_2 такая, что

$$\delta_1(X) > \beta_2 s^2(X). \tag{4}$$

Неравенство (4) показывает, что поверхность F_1 в точке $\bar{X}$ имеет положительную нижнюю кривизну. Так как поверхность F_1 в точке $\bar{X}$ имеет ограниченную удельную кривизну (метрика поверхности регулярна), то положительность нижней кривизны в точке $\bar{X}$ влечет за собой ограниченность верхней кривизны (теорема 3 § 2). Отсюда

$$\delta_1(X) < \beta_3 s^2(X),$$

и, следовательно,

$$n\nu_1(X) < \beta_3' s^2(X). \tag{5}$$

Так как $n\nu_1(X) > 0$, $n\nu_2^*(X) \leqslant 0$, а $(r(X) - r(\bar{X}))\,n = \nu_1(X)\,n + \nu_2^*(X)\,n$, то

$$(r(X) - r(\bar{X}))\,n \leqslant n\nu_1(X) < \beta_3' s^2(X).$$

Отсюда, принимая во внимание неравенство (1), получим

$$(r(X) - r(\bar{X}))\,n \leqslant c'(r(X) - r(\bar{X}))^2.$$

Это неравенство указывает на то, что верхняя кривизна поверхности Ф в точке ограничена. Итак, ни в какой точке поверхность Ф не может иметь положительную нижнюю и бесконечную верхнюю кривизну.

Пусть теперь точка $\bar{X}$ поверхности F_1 и соответствующая по изометрии точка поверхности F_2 являются точками двукратной дифференцируемости в смысле определения, данного выше. Покажем, что в этом случае нижняя кривизна поверхности Ф в точке $r(\bar{X})$ не может быть положительной.

Примем точку $\bar{X}$ поверхности F_1 за начало координат O, касательную плоскость в этой точке — за плоскость xy и внутреннюю нормаль — за положительную полуось z. Так как точка $\bar{X}$

является точкой двукратной дифференцируемости, то поверхность F_1 в окрестности этой точки задается уравнением

$$z = \varphi_2(x,\ y) + \varepsilon\cdot(x^2+y^2),\quad \varphi_2 = \frac{1}{2}\,(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2),$$

где $\varepsilon(x, y)\to 0$ при $x^2+y^2\to 0$. По условию, поверхность F_1 имеет положительную гауссову кривизну. Покажем, что в точке $\overline{X}\equiv O$ она определяется по формуле

$$K = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

Прежде всего заметим, что квадратичная форма $\varphi_2(x,\ y)$ неотрицательна. Действительно, допустим, что для некоторых ξ, η имеем $\varphi_2(\xi,\ \eta) < 0$. Так как поверхность F_1 располагается в полупространстве $z\geqslant 0$, то при любом $\lambda\neq 0$

$$\frac{1}{\lambda^2}\,z(\lambda\xi,\ \lambda\eta) = \varphi(\xi,\ \eta) + \varepsilon(\xi^2+\eta^2)\geqslant 0.$$

Если $\lambda\to 0$, то $\varepsilon\to 0$. Следовательно, знак $z(\lambda\xi,\ \lambda\eta)$ при малом λ определяется знаком формы $\varphi_2(\xi,\ \eta)$. А так как $\varphi_2(\xi,\ \eta)<0$, то $z(\lambda\xi, \lambda\eta)<0$ при достаточно малом λ, и мы приходим к противоречию. Итак, форма $\varphi_2(x, y)$ не принимает отрицательных значений.

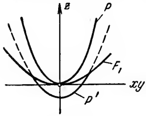

Рис. 19.

Покажем теперь, что положительность гауссовой кривизны поверхности F_1 в точке O влечет за собой положительную определенность формы $\varphi_2(x, y)$. Рассмотрим параболоид P:

$$z = \frac{1}{2}\,(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2) + \frac{\varepsilon_0}{2}\,(x^2+y^2),$$

где ε_0 — малое положительное число. Параболоид P в точке $\overline{X}$ (начале координат) касается поверхности F_1 и вблизи этой точки располагается с внутренней стороны поверхности (рис. 19). Действительно, при достаточно малом x^2+y^2 имеем $\varepsilon(x, y)<\varepsilon_0$, т. е. $z(x, y)|_{F_1}\leqslant z(x,\ y)|_P$, причем равенство в достаточно малой окрестности точки $\overline{X}$ достигается только в самой этой точке. Не ограничивая общности, можно считать, что весь параболоид P располагается с внутренней стороны поверхности F_1. Этого всегда можно добиться, рассматривая не всю поверхность, а достаточно малую окрестность точки $\overline{X}$, где будут проходить все наши построения.

Сместим параболоид P в сторону $z<0$ на малое расстояние h. При этом некоторая часть P' параболоида окажется с внешней стороны поверхности (рис. 19). Пусть F_1' — та часть поверхности, которая проектируется на P' прямыми, параллель-

иыми оси z. Кривизиа параболоида в области P' ие меиьше кривизиы поверхиости F_1 в области F_1', так как для каждой касательной плоскости поверхиости в области F_1' существует параллельиая касательиая плоскость параболоида в области P'. При $h \to 0$ область P' иа параболоиде и область F_1' иа поверхиости стягиваются к точке $\bar{X}$. При этом, ввиду касания обеих поверхиостей плоскости xy, при $h=0$ отиошеиие площадей $\sigma(P')/\sigma(F_1') \to 1$ при $h \to 0$. Так как кривизиы областей P' и F_1' связаны нераveиством $\omega(P') \geqslant \omega(F_1')$, то

$$\lim_{h \to 0} \frac{\omega(P')}{\sigma(P')} \geqslant \lim_{h \to 0} \frac{\omega(F_1')}{\sigma(F_1')}.$$

Таким образом, гауссова кривизиа поверхиости F_1 в точке $\bar{X}$ не больше гауссовой кривизиы параболоида P в этой точке. Если форма $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$ ие является положительио определеииой, то $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$ и, следовательио, кривизиа параболоида

$$K=(a_{11}+\varepsilon_0)(a_{22}+\varepsilon_0)-a_{12}^2$$

мала вместе с ε_0. Взяв достаточио малым ε_0, приходим к противоречию, так как кривизиа поверхиости F_1 строго больше иуля. Итак, форма $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$ положительио определеииая.

Построим теперь два параболоида:

$$P^+\colon\ z=\frac{1}{2}(a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2)+\frac{\varepsilon_0}{2}(x^2+y^2),$$

$$P^-\colon\ z=\frac{1}{2}(a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2)-\frac{\varepsilon_0}{2}(x^2+y^2),$$

где ε_0 — малое положительное число. В окрестиости точки $\bar{X}$ параболоид P^+ располагается с виутреиией стороиы поверхиости F_1, а параболоид P^- — с виешией стороиы этой поверхности. Повторяя дословио предыдущее рассуждение, приходим к выводу, что гауссова кривизна поверхиости F_1 в точке $\bar{X}$ ие больше гауссовой кривизиы параболоида P^+ и ие меиьше гауссовой кривизиы параболоида P^- в той же точке $\bar{X}$, т. е.

$$(a_{11}-\varepsilon_0)(a_{22}-\varepsilon_0)-a_{12}^2 \leqslant K_{F_1}(\bar{X}) \leqslant (a_{11}+\varepsilon_0)(a_{22}+\varepsilon_0)-a_{12}^2.$$

Так как ε_0 — любое достаточио малое положительиое число, то гауссова кривизиа поверхиости F_1 в точке $\bar{X}$ равиа

$$K_{F_1}(\bar{X})=a_{11}a_{22}-a_{12}^2.$$

Обратимся снова к паре поверхностей F_1 и F_2. Принимая во внимание неравенства (2) и (5), получаем

$$0 \leqslant -\nu_2^*(X)\,n < \beta_4' s^2(X).$$

Представим вектор $\nu_2^*(X)$, так же как вектор $\nu_1(X)$, в виде суммы двух векторов

$$\nu_2^*(X) = n_2^*\delta_2^*(X) + t_2^*(X).$$

Тогда

$$0 \leqslant -nn_2^*\delta_2^*(X) - nt_2^*(X) < \beta_4' s^2(X).$$

Отсюда

$$\delta_2^*(X) < \beta_4 s^2(X),$$

где β_4 — некоторая постоянная. Подставляя в неравенство (2) выражения

$$\nu_1(X) = n_1\delta_1(X) + t_1(X), \quad \nu_2^*(X) = n_2^*\delta_2^*(X) + t_2^*(X)$$

и принимая во внимание, что $nn_1 = -n_2^*n \neq 0$ и $t_1(X)/\delta_1(X)$, $t_2(X)/\delta_2(X) \to 0$, когда $s(X) \to 0$, а $\delta_1(X)/s^2(X)$, $\delta_2^*(X)/s^2(X)$ ограничены, приходим к неравенству

$$\delta_1(X) - \delta_2^*(X) > cs^2(X), \tag{6}$$

где c — положительная постоянная.

Совместим точку $\overline{X}$ поверхности F_1 с соответствующей по изометрии точкой поверхности F_2 так, чтобы совпали и соответствующие по изометрии направления в этих точках. Приняв общую касательную плоскость поверхностей F_1 и F_2 в точке $\overline{X}$ за плоскость xy, представим уравнения этих поверхностей в виде

$$F_1:\ z = \frac{1}{2}(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2) + \varepsilon_1(x^2+y^2),$$

$$F_2:\ z = \frac{1}{2}(b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2) + \varepsilon_2(x^2+y^2),$$

где ε_1 и $\varepsilon_2 \to 0$ при $x^2+y^2 \to 0$. Так как обе поверхности, будучи изометричными, имеют в начале координат одинаковую гауссову кривизну, то

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = b_{11}b_{22} - b_{12}^2. \tag{7}$$

Пусть X_1 — точка поверхности F_1, близкая к $\overline{X}_1$, и X_2 — соответствующая по изометрии точка поверхности F_2. Соединим эти точки с $\overline{X}$ кратчайшими γ_1 и γ_2 на поверхностях F_1 и F_2. Так как соответствующие по изометрии направления поверхностей F_1 и F_2 в точке $\overline{X}$ совпадают, то кратчайшие γ_1 и γ_2 имеют в точке $\overline{X}$ общую полукасательную t. Отложим на полукасательной t от-

резок s, равный длине кратчайших γ_1, γ_2. Пусть X — конец этого отрезка. По теореме § 2 направления отрезков XX_1 и XX_2 близки к направлению нормали к поверхностям F_1, F_2 в точке $\overline{X}$, т. е. близки к направлению оси z. Отсюда следует, что координаты x_1, y_1 точки X_1 и координаты x_2, y_2 точки X_2 отличаются от координат x, y точки X на величину порядка $\overline{\varepsilon}\sqrt{x^2+y^2}$, где $\overline{\varepsilon}\to 0$, когда $x^2+y^2\to 0$. Принимая это во внимание, получаем для расстояний δ_1 и δ_2 точек X_1 и X_2 от плоскости xy выражения

$$\delta_1=\frac{1}{2}(a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2)+\overline{\varepsilon}_1(x^2+y^2),$$

$$\delta_2=\frac{1}{2}(b_{11}x^2+2b_{12}xy+b_{22}y^2)+\overline{\varepsilon}_2(x^2+y^2).$$

Согласно неравенству (6)

$$\delta_1-\delta_2>cs^2,$$

где c — положительная постоянная. Так как величина s имеет порядок $\sqrt{x^2+y^2}$, то из указанного неравенства следует, что

$$\frac{1}{2}(a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2)-\frac{1}{2}(b_{11}x^2+2b_{12}xy+b_{22}y^2)>\frac{\varepsilon_0}{2}(x^2+y^2),$$

где ε_0 — положительная постоянная. Отсюда

$$a_{11}a_{22}-a_{12}^2>(b_{11}+\varepsilon_0)(b_{22}+\varepsilon_0)-b_{12}^2.$$

А это противоречит равенству (7), так как b_{11}, b_{22} и ε_0 больше нуля. Итак, если точка $\overline{X}$ поверхности F_1 и соответствующая ей по изометрии точка поверхности F_2 являются точками двукратной дифференцируемости поверхностей, то поверхность Φ в точке с вектором $r(\overline{X})=r_1(\overline{X})+\overset{*}{r}_2(\overline{X})$ не может иметь положительную нижнюю кривизну.

Лемма доказана полностью.

§ 6. Доказательство однозначной определенности выпуклых шапок с регулярной метрикой

В настоящем параграфе будет доказана теорема об однозначной определенности выпуклых шапок с регулярной метрикой. Эта теорема используется в центральном пункте доказательства регулярности выпуклой поверхности с регулярной метрикой.

Теорема. *Изометричные выпуклые шапки с регулярной метрикой и положительной гауссовой кривизной равны.*

Доказательству этой теоремы мы предпошлем две леммы.

Лемма 1. *Пусть F_1 и F_2 — две изометричные выпуклые поверхности, однозначно проектирующиеся на плоскость xy. Пусть*

$z_1(X)$ — координата z точки X поверхности F_1 и $z_2(X)$ — координата z соответствующей по изометрии точки поверхности F_2.
Тогда, если для всех точек X

$$z_1(X) = z_2(X),$$

то поверхности F_1 и F_2 равны.

Доказательство. Проведем через две произвольные точки X_1 и Y_1 поверхности F_1 плоскость, перпендикулярную плоскости xy. Эта плоскость пересекает поверхность F_1 по выпуклой кривой. Отрезок этой кривой между точками X_1 и Y_1 обозначим через γ_1. Пусть γ_2 — соответствующая по изометрии кривая на поверхности F_2, соединяющая точки X_2 и Y_2. Пусть Z — цилиндр с образующими, параллельными оси z, проектирующий кривую γ_2 на плоскость xy. Развернем цилиндр Z на плоскость. При этом, так как $z_1(X) = z_2(X)$, кривая γ_2 перейдет в плоскую кривую, равную γ_1.

При разворачивании цилиндра Z на плоскость пространственное расстояние между точками X_2 и Y_2 не уменьшается. Отсюда следует, что пространственное расстояние между точками X_2 и Y_2 поверхности F_2 не больше пространственного расстояния между точками X_1 и Y_1 поверхности F_1. Поменяв ролями поверхности F_1 и F_2, придем к обратному заключению. Именно, пространственное расстояние между точками X_2 и Y_2 поверхности F_2 не меньше пространственного расстояния между соответствующими точками X_1 и Y_1 поверхности F_1. Отсюда следует, что пространственное расстояние между точками X_1 и Y_1 поверхности F_1 равно пространственному расстоянию между соответствующими по изометрии точками X_2 и Y_2. А это значит, что поверхности F_1 и F_2 равны. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если существуют две не равные изометричные выпуклые шапки F_1 и F_2 с регулярной метрикой и положительной гауссовой кривизной, то движением или движением и зеркальным отражением их можно расположить так, что будут выполняться следующие условия:*

1. *В начале координат O совпадают две соответствующие по изометрии точки поверхностей F_1 и F_2.*

2. *В этой общей точке O соответствующие по изометрии направления поверхностей F_1 и F_2 совпадают.*

3. *Обе поверхности расположены по одну сторону их общей касательной плоскости в точке O, причем эта плоскость не перпендикулярна плоскости xy.*

4. *Если $z_1(X)$ — координата z произвольной точки X поверхности F_1 и $z_2(X)$ — координата z соответствующей по изометрии точки поверхности F_2, то $z_1(X) - z_2(X) \leqslant 0$, причем, если конец вектора $r_1(X) + r_2(X)$ проектируется в точку полуплоскости $x \geqslant 0$, исключая точку O, то $z_1(X) - z_2(X) < 0$.*

Доказательство. Пусть край каждой шапки F_1 и F_2 лежит в плоскости xy, а сами шапки в полупространстве $z<0$. Рассмотрим разность $z(X)=z_1(X)-z_2(X)$. Так как шапки F_1 и F_2 не равны, а вдоль края шапки $z_1-z_2=0$, то найдутся точки X, для которых $z_1(X)-z_2(X)\neq 0$ (лемма 1). Не ограничивая общности, можно считать, что

$$\max z(X)=m>0.$$

Действительно, если $m=0$, то можно поменять ролями шапки F_1 и F_2. Обозначим M_1 множество тех точек шапки F_1, для которых $z(X)=m$. Очевидно, M_1 представляет собой замкнутое множество, не содержащее точек края шапки (на краю $z(X)=0$). Обозначим M_2 множество точек поверхности F_2, соответствующее по изометрии M_1. Построим плоскости $z=h_1$ и $z=h_2$, упирающиеся в шапки F_1 и F_2 снизу. Тогда могут представиться следующие две возможности:

1. Множество M_1 лежит в плоскости $z=h_1$.
2. Есть точки множества M_1, лежащие над плоскостью $z=h_1$.

Рассмотрим первый случай.

Так как гауссова кривизна поверхности F_1 положительна, то эта поверхность строго выпуклая (теорема 2 § 3). Поэтому в рассматриваемом случае множество M_1 состоит только из одной точки X_1 — точки касания плоскости $z=h_1$ с поверхностью F_1. В этой точке $dz_1=0$, $dz=0$. Поэтому $dz_2=0$. Следовательно, в точке X_2 поверхности F_2 касательная плоскость тоже параллельна плоскости xy. Пусть поверхности F_1 и F_2 одинаково ориентированы. Этого всегда можно добиться зеркальным отражением одной из поверхностей в плоскость, перпендикулярную плоскости xy. Тогда параллельным переносом и поворотом около оси z можно совместить поверхности F_1 и F_2 точками X_1 и X_2 и соответствующими по изометрии направлениями в этих точках. Если теперь перенести поверхности F_1 и F_2 одновременно так, чтобы их общая точка $X_1\equiv X_2$ совместилась с началом координат O, то для поверхностей F_1 и F_2 в этом расположении действительно выполняются все условия 1—4 леммы.

Рассмотрим второй случай. В этом случае есть точки, принадлежащие множеству M_1, лежащие над плоскостью $z=h_1$. Обозначим

$$c_1=\max z_1(X), \quad c_2=\max z_2(X) \text{ для } X\subset M_1.$$

Проведем плоскости $z=c_1$ и $z=c_2$. По определению числа c_1 нет точек из M_1, лежащих над плоскостью $z=c_1$. А так как M_1 — замкнутое множество, то существует замкнутое его подмножество $\overline{M}_1$, лежащее в плоскости $z=c_1$. Аналогично, нет точек в M_2, лежащих над плоскостью $z=c_2$, но есть точки, лежащие в этой плоскости. Множество этих точек обозначим $\overline{M}_2$. Пусть $X\in\overline{M}_1$.

Тогда $z_1(X)=c_1$, $z_2(X)\leqslant c_2$. Поэтому $m=\max\,(z_1(X)-z_2(X))\geqslant \geqslant c_1-c_2$. С другой стороны, пусть X — точка $\overline{M}_1$, которой по изометрии на F_2 соответствует точка множества $\overline{M}_2$. Тогда $z_1(X)\leqslant c_1$, $z_2(X)=c_2$ и, следовательно, $m\leqslant c_1-c_2$. Отсюда следует, что $m=c_1-c_2$. Так как для всех точек X из $\overline{M}_1$ имеем $z_1(X)=c_1$, а $m=c_1-c_2$, то множеству $\overline{M}_1$ поверхности F_1 по изометрии на поверхности F_2 соответствует множество $\overline{M}_2$.

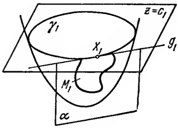

Рис. 20.

Множество $\overline{M}_1$ расположено на кривой γ_1 пересечения плоскости $z=c_1$ и поверхности F_1. Эта кривая строго выпуклая, так как строго выпукла поверхность F_1. Проведем в точке X_1 множества $\overline{M}_1$ касательную g_1 к кривой γ_1. Плоскость α, параллельная оси z, проходящая через прямую g_1, очевидно, является опорной для множества M_1, и точка X_1 — единственная точка множества M_1, лежащая в этой плоскости (рис. 20).

Так как точка X_1 принадлежит множеству M_1, то в этой точке

$$\frac{d}{ds}(z_1-z_2)=0,$$

где d/ds обозначает дифференцирование по дуге любой геодезической на F_1, выходящей из точки X_1. Но $dz_1/ds=\cos\vartheta_1$, $dz_2/ds=\cos\vartheta_2$, где ϑ_1 и ϑ_2 — углы, образованные соответствующими по изометрии направлениями поверхностей F_1 и F_2 в соответствующих по изометрии точках X_1 и X_2 с положительной полуосью z.

Плоскость $z=c_2$ пересекает поверхность F_2 по кривой γ_2, на которой лежит точка X_2, соответствующая по изометрии X_1. Плоскость, параллельная оси z, проходящая через касательную к кривой γ_2 в точке X_2, является опорной для множества M_2, причем точка X_2 — единственная точка множества M_2, лежащая в этой плоскости.

Так как соответствующие по изометрии направления на поверхностях F_1 и F_2 в точках X_1 и X_2 образуют с положительной полуосью z одинаковые углы, то параллельным переносом с поворотом около оси z поверхности F_1 и F_2 можно совместить точками X_1 и X_2 и соответствующими по изометрии направлениями в этих точках. При этом обе поверхности будут находиться по одну сторону их общей касательной плоскости.

После такого совмещения поверхностей F_1 и F_2 точками X_1 и X_2 и соответствующими по изометрии направлениями в этих точках перенесем параллельно обе поверхности так, чтобы их

общая точка $X_1 \equiv X_2$ совпала с началом координат O, а затем повернем их около оси z так, чтобы прямая g_1 совпала с осью y и множество M_1 проектировалось в полуплоскость $x \leqslant 0$. При этом множество M_2 тоже проектируется в полуплоскость $x \leqslant 0$. И так как в полуплоскость $x \geqslant 0$ не проектируется ни одна точка множеств M_1 и M_2, кроме $X_1 \equiv X_2 \equiv O$, то для поверхностей F_1 и F_2 в этом расположении действительно выполняются условия 1—4 леммы. Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы. Пусть F_1 и F_2 — изометричные выпуклые шапки с регулярной метрикой и положительной гауссовой кривизной. Допустим, теорема неверна, и, следовательно, шапки F_1 и F_2 не равны. Тогда по лемме 2 их можно расположить таким образом, что для них будут выполнены условия 1—4. Именно:

1. В начале координат O совпадают две соответствующие по изометрии точки поверхностей F_1 и F_2.

2. В этой общей точке O соответствующие по изометрии направления поверхностей F_1 и F_2 совпадают.

3. Обе поверхности расположены по одну сторону их общей касательной плоскости в точке O, причем эта плоскость не перпендикулярна плоскости xy.

4. Если $z_1(X)$ — координата z произвольной точки поверхности F_1 и $z_2(X)$ — координата z соответствующей по изометрии точки поверхности F_2, то $z_1(X)-z_2(X) \leqslant 0$, причем если конец вектора $r_1(X)+r_2(X)$ проектируется в точку полуплоскости $x \geqslant 0$, исключая точку O, то $z_1(X)-z_2(X)<0$.

Пусть $r_1(X)$ — вектор произвольной точки X поверхности F_1, а $r_2(X)$ — вектор соответствующей по изометрии точки поверхности F_2^* — зеркального отражения поверхности F_2 в плоскости xy. По лемме 2 § 5 вектор-функция $r(X)=r_1(X)+r_2^*(X)$, рассматриваемая в окрестности точки O, задает гладкую поверхность Φ, обладающую следующими свойствами:

1. На поверхности Φ нет точек, где нижняя кривизна была бы положительна, а верхняя равнялась бесконечности.

2. Если точка X поверхности F_1 и соответствующая ей по изометрии точка поверхности F_2 являются точками двукратной дифференцируемости, то поверхность Φ в точке $r(X)$ не может иметь положительной нижней кривизны.

Поверхность Φ в окрестности начала координат O однозначно проектируется на плоскость xy и, следовательно, допускает задание с помощью гладкой функции:

$$z=\varphi(x, y).$$

В силу свойства 4 взаимного расположения шапок F_1 и F_2 функция $\varphi(x,y)$ удовлетворяет условию: $\varphi(x,y) \leqslant 0$ при $x \geqslant 0$,

причем равенство достигается только в начале координат, т. е. при $x=y=0$.

Назовем точку X поверхности F_1 *особой*, если или она сама не является точкой двукратной дифференцируемости или если соответствующая ей на F_2 точка не является точкой двукратной дифференцируемости поверхности F_2. Множество M особых точек поверхности F_1 имеет поверхностную меру нуль. Множеству M поверхности F_1 на поверхности Φ соответствует некоторое множество $r(M)$. Мы утверждаем, что и это множество на поверхности Φ имеет поверхностную меру нуль. Действительно, введем на поверхностях F_1 и F_2^* общую регулярную параметризацию u, v. Тогда вектор-функции $r_1(u, v)$ и $r_2^*(u, v)$, задающие поверхности F_1 и F_2^*, будут гладкими функциями (лемма 1 § 5), причем вблизи точки O, где ведутся нами рассмотрения, $r_{1u}\times r_{1v}\neq 0$. Отсюда следует, что прообраз M' множества M на плоскости u, v тоже имеет меру нуль. Так как вектор-функция $r(u, v)$ гладкая, то множество $r(M)$ на поверхности Φ имеет меру нуль.

Обозначим через $\overline{M}$ проекцию множества $r(M)$ на плоскость xy. Поверхность Φ по отношению к множеству $\overline{M}$ обладает следующими свойствами. Если точка P поверхности Φ проектируется на плоскость xy в точку множества $\overline{M}$, то в этой точке не может быть одновременно положительной нижней и бесконечной верхней кривизны. Если же проекция точки P на плоскость xy не принадлежит $\overline{M}$, то в точке P нижняя кривизна не может быть положительной.

Рассмотрим часть поверхности Φ, которая проектируется на плоскость xy в малый полукруг $\varkappa$: $x^2+y^2\leqslant\varepsilon$, $x\geqslant 0$. Для точек поверхности Φ, которые проектируются в полуокружность $x^2+y^2=\varepsilon$, $x\geqslant 0$, координата $z(x, y)<-\varepsilon'<0$, где ε' — малое положительное число. Проведем полуплоскость $z=-\frac{\varepsilon'}{2\varepsilon}x$, $x\geqslant 0$. Так как поверхность Φ касается плоскости xy в точке O, то построенная полуплоскость отрезает от поверхности Φ некоторую горбушку $\overline{\Phi}$, которая проектируется в полукруг $\varkappa$.

Согласно теореме 1 § 4 существует выпуклая шапка Ω с краем в плоскости xy, охватывающим полукруг $\varkappa$, обращенная выпуклостью в сторону $z>0$ и обладающая следующими свойствами:

Если проекция гладкой точки X шапки Ω на плоскость xy не принадлежит множеству $\overline{M}$, то нижняя кривизна шапки в точке X положительна, если же точка X проектируется на плоскость xy в точку множества $\overline{M}$, то нижняя кривизна шапки в этой точке положительна, а верхняя равна бесконечности. Пусть эта шапка задается уравнением $z=\omega(x, y)$. Рассмотрим

поверхность, задаваемую уравнением

$$z = \lambda\omega(x, y) - \frac{\varepsilon'}{2\varepsilon} x.$$

Эта поверхность — будем обозначать ее $\overline{\Omega}$ — тоже обладает свойствами поверхности Ω (теорема 2 § 4). Ее край лежит в плоскости $z = -\frac{\varepsilon'}{2\varepsilon} x$ и охватывает край поверхности $\overline{\Phi}$. При достаточно большом λ поверхность $\overline{\Omega}$ расположена над поверхностью $\overline{\Phi}$.

Если теперь поверхность $\overline{\Omega}$ аффинно прижимать к поверхности $\overline{\Phi}$, уменьшая λ, то в некоторый момент она коснется поверхности $\overline{\Phi}$ в некоторой точке A. Так как поверхность $\overline{\Phi}$ касается поверхности $\overline{\Omega}$ и расположена с внутренней стороны этой поверхности, то нижняя кривизна поверхности $\overline{\Phi}$ в точке A не меньше нижней кривизны $\overline{\Omega}$ и, следовательно, положительна. Если, кроме того, точка A проектируется на плоскость xy в точку множества $\overline{M}$, то верхняя кривизна поверхности $\overline{\Phi}$, будучи не меньше верхней кривизны $\overline{\Omega}$, равна бесконечности. Мы пришли к противоречию, так как указанные возможности для верхней и нижней кривизны поверхности $\overline{\Phi}$ в точке A исключаются леммой 2 § 5. Теорема доказана.

§ 7. Внутренние оценки для некоторых геометрических величин вдоль края аналитической шапки

Основным результатом настоящей главы является теорема о регулярности выпуклой поверхности с регулярной метрикой. Идея доказательства этой теоремы в общих чертах состоит в следующем. Пусть F — выпуклая поверхность с регулярной метрикой и положительной гауссовой кривизной. Поверхность F гладкая и строго выпуклая (теоремы 1, 2 § 3). Пусть P — произвольная точка поверхности F. Отрежем от поверхности F малую шапку ω плоскостью, параллельной касательной плоскости в точке P. Оказывается, существует регулярная шапка $\overline{\omega}$, изометричная ω. По теореме § 6 шапки ω и $\overline{\omega}$ равны. Отсюда следует регулярность поверхности F в окрестности произвольной точки P, что и требовалось доказать.

Доказательство существования регулярной шапки основано на теореме С. Н. Бернштейна [21] о разрешимости уравнения Дарбу, к рассмотрению которого сводится задача о построении поверхности, реализующей заданную метрику. Указанная теорема гарантирует разрешимость уравнения, если существуют

априорные оценки для предполагаемого решения и его производных до второго порядка. Такие оценки легко получаются, если известны внутренние оценки (т. е. оценки, определяемые внутренней метрикой) для нормальных кривизн шапки и угла наклона ее касательных плоскостей к плоскости основания. Получение этих оценок и составляет содержание ближайших двух параграфов.

Теорема. *Пусть ω — аналитическая выпуклая шапка с положительной гауссовой кривизной и положительной геодезической кривизной края.*

Тогда для нормальных кривизн вдоль края шапки, а также для тангенса угла наклона касательных плоскостей к плоскости основания существует оценка в зависимости только от величин, определяемых внутренней метрикой шапки, т. е. ее линейным элементом.

Доказательство. Пусть ω — рассматриваемая выпуклая шапка с аналитической метрикой и положительной гауссовой кривизной. Примем плоскость основания шапки за плоскость xy, а ось z направим так, чтобы шапка была обращена выпуклостью в сторону $z<0$. Введем на поверхности шапки аналитическую параметризацию u, v. Пусть $r(u, v)$ — вектор-функция, задающая поверхность ω, а $z(u, v)$ — ее z-компонента. Согласно деривационным формулам теории поверхностей имеем

$$z_{uu}=\Gamma_{11}^{1}z_u+\Gamma_{11}^{2}z_v+L\zeta,$$
$$z_{uv}=\Gamma_{12}^{1}z_u+\Gamma_{12}^{2}z_v+M\zeta,$$
$$z_{vv}=\Gamma_{22}^{1}z_u+\Gamma_{22}^{2}z_v+N\zeta,$$

где L, M, N — коэффициенты второй квадратичной формы поверхности, ζ — компонента единичного вектора нормали по оси z, а Γ_{ij}^{k} — символы Христоффеля второго рода.

Величина ζ просто выражается через коэффициенты линейного элемента поверхности $ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$ и первые производные z_u, z_v. Действительно, если $d\sigma$ — элемент площади поверхности, а $d\bar{\sigma}$ — его проекция на плоскость xy, то $\zeta=d\bar{\sigma}/d\sigma$. Так как линейный элемент плоскости xy можно представить в виде $d\bar{s}^2=ds^2-dz^2$, то ζ^2 есть отношение дискриминантов форм $d\bar{s}^2$ и ds^2, т. е.

$$\zeta^2=\frac{\left(E-z_u^2\right)\left(G-z_v^2\right)-\left(F-z_uz_v\right)^2}{EG-F^2}.$$

Составляя выражение $LN-M^2$ из правых частей деривационных формул и замечая, что

$$\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$$

есть гауссова кривизна K, получим

$$\left(z_{uu}-\Gamma_{11}^{1}z_u-\Gamma_{11}^{2}z_v\right)\left(z_{vv}-\Gamma_{22}^{1}z_u-\Gamma_{22}^{2}z_v\right)-$$
$$-\left(z_{uv}-\Gamma_{12}^{1}z_u-\Gamma_{12}^{2}z_v\right)^2-K\,\frac{\left(E-z_u^2\right)\left(G-z_v^2\right)-\left(F-z_uz_v\right)^2}{EG-F^2}=0.$$

Это и есть уравнение Дарбу. Если его левую часть обозначить через Φ, то

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z_{uu}}\,\frac{\partial\Phi}{\partial z_{vv}}-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z_{uv}}\right)^2=K\zeta^2.$$

Таким образом, для поверхности с положительной гауссовой кривизной (K) в каждой точке, где касательная плоскость не перпендикулярна плоскости xy, уравнение Дарбу будет эллиптического типа.

В случае полугеодезической параметризации поверхности (линейный элемент $ds^2=du^2+c^2\,dv^2$) уравнение Дарбу принимает вид

$$r\,(t+\alpha)-(s-\beta)^2+\gamma=0, \tag{1}$$

где

$$\alpha=cc_up-\frac{c_v}{c}\,q,\qquad \beta=\frac{c_u}{c}\,q,\qquad \gamma=\frac{c_{uu}}{c}\left(c^2-c^2p^2-q^2\right),$$

а p, q, r, s, t — обозначения для первых и вторых производных функции $z(u,v)$.

Пусть P — произвольная точка поверхности и τ — произвольное направление из этой точки. Проведем геодезическую γ из точки P в направлении τ и введем полугеодезические координаты, включив геодезическую γ в семейство линий u. При этом $\Gamma_{11}^{1}=0$, $\Gamma_{11}^{2}=0$, и первая из деривационных формул дает

$$z''_{ss}=k_\gamma\cos\vartheta,$$

где дифференцирование z выполнено по дуге геодезической γ, k_γ — нормальная кривизна поверхности в направлении геодезической, ϑ — угол между касательной плоскостью поверхности и плоскостью xy. Из этой формулы видно, что для получения внутренних оценок нормальных кривизн поверхности достаточно оценить первые и вторые производные функции $z(u,v)$. Для получения таких оценок целесообразно ввести на поверхности шапки ω полугеодезическую параметризацию, приняв за линию $u=0$ границу γ шапки ω, за координатные линии семейства u — геодезические, перпендикулярные γ, за семейство линий v — их ортогональные траектории. В качестве параметров u, v примем дугу вдоль линии γ и дугу вдоль линий семейства u. Уравнение Дарбу при такой параметризации поверхности имеет вид (1). Оценим первые и вторые производные $z(u,v)$ вдоль края шапки.

Во-первых, заметим, что существует число u_0, зависящее только от метрики шапки и от минимума $\varkappa_0$ геодезической кривизны граничной кривой γ, такое, что для всех точек шапки ω, для которых $u \leqslant u_0$, имеем

$$|p|<1 \quad \text{и} \quad |q|<2.$$

Действительно, $|p| = \sin\vartheta$, где ϑ — угол, образуемый касательной к геодезической семейства u с плоскостью xy. Этот угол всегда меньше $\pi/2$, так как все касательные плоскости шапки ω образуют с плоскостью xy углы, меньшие $\pi/2$. Далее, $|q| = \frac{1}{c}\sin\varphi$, где φ — угол, образуемый касательной к линии семейства v с плоскостью xy, а c соответствует линейному элементу

$$ds^2 = du^2 + c^2\,dv^2.$$

Так как c на линии γ равно единице, то можно указать такое число u_0, что если $u \leqslant u_0$, то $c > \frac{1}{2}$. При этом, очевидно, $|q|<2$.

Введем на плоскости прямоугольные декартовы координаты u, v и обозначим через G бесконечную полосу, ограниченную осью $u=0$ и прямой $u=u_0$. Определим в полосе G функцию $\zeta(u, v)$ условиями:

1) функция $\zeta(u, v)$ периодическая по v с периодом l, где l — длина кривой γ;

2) для $0 \leqslant u \leqslant u_0$ и $0 \leqslant v < l$ положим $\zeta(u, v) = q$. Построенная функция ζ равна 0 на оси u, а на прямой $u=u_0$ имеем $|\zeta|<2$.

Рассмотрим поверхность Φ, заданную уравнением $\zeta=\zeta(u, v)$ в полосе $0 \leqslant u \leqslant u_0$. Проведем через прямую $u=0$ плоскость σ, образующую с плоскостью u, v наименьший угол так, чтобы поверхность Φ была расположена под этой плоскостью. Относительно этой плоскости σ могут быть два предположения: либо она упирается в край поверхности Φ, который проектируется на прямую $u=u_0$, либо она касается поверхности Φ в некоторой точке. В первом случае $\zeta_u < \frac{2}{u_0}$ при $u=0$ и, следовательно, $s < \frac{2}{u_0}$ вдоль границы шапки ω.

Рассмотрим второй случай. Дифференцируя уравнение (1) по v, получим:

$$q_{uu}(t+\alpha) - 2q_{uv}(s-\beta) + q_{vv}r + r\alpha_v + 2(s-\beta)\beta_v + \gamma_v = 0. \quad (2)$$

В точке касания плоскости σ с поверхностью Φ имеем $q_v = t = 0$. Поэтому в этой точке $\alpha > 0$, так как дискриминант уравнения (1)

$$\Delta = (t+\alpha)r - (s-\beta)^2 > 0,$$

Это дает право выразить r в точке касания из уравнения (1):

$$r=\frac{(s-\beta)^2-\gamma}{\alpha}$$

Обращаясь теперь к уравнению (2), мы видим, что в точке касания плоскости σ с поверхностью Φ первые три слагаемые дают неположительное число. Действительно, форма

$$\xi^2(t+\alpha)+2\xi\eta(s-\beta)+\eta^2 r$$

положительно определенная, так как $r>0$ и $\Delta>0$. Далее, форма

$$\xi^2 q_{uu}+2\xi\eta q_{uv}+\eta^2 q_{vv}$$

не принимает положительных значений, так как поверхность Φ лежит под плоскостью σ. Отсюда следует, что

$$q_{uu}(t+\alpha)-2q_{uv}(s-\beta)+q_{vv}r\leqslant 0.$$

Сумму остальных слагаемых уравнения (2) можно записать в виде

$$\frac{s^3cc_u+O_2(s)}{\alpha},$$

где $O_2(s)$ — многочлен второй степени относительно s с коэффициентами, модули которых без труда оцениваются сверху через верхнюю грань модуля функции $c(u, v)$ и ее производных до третьего порядка.

Так как $\alpha>0$, $c>\frac{1}{2}$, а $c_u<-\varkappa_0$, то при s, большем некоторого числа s_0, определяемого только внутренней метрикой поверхности и геодезической кривизной $\varkappa$ кривой γ, сумма остальных членов уравнения (2) отрицательна. Число s_0 и есть тот предел, которого производная s в точке касания не может превзойти. Но значения производной $s=q_u$ вдоль $u=0$ во всяком случае не больше, чем ее значение в точке касания. Поэтому число s_0 служит верхним пределом производной s вдоль кривой γ. Очевидно, оценкой для s снизу является $-s_0$.

Оценку производной r на границе шапки легко получить, если известен нижний предел $|p|$ вдоль этой границы. Но его нетрудно получить из геометрических соображений.

Кривая γ в плоскости xy ограничивает некоторую область $\bar{\omega}$. Так как геодезическая кривизна кривой γ на поверхности шапки везде $\geqslant\varkappa_0$, то ее обычная кривизна тоже $\geqslant\varkappa_0$ *).

*) Обычная кривизна кривой связана с ее геодезической кривизной равенством $k\cos\vartheta=k_g$, где ϑ — угол между соприкасающейся плоскостью кривой (в данном случае плоскостью основания шапки) и касательной плоскостью к поверхности.

Покажем, что в область $\bar{\omega}$ можно поместить круг $\tilde{\omega}$, радиус которого зависит только от $\varkappa_0$ и длины кривой γ. Для этого проведем диаметр области $\bar{\omega}$. Возьмем на нем две точки A и B, близкие к его концам (рис. 21). Построим теперь луночку из дуг окружностей радиуса $1/\varkappa_0$ с концами в точках A и B. Эта луночка расположена целиком внутри $\bar{\omega}$. Действительно, если радиус дуг окружностей достаточно велик, луночка, очевидно, находится внутри $\bar{\omega}$. Будем непрерывно уменьшать радиус дуг окружностей. Луночка при этом увеличивается, но не выходит за пределы $\bar{\omega}$, пока радиус дуг окружности остается больше $1/\varkappa_0$, так как дуга окружности радиуса больше $1/\varkappa_0$ не может коснуться кривой γ, кривизна которой не меньше $\varkappa_0$. Очевидно, внутри луночки можно построить круг $\tilde{\omega}$ радиуса не меньше ρ_0, причем ρ_0 зависит только от $\varkappa_0$ и диаметра области $\bar{\omega}$. И так как диаметр области $\bar{\omega}$ не меньше l/π, где l — длина кривой γ, то можно считать, что ρ_0 зависит только от $\varkappa_0$ и длины l кривой γ.

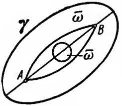

Рис. 21.

Проведем теперь от центра круга $\tilde{\omega}$ полупрямую g, перпендикулярную к плоскости основания шапки ω, в сторону, противоположную той, куда обращена выпуклость шапки. Построим сферу Ω достаточно далеко от шапки с центром на полупрямой g и кривизной меньшей, чем наименьшая кривизна шапки ω. Удалим из области $\bar{\omega}$ круг $\tilde{\omega}$. Оставшаяся часть области $\bar{\omega}$ и шапка ω образуют некоторую поверхность Φ, край которой является окружностью круга $\tilde{\omega}$. Будем теперь смещать сферу Ω вдоль полупрямой g в направлении поверхности Φ. В некоторый момент сфера Ω упрется либо в край поверхности Φ, т. е. окружность круга $\tilde{\omega}$, либо в шапку ω. Вторая возможность исключается, так как кривизна сферы Ω меньше наименьшей кривизны шапки. Пусть h — расстояние, на которое выступает эта сфера в положении, когда она упирается в окружность круга $\tilde{\omega}$. Построим конус, основанием которого служит основание шапки ω, а вершиной — точка, лежащая внутри шапки, удаленная от плоскости основания шапки на h и проектирующаяся в центр круга $\tilde{\omega}$. Этот конус лежит внутри шапки. Поэтому его касательные плоскости вдоль γ образуют с плоскостью основания углы, большие, чем углы, образуемые касательными плоскостями шапки. Это дает возможность взять в качестве нижней грани для $|p|$ число $\delta = \dfrac{h}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}}$, где l — длина кривой γ.

Переходим к оценке производной r. Вдоль кривой γ имеем $t=0$, $q=0$, $\delta<|p|<1$. Из уравнения (1) получаем вдоль кривой

$$r=\frac{(s-\beta)^2-\gamma}{cc_u p}.$$

Так как $c_u<-\varkappa_0$, $|p|>\delta$ и для $|s|$ известна внутренняя оценка, то оценка может быть получена и для $|r|$.

Оценку угла между касательными плоскостями шапки с плоскостью ее края мы получим для аналитических шапок достаточно малых размеров в такой форме, как это нами используется в дальнейшем. Именно, пусть F — выпуклая поверхность с аналитической метрикой и положительной гауссовой кривизной, P — произвольная фиксированная точка на F и G — малая выпуклая область на поверхности, ограниченная внутренне аналитической кривой с положительной всюду геодезической кривизной. Пусть ω — аналитическая выпуклая шапка, изометричная области G на поверхности F. Утверждается, что если область G достаточно мала, то для угла наклона касательных плоскостей шапки ω вдоль ее края к плоскости основания шапки может быть указана оценка сверху, меньшая $\pi/2$, в зависимости только от линейного элемента поверхности F и геодезической кривизны края шапки.

Пусть Q — любая точка края шапки ω, Q' — соответствующая по изометрии точка на поверхности F и γ — геодезическая на F, касающаяся области G в точке Q'. Введем на F полугеодезические координаты u, v, включив γ в семейство геодезических u (пусть она соответствует $v=0$). Составим уравнение Дарбу относительно линейного элемента $ds^2=du^2+c^2\,dv^2$ поверхности F (уравнение (1)). По теореме Коши — Ковалевской существует решение $\bar{z}(u,v)$ этого уравнения, для которого $\bar{z}(u,0)=u^2$, $q(u,0)=0$. Если область достаточно мала, то область существования этого решения, очевидно, покрывает G (как область изменения параметров u, v) независимо от выбора точки Q. Как известно, это решение можно дополнить двумя другими аналитическими функциями $\bar{x}(u,v)$, $\bar{y}(u,v)$ так, что уравнениями

$$x=\bar{x}(u,v),\qquad y=\bar{y}(u,v),\qquad z=\bar{z}(u,v)$$

будет задаваться аналитическая поверхность $\bar{F}$, изометричная F. Если область G достаточно мала, то производные (до любого фиксированного порядка) $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ по u и v в области на поверхности $\bar{F}$, соответствующей по изометрии G, равномерно ограничены. Так как направления координатных линий u, v вдоль $v=0$ сопряжены (коэффициент M второй квадратичной формы поверхности $\bar{F}$ пропорционален $s-\frac{c_v}{c}\,q=0$) и

координатная сеть ортогональна, то геодезическая линия $v=0$ является линией кривизны и, следовательно, плоская.

Пусть $\bar{Q}$ — точка, а $\bar{\gamma}$ — геодезическая на поверхности $\bar{F}$, соответствующие по изометрии точке Q' и геодезической γ поверхности F. Плоскость $\bar{\alpha}$, в которой лежит геодезическая $\bar{\gamma}$, является нормальной плоскостью поверхности $\bar{F}$ в каждой точке геодезической. Так как геодезическая кривизна края области $\bar{\omega}$, соответствующей по изометрии области G поверхности F, строго положительна и больше некоторого $\varepsilon>0$, то при повороте плоскости $\bar{\alpha}$ на малый угол $\vartheta(\varepsilon)$ около касательной к $\bar{\gamma}$ в точке $\bar{Q}$ область $\bar{\omega}$ будет по-прежнему располагаться по одну сторону этой плоскости и будет однозначно на нее проектироваться. Можно считать, что $\vartheta(\varepsilon)$, если область G достаточно мала, не зависит от формы этой области, выбора точки Q' на ее границе, а зависит только от нижнего предела геодезической кривизны кривой, ограничивающей область G.

Расположим теперь поверхность $\bar{\omega}$ выпуклостью в направлении $z<0$ так, чтобы плоскость $\bar{\alpha}$ после указанного поворота на угол $\vartheta(\varepsilon)$ совпадала с плоскостью xy, точка $\bar{Q}$ — с началом координат O, а касательная к $\bar{\gamma}$ в точке $\bar{Q}$ — с осью y. Шапку ω расположим аналогично, именно: выпуклостью в сторону $z<0$, плоскостью основания в плоскости xy, и касательную к краю шапки — по оси y. Пусть $\bar{z}$ и z — координаты по оси Oz соответствующих по изометрии точек поверхностей $\bar{\omega}$ и ω в указанном расположении. Функция $z-\bar{z}$ достигает минимума на границе поверхностей (см. доказательство теоремы в § 6). Следовательно, этот минимум достигается в начале координат, где $z-\bar{z}=0$, ибо в остальных точках границ $z-\bar{z}\geqslant 0$. Отсюда, дифференцируя по направлению, перпендикулярному к краю поверхностей в точке O, получим $z'-\bar{z}'\geqslant 0$, или $-\sin\beta+ +\sin\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta(\varepsilon)\right)\geqslant 0$. Таким образом, для угла β, образуемого касательной плоскостью шапки ω в точке O с плоскостью ее основания (плоскостью xy), получается оценка $\beta\leqslant\frac{\pi}{2}-\vartheta(\varepsilon)$. Теорема доказана.

§ 8. Оценка нормальных кривизн во внутренних точках регулярной выпуклой шапки

Теорема 1. *Если максимум нормальной кривизны выпуклой поверхности с регулярной метрикой и положительной гауссовой кривизной достигается во внутренней точке поверхности, то для величины этого максимума можно указать оценку в зависимости только от величин, определяемых внутренней метри-*

кой поверхности. Именно, если K_0 — максимум, $\overline{K}_0$ — минимум гауссовой кривизны поверхности и λ — максимум второй производной от гауссовой кривизны по дуге любой геодезической на поверхности, то нормальная кривизна не превосходит величины

$$\sqrt{K_0+\frac{2\lambda}{\overline{K}_0}}.$$

Доказательство. Относительно точки X_0, в которой достигается максимум верхней кривизны, могут быть два предположения:

1) точка X_0 — шаровая, т. е. кривизна нормальных сечений по всем направлениям в этой точке одинакова и равна $\sqrt{K(X_0)}$, где $K(X_0)$ — гауссова кривизна в точке X_0;

2) точка X_0 не является шаровой.

В первом случае, очевидно, в качестве оценки максимума верхней кривизны можно взять число $\sqrt{K_0}$, где K_0 — максимум гауссовой кривизны поверхности.

Во втором случае, так как точка X_0 не шаровая, в ее достаточно малой окрестности можно ввести координатную сеть u, v, состоящую из линий кривизны. В качестве параметров u и v примем дуги вдоль координатных линий, проходящих через точку X_0 и назовем $v=0$ то направление, по которому достигается максимум нормальной кривизны.

Согласно выбору параметров u и v вдоль линии $v=0$ имеем $ds^2=du^2$, а вдоль линии $u=0$ $ds^2=dv^2$. Поэтому для коэффициентов квадратичной формы

$$ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$$

в точке X_0 имеем

$$E=G=1, \qquad F=0, \qquad E_u=G_v=0.$$

Выражения для средней и гауссовой кривизны поверхности имеют вид

$$H=\frac{EN+GL}{2EG}, \quad K=\frac{LN}{EG}=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}+\frac{\partial}{\partial u}\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right\},$$

где L и N — первый и третий коэффициенты второй квадратичной формы поверхности.

Простой вид принимают также формулы Кодацци

$$L_v=\frac{1}{2}E_v\left(\frac{L}{E}+\frac{N}{G}\right), \qquad N_u=\frac{1}{2}G_u\left(\frac{L}{E}+\frac{N}{G}\right).$$

Пусть $\varkappa$ и $\overline{\varkappa}$ — наибольшая и соответственно наименьшая нормальные кривизны поверхности в произвольной точке, близкой к X_0. Тогда из формул для средней и гауссовой кривизны,

приведенных выше, легко следует

$$\varkappa = \frac{L}{E}, \qquad \bar{\varkappa} = \frac{K}{\varkappa} = \frac{N}{G}.$$

После этого из формул Кодацци получим

$$\varkappa_v = \frac{1}{2}\frac{E_v}{E}(-\varkappa + \bar{\varkappa}), \qquad \bar{\varkappa}_u = \frac{1}{2}\frac{G_u}{G}(\varkappa - \bar{\varkappa}).$$

Решая эти равенства относительно E_v и G_u, находим

$$E_v = \frac{2E\varkappa_v}{-\varkappa + \frac{K}{\varkappa}}, \qquad G_u = \frac{2G\left(\frac{K}{\varkappa}\right)_u}{\varkappa - \frac{K}{\varkappa}}. \tag{1}$$

Найдем теперь выражение кривизны K в точке X_0. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_{(X_0)} = \frac{1}{2}E_{vv} - \frac{1}{4}E_v^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_{(X_0)} = \frac{1}{2}G_{uu} - \frac{1}{4}G_u^2.$$

Из равенств (1) получим

$$\begin{aligned} E_{vv} &= E_v^2 + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{2\varkappa_v}{-\varkappa + \frac{K}{\varkappa}}\right), \\ G_{uu} &= G_u^2 + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{2\left(\frac{K}{\varkappa}\right)_u}{\varkappa - \frac{K}{\varkappa}}\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Так как $\varkappa$ достигает максимума в точке X_0, то в этой точке $\varkappa_u = \varkappa_v = 0$, и равенства (2) дают

$$E_{vv} = E_v^2 + \frac{2\varkappa_{vv}}{-\varkappa + \frac{K}{\varkappa}},$$

$$G_{uu} = G_u^2 + \frac{2K\frac{\varkappa_{uu}}{\varkappa^2}}{-\varkappa + \frac{K}{\varkappa}} + 2\,\frac{\frac{K_{uu}}{\varkappa}}{\varkappa - \frac{K}{\varkappa}}.$$

Подставляя найденные значения E_{vv} и G_{uu} в формулу для гауссовой кривизны K в точке X_0, получим

$$K = -\left(\frac{1}{4}E_v^2 + \frac{1}{4}G_u^2 + \frac{2\varkappa_{vv}}{-\varkappa + \frac{K}{\varkappa}} + \frac{2K\varkappa_{uu}}{\varkappa^2\left(-\varkappa + \frac{K}{\varkappa}\right)}\right) - \frac{2K_{uu}}{\varkappa^2 - K}.$$

Так как в точке X_0 достигается максимум $\varkappa$, и точка X_0 не шаровая, то в этой точке $\varkappa > \frac{K}{\varkappa}$, $\varkappa_{uu} \leqslant 0$, $\varkappa_{vv} \leqslant 0$. Поэтому выражение в скобках неотрицательно, и, следовательно,

$$K \leqslant -\frac{2K_{uu}}{\varkappa^2 - K}. \tag{3}$$

Линия $v=0$ в точке X_0 имеет нулевую геодезическую кривизну. Действительно, для геодезической кривизны известно следующее выражение:

$$k_g = \frac{1}{W} \frac{\Gamma}{(Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2)^{3/2}},$$

где

$$W = \sqrt{EG - F^2},$$

$$\begin{aligned}\Gamma = W^2 (u'v'' - v'u'') &+ \\ + (Eu' + Fv')\Big[\Big(F_u - \frac{1}{2} E_v\Big) u'^2 &+ G_u u'v' + \frac{1}{2} G_v v'^2\Big] - \\ - (Fu' + Gv')\Big[\frac{1}{2} E_u u'^2 &+ E_v u'v' + \Big(F_v - \frac{1}{2} G_u\Big) v'^2\Big].\end{aligned}$$

Из этого выражения для геодезической кривизны кривой очевидным образом следует, что линия $v=0$ в точке X_0 имеет нулевую геодезическую кривизну. Поэтому $K_{uu}(X_0) = K_{ss}(X_0)$.

Если теперь обозначить через λ максимум второй производной гауссовой кривизны по дуге геодезической на всей поверхности по всем геодезическим, то из неравенства (3) в точке X_0 получим

$$K \leqslant \frac{2\lambda}{\varkappa^2 - K}.$$

Отсюда

$$\varkappa \leqslant \sqrt{K + \frac{2\lambda}{K}}.$$

Обозначая K_0 и $\overline{K}_0$ максимум и соответственно минимум гауссовой кривизны поверхности, получаем для верхней кривизны поверхности следующую оценку:

$$\varkappa \leqslant \sqrt{K_0 + \frac{2\lambda}{\overline{K}_0}}.$$

Теорема доказана.

Если поверхность замкнутая, то максимум ее верхней кривизны, очевидно, достигается в некоторой внутренней точке, а поэтому он не превосходит числа

$$\sqrt{K_0 + \frac{2\lambda}{\overline{K}_0}},$$

где K_0, $\overline{K}_0$ и λ имеют прежние значения.

Как следствие теоремы 1 и теоремы § 7 получается следующая теорема о существовании внутренних оценок на всей поверхности аналитической выпуклой шапки с положительной гауссовой кривизной.

Теорема 2. *Пусть F — аналитическая шапка с положительной гауссовой кривизной и положительной геодезической кривизной края. Тогда для нормальных кривизн шапки и тангенса угла наклона ее касательных плоскостей к плоскости основания можно указать оценки в зависимости только от величин, определяемых внутренней метрикой шапки.*

В оценке для нормальных кривизн шапки, которая обеспечивается теоремой 2, существенно используется положительность геодезической кривизны края шапки. Если строгой положительности геодезической кривизны края шапки не предполагать, то гарантировать оценки для нормальных кривизн на всей шапке нельзя. Однако имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть ω — регулярная выпуклая шапка с положительной гауссовой кривизной.*

Тогда для нормальных кривизн шапки в произвольной точке P, находящейся на расстоянии, не меньшем $\delta>0$ от плоскости края, могут быть указаны оценки в зависимости только от величин, определяемых внутренней метрикой шапки и числом δ.

Доказательство. Пусть X — произвольная точка шапки и γ — произвольная, исходящая из точки X геодезическая. Обозначим через $\varkappa_\gamma(X)$ нормальную кривизну шапки в точке X в направлении γ и рассмотрим функцию

$$w_\gamma(X)=h(X)\varkappa_\gamma(X),$$

где $h(X)$ — расстояние точки X от плоскости края шапки. Функция $w_\gamma(X)$ неотрицательна и обращается в нуль на границе шапки. В некоторой внутренней точке шапки X_0 для некоторой геодезической γ_0, исходящей из этой точки, она достигает максимума. Обозначим через w_0 величину этого максимума.

Проведем через точку X_0 геодезическую $\bar{\gamma}_0$, перпендикулярную γ_0, и введем в окрестности точки X_0 на поверхности шапки полугеодезическую координатную сеть u, v, приняв геодезические, перпендикулярные $\bar{\gamma}_0$, за линии u. В качестве параметров u, v примем дуги геодезических γ_0 и $\bar{\gamma}_0$, отсчитываемые от точки X_0. Обозначим $\gamma(X)$ геодезическую семейства u, проходящую через точку X, близкую к X_0, и введем в рассмотрение функцию

$$w(X)=w_{\gamma(X)}(X).$$

Эта функция, очевидно, также достигает максимума в точке X_0, и этот максимум равен w_0.

Составим уравнение Дарбу для поверхности шапки, приняв за плоскость $z=0$ касательную плоскость шапки в точке X_0. Для определенности будем считать, что шапка находится в полупространстве $z>0$. Так как линейный элемент шапки в координатах u, v равен $ds^2=du^2+c^2dv^2$, то уравнение Дарбу для функции $z(u, v)$ имеет вид (§ 7)

$$r(t+\alpha)-(s-\beta)^2+\gamma=0,$$

где

$$\alpha=cc_u p-\frac{c_v}{c}q, \qquad \beta=\frac{c_u}{c}q,$$

$$\gamma=\frac{c_{uu}}{c}(c^2-c^2p^2-q^2).$$

Как показано в § 7, нормальная кривизна вдоль геодезической γ на поверхности выражается по формуле

$$\varkappa_\gamma=\frac{z''_\gamma(X)}{\cos\varphi},$$

где дифференцирование z выполняется по дуге геодезической γ, а φ — угол между касательной плоскостью шапки и плоскостью ее основания. Так как

$$\cos^2\varphi=1-p^2-\frac{q^2}{c^2},$$

то для функции $w(X)$ получается следующее представление:

$$w=\frac{hr}{\sqrt{1-p^2-\frac{q^2}{c^2}}}.$$

Решая это равенство относительно r, получим

$$r=\frac{w}{h}\sqrt{1-p^2-\frac{q^2}{c^2}}.$$

Исходя из этого выражения для r, найдем его первые и вторые производные по u и v в точке X_0. При этом будем иметь в виду следующее. По выбору системы координат u, v в точке X_0 $c=1$, $c_u=c_v=c_{uv}=c_{vv}=0$, $c_{uu}=-K$, где K — гауссова кривизна поверхности. Производные p, q равны нулю, так как плоскость $z=0$ касается поверхности в точке X_0. Производная $s=0$, так как $M=0$ (направления координатных линий в точке X_0 являются главными направлениями). Наконец, $w_u=w_v=0$, потому что w достигает максимума в точке X_0.

Имеем

$$r_u=\left(\frac{1}{h}\right)_u w, \qquad r_v=\left(\frac{1}{h}\right)_v w,$$

$$r_{uu}=\frac{w_{uu}}{h}+w\left(\frac{1}{h}\right)_{uu}-\frac{w}{h}r^2,$$

$$r_{vv}=\frac{w_{vv}}{h}+w\left(\frac{1}{h}\right)_{vv}-\frac{w}{h}t^2.$$

По поводу значений этих производных в точке X_0 существенно заметить следующее. Так как u, v в точке X_0 суть дуги геодезических, а h — расстояние до основания шапки, то $|h_u|\leqslant 1$, $|h_v|\leqslant 1$. Следовательно,

$$|r_u|<\frac{r}{\delta}, \qquad |r_v|<\frac{r}{\delta}.$$

Принимая во вннмание формулу для нормальной кривизны

$$\varkappa_\gamma=\frac{h''_\gamma}{\cos\varphi},$$

получаем

$$r=-\frac{h_{uu}}{\sqrt{1-h_u^2-h_v^2}}, \qquad t=-\frac{h_{vv}}{\sqrt{1-h_u^2-h_v^2}}.$$

Отсюда

$$|h_{uu}|\leqslant r, \qquad |h_{vv}|\leqslant t.$$

Следовательно,

$$r_{uu}=\frac{w_{uu}}{h}-\frac{r^3}{h}+Ar^2+Br, \qquad r_{vv}=\frac{w_{vv}}{h}-\frac{t^3}{h}+Cr+Drt,$$

где A, B, C, D — величины, которые просто оцениваются через величину δ.

Днфференцируя уравнение Дарбу в точке X_0 по u, получим

$$rt_u+tr_u-K_u=0.$$

Отсюда

$$t_u=\frac{K_u-tr_u}{r}.$$

Дифференцируя уравнение Дарбу по u дважды, получим

$$r_{uu}t+t_{uu}r+2r_ut_u-2s_u^2-K_{uu}=0.$$

Введем в это равенство полученные выше значения r_u, r_v, $s_u=r_v$, r_{uu}, $t_{uu}=r_{vv}$. Тогда получнм

$$\frac{1}{h}(w_{uu}t+w_{vv}r)-\frac{Kr^2}{h}+Pr+Q=0, \qquad (*)$$

где P н Q — велнчины, которые оцениваются через величнну δ,

гауссову кривизну K и ее производные до второго порядка. Так как функция w достигает максимума в точке X_0, то в этой точке

$$w_{uu}t + w_{vv}r \leqslant 0.$$

Поэтому, отбрасывая в левой части равенства (*) заведомо неположительные члены, будем иметь

$$-\frac{Kr^2}{h} + Pr + Q \geqslant 0.$$

Или, переходя от r к $w = r/h$, получим

$$-Kw^2 + P'w + Q' \geqslant 0.$$

Отсюда очевидным образом оценивается w, а вместе с ним и нормальная кривизна $\varkappa$. Теорема доказана.

§ 9. Существование аналитической выпуклой шапки, реализующей заданную аналитическую метрику

Лемма 1. *Пусть в ε-окрестности единичного круга $\bar{\omega}$: $u^2+v^2 \leqslant 1$ задана аналитическая метрика с положительной гауссовой кривизной*

$$ds_\alpha^2 = E_\alpha du^2 + 2F_\alpha du\,dv + G_\alpha dv^2,$$

аналитически зависящая от параметра α. Пусть окружность круга $\bar{\omega}$ имеет относительно метрики ds_α^2 положительную геодезическую кривизну.

Тогда, если при некотором значении параметра $\alpha = \alpha_0$ метрика ds_α^2 реализуется выпуклой аналитической шапкой ω_{α_0}, допускающей аналитическое продолжение за ее границу, то и при всех достаточно близких к α_0 значениях параметра α она также реализуется выпуклой аналитической шапкой ω_α, аналитически продолжаемой за ее границу.

Доказательство. Допустим, что существует аналитическая шапка ω_α, реализующая метрику ds_α^2. Расположим шапку ω_α так, чтобы ее основание лежало в плоскости xy, а сама шапка — в полупространстве $z > 0$. Координата z точки (u, v) шапки ω_α удовлетворяет в круге $\bar{\omega}$ дифференциальному уравнению в частных производных эллиптического типа — уравнению Дарбу

$$\Phi_\alpha(r, s, t, p, q, u, v) = 0$$

и имеет нулевые значения на окружности круга ω.

При $\alpha = \alpha_0$ уравнение $\Phi_\alpha = 0$, очевидно, имеет аналитическое решение z_{α_0}, аналитически продолжаемое за границу круга $\bar{\omega}$,

так как существует аналитическая шапка ω_{α_0}, реализующая метрику $ds^2_{\alpha_0}$. По известной лемме С. Н. Бернштейна [21, гл. VII] для значений параметра α, близких к α_0, существует решение $z_\alpha(u, v)$ уравнения $\Phi_\alpha=0$, аналитическое по u, v, α, аналитически продолжаемое за границу круга $\bar{\omega}$ и равное нулю на окружности этого круга. Покажем, что каждому такому решению z_α, если $|\alpha-\alpha_0|$ достаточно мало, соответствует аналитически продолжаемая за границу шапка ω_α, реализующая метрику ds^2_α.

Рассмотрим квадратичную форму $d\sigma^2_\alpha$, заданную в круге $\bar{\omega}$ и достаточно малой его окрестности равенством

$$d\sigma^2_\alpha = ds^2_\alpha - dz^2_\alpha.$$

При $\alpha=\alpha_0$ эта форма положительно определенная и представляет собой линейный элемент плоскости основания шапки ω_{α_0}, если за координаты u, v точки P этой плоскости взять координаты лежащей над ней точки шапки. Таким образом, метрика $d\sigma^2_{\alpha_0}$ в круге $\bar{\omega}$ реализуется плоской выпуклой областью — основанием шапки ω_{α_0}. Кривизна границы этой области, равная геодезической кривизне окружности круга $\bar{\omega}$ относительно метрики $d\sigma^2_{\alpha_0}$, положительна.

Так как метрика $d\sigma^2_\alpha$ аналитически зависит от параметра α, то геодезическая кривизна окружности $u^2+v^2=1$ относительно метрики $d\sigma^2_\alpha$ при малом $|\alpha-\alpha_0|$ тоже положительна, а форма $d\sigma^2_\alpha$ в круге $\bar{\omega}$ положительно определенная. Вычисляя гауссову кривизну с помощью коэффициентов формы $d\sigma^2_\alpha$, убеждаемся, что она с точностью до множителя, отличного от нуля, совпадает с Φ_α и поэтому равна нулю. Отсюда следует, что метрика $d\sigma^2_\alpha$ при малом $|\alpha-\alpha_0|$, рассматриваемая в достаточно малой окрестности круга $\bar{\omega}$, реализуется областью на плоскости xy, причем кругу $\bar{\omega}$ соответствует выпуклая область, ограниченная аналитическим контуром с положительной кривизной.

Пусть $x_\alpha(u, v)$ и $y_\alpha(u, v)$ — координаты точки плоскости xy, соответствующие точке (u, v) круга $\bar{\omega}$ при изометрическом отображении этого круга с метрикой $d\sigma^2_\alpha$ в плоскость xy. Аналитическая поверхность, заданная уравнениями

$$x=x_\alpha(u, v), \qquad y=y_\alpha(u, v), \qquad z=z_\alpha(u, v),$$

имеет ds^2_α своим линейным элементом, так как

$$dx^2_\alpha + dy^2_\alpha + dz^2_\alpha = d\sigma^2_\alpha + dz^2_\alpha = ds^2_\alpha,$$

и она представляет собой аналитическую выпуклую шапку ω_α, существование которой и утверждалось.

Лемма 2. *Пусть в* ε*-окрестности круга* $\overline{\omega}$: $u^2+v^2 \leqslant 1$ *задана аналитическая метрика с положительной гауссовой кривизной*

$$ds_\alpha^2 = E_\alpha\,du^2 + 2F_\alpha\,du\,dv + G_\alpha\,dv^2,$$

аналитически зависящая от параметра $\alpha\,(\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1)$. *Пусть окружность круга* $\overline{\omega}$ *имеет относительно метрики* ds_α^2 *положительную геодезическую кривизну для всех* α *из указанного отрезка.*

Тогда, если при $\alpha=\alpha_0$ *метрика* ds_α^2 *реализуется некоторой выпуклой аналитической шапкой* ω_{α_0}, *допускающей аналитическое продолжение за ее границу, то при* $\alpha=\alpha_1$ *она также реализуется некоторой выпуклой аналитической шапкой, аналитически продолжаемой за ее границу.*

Доказательство. Обозначим через α' точную верхнюю грань чисел α, удовлетворяющих следующему условию. Для каждого $\alpha\ (\alpha_0 \leqslant \alpha < \alpha')$ метрика ds_α^2 реализуется некоторой аналитической шапкой, аналитически продолжаемой за ее границу. В силу леммы 1, $\alpha_0 < \alpha'$. Покажем, что $\alpha' = \alpha_1$.

Пусть $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots$ — последовательность чисел из интервала (α_0, α'), сходящаяся к α'. Каждому значению β_k соответствует аналитическая шапка ω_k, реализующая метрику $ds_{\beta_k}^2$. Обозначим через $r_k(u, v)$ радиус-вектор точки шапки ω_k, соответствующий точке (u, v) круга $\overline{\omega}$. Не ограничивая общности, можно считать, что вектор-функции $r_k(u, v)$ равномерно ограничены, основание каждой шапки ω_k лежит в плоскости xy, а сами шапки — в полупространстве $z>0$. Согласно теореме 2 § 8 для нормальной кривизны каждой шапки ω_k, а также для угла, образуемого ее касательными плоскостями с плоскостью xy, могут быть указаны внутренние оценки. Из условий леммы следует, что эти оценки можно считать не зависящими от k, причем оценка для углов меньше $\pi/2$. С помощью оценки для кривизны могут быть получены оценки для производных второго порядка функций $r_k(u, v)$.

Возьмем теперь две оси g_1, g_2, проходящие через начало координат, не лежащие в одной плоскости с осью z и образующие с ней углы, не превосходящие $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_0\right)$, где ϑ_0 — максимум углов, образуемых касательными плоскостями всех шапок ω_k с плоскостью xy. Пусть $\xi_k(u, v)$ и $\eta_k(u, v)$ — проекции вектора $r_k(u, v)$ на эти оси. Каждая из функций $z_k(u, v)$, $\xi_k(u, v)$, $\eta_k(u, v)$ удовлетворяет уравнению в частных производных второго порядка эллиптического типа — уравнению Дарбу. В § 11 настоящей главы будет доказана теорема об оценках производных

решения уравнения эллиптического типа общего вида. Согласно этой теореме для производных четвертого порядка функций z_k, ξ_k и η_k в круге $u^2+v^2 \leqslant 1-\varepsilon_1 (\varepsilon_1 > 0)$ могут быть получены оценки, если известны оценки для производных первых двух порядков. Принимая во внимание характер зависимости уравнений для z_k, ξ_k, η_k от β_k, можно считать, что оценки для четвертых производных функций z_k, ξ_k, η_k не зависят от k. С помощью оценок для производных функций ξ_k, η_k, z_k могут быть получены оценки производных вектор-функций $r_k(u, v)$. Таким образом, можно считать, что четвертые производные вектор-функций $r_k(u, v)$ в круге $u^2+v^2 \leqslant 1-\varepsilon_1$ равномерно (по k) ограничены.

Так как последовательность вектор-функций $r_k(u, v)$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна, то можно выделить из нее сходящуюся подпоследовательность. Не ограничивая общности, можно считать, что сама последовательность $r_k(u, v)$ сходится к некоторой функции $r(u, v)$. Сходимости вектор-функций $r_k(u, v)$ соответствует сходимость шапок ω_k к некоторой выпуклой шапке ω с радиус-вектором $r(u, v)$, реализующей метрику $ds^2_{\alpha'}$.

Из равномерной ограниченности четырех гроизводных функций $r_k(u, v)$ в круге $u^2+v^2 < 1-\varepsilon_1$ следует трехкратная дифференцируемость предельной функции $r(u, v)$ в этом круге, а следовательно, и во всем круге $\overline{\omega}$, исключая, быть может, его границу.

Из трехкратной дифференцируемости функции $r(u, v)$ внутри круга следует трехкратная дифференцируемость проекций $z(u, v)$, $\xi(u, v)$, $\eta(u, v)$ вектора $r(u, v)$ на оси z, g_1, g_2. Так как каждая из функций ξ, η, z удовлетворяет аналитическому уравнению эллиптического типа, то, по известной теореме С. Н. Бернштейна об аналитичности решений уравнений эллиптического типа, функции ξ, η, z аналитические внутри круга $\overline{\omega}$.

Дискриминант уравнения Дарбу для функции z существенно больше нуля во всем круге $\overline{\omega}$, так как касательные плоскости шапки ω образуют с плоскостью xy углы, не превосходящие ϑ_0, а гауссова кривизна шапки существенно положительна.

Отсюда по теореме С. Н. Бернштейна [21, гл. VII] следует, что функция z допускает аналитическое продолжение за границу круга $\overline{\omega}$. Поэтому аналитическая метрика $d\sigma^2_{\alpha'}$, с помощью которой определяются две другие координаты (x и y) вектора $r(u, v)$, задана не только в круге $\overline{\omega}$, но и в некоторой его окрестности. Отсюда следует, что функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ аналитически продолжаются за границу круга $\overline{\omega}$. Таким образом, шапка ω реализует метрику $ds^2_{\alpha'}$, является аналитической и

аналитически продолжается за границу. В силу леммы 1 тогда α' не может быть меньше α_1. Лемма 2 доказана.

Теорема. *Пусть в ε-окрестности круга $\bar{\omega}$: $u^2+v^2\leqslant 1$ линейным элементом ds^2 задана аналитическая метрика с положительной гауссовой кривизной, причем окружность γ круга $\bar{\omega}$ имеет относительно метрики ds^2 всюду положительную геодезическую кривизну. Пусть каждая геодезическая относительно метрики ds^2, проведенная из центра круга $\bar{\omega}$, встречает окружность круга в точке, расстояние которой вдоль этой геодезической меньше $1/\sqrt{K_2}$, где K_2 — максимум гауссовой кривизны в круге $\bar{\omega}$.*

Тогда существует аналитическая шапка ω, реализующая метрику ds^2, заданную в круге $\bar{\omega}$.

Доказательство. Введем в круге $\bar{\omega}$ полярные геодезические координаты ρ, ϑ относительно метрики ds^2, взяв центр O круга $\bar{\omega}$ за полюс. Линейный элемент ds^2 в этих координатах имеет вид

$$ds^2=d\rho^2+c^2(\rho,\ \vartheta)\,d\vartheta^2,$$

причем $c(0,\vartheta)=0$, $c_\rho(0,\vartheta)=1$.

Так как гауссова кривизна $K=-c_{\rho\rho}/c$, то вдоль каждой геодезической, выходящей из точки O, коэффициент c^2 линейного элемента ds^2 удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$y''+Ky=0$$

и начальным условиям $y=0$, $y'=1$ при $\rho=0$. Если $K_1\leqslant K\leqslant K_2$, то, как известно, интегральная кривая этого уравнения в полосе $0\leqslant\rho\leqslant\pi/\sqrt{K_2}$ заключена между интегральными кривыми уравнений

$$y''+K_1y=0,\qquad y''+K_2y=0$$

при тех же начальных условиях. Отсюда следует, что $c(\rho,\ \vartheta)$, будучи выпуклой функцией по ρ при фиксированном ϑ, монотонно растет по крайней мере в интервале $\left(0,\ \frac{1}{\sqrt{K_2}}\right)$ и, следовательно, координатная сеть ρ, ϑ может быть введена во всем круге $\bar{\omega}$ и некоторой его окрестности.

Пусть $\rho=\rho(\vartheta)$ — уравнение окружности γ круга $\bar{\omega}$ в координатах ρ, ϑ. Покажем, что геодезическая кривизна кривой γ_α, заданной уравнением $\rho=\alpha\rho(\vartheta)$, $\alpha<1$, больше, чем геодезическая кривизна кривой γ (в точках, соответствующих одним и тем же значениям ϑ). Действительно, рассмотрим четырехугольник

$ABA_\alpha B_\alpha$ (рис. 22), ограниченный координатными геодезическими $\vartheta=\vartheta_0$, $\vartheta=\vartheta_0+\Delta\vartheta$ и дугами кривых γ и γ_α. Длина дуги $A_\alpha B_\alpha$ меньше длины дуги AB, так как они определяются формулами

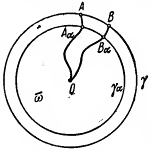

Рис. 22.

$$\int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\Delta\vartheta} \sqrt{(\alpha\rho')^2+c^2(\alpha\rho,\ \vartheta)}\,d\vartheta,$$

$$\int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\Delta\vartheta} \sqrt{\rho'^2+c^2(\rho,\ \vartheta)}\,d\vartheta$$

соответственно, а $c(\rho_1, \vartheta)<c(\rho_2, \vartheta)$, если $\rho_1<\rho_2<\frac{1}{\sqrt{K_2}}$. Применяя к четырехугольнику $A_\alpha B_\alpha AB$ теорему Гаусса — Боннэ и замечая, что геодезические $\vartheta=\mathrm{const}$ пересекают кривые γ_α и γ под прямыми углами, получим

$$\int\limits_{(A_\alpha)}^{(B_\alpha)} \varkappa(\vartheta,\ \alpha)\,ds_\alpha-\int\limits_{(A)}^{(B)} \varkappa(\vartheta)\,ds=\iint\limits_{(A_\alpha B_\alpha AB)} K(\rho,\ \vartheta)\,d\sigma,$$

где $\varkappa(\vartheta,\ \alpha)$ и $\varkappa(\vartheta)$ — геодезические кривизны кривых γ_α и γ, а K — гауссова кривизна. Отсюда

$$\varkappa_\alpha^*\,\Delta s_\alpha-\varkappa^*\,\Delta s=K^*\,\Delta\sigma,$$

где $\varkappa_\alpha^*$, $\varkappa^*$ — средние значения геодезических кривизн кривых γ_α и γ на участках $A_\alpha B_\alpha$ и AB соответственно, а K^* — среднее значение гауссовой кривизны четырехугольника. Деля полученное равенство на Δs_α и замечая, что $\Delta s/\Delta s_\alpha>1$, в пределе при $\Delta s\to 0$ получим

$$\varkappa_\alpha(\vartheta)-\varkappa(\vartheta)>0.$$

Пусть $\bar\omega_\alpha$ — область в круге $\bar\omega$, ограниченная кривой γ_α. Отобразим эту область на круг $\bar\omega$, ставя в соответствие точке области $\bar\omega_\alpha$ с координатами ρ, ϑ точку круга с координатами $\frac{\rho}{\alpha}$, ϑ. При этом кривой γ_α соответствует окружность γ. Это отображение очевидным образом продолжается в отображение окрестности области ω_α в окрестность круга $\bar\omega$. Метрика ds^2, рассматриваемая в окрестности области ω_α, переходит в метрику ds_α^2, заданную в окрестности круга $\bar\omega$. Так как метрика ds_α^2 аналитически зависит от параметра α и геодезическая кривизна окружности γ относительно этой метрики положительна, то в силу

леммы 2 метрика ds^2 в круге $\bar{\omega}$ реализуема аналитической выпуклой шапкой, аналитнчески продолжаемой за ее граннцу, если реализуема метрика ds^2_α хотя бы при каком-ннбудь значении параметра $\alpha \neq 0$ или, что то же самое, если реализуема метрика ds^2, рассматриваемая в области $\bar{\omega}_\alpha$.

Пусть

$$d\tilde{s}^2 = d\rho^2 + \tilde{c}^2\, d\vartheta^2$$

— линейный элемент сферы раднуса $1/\sqrt{K_0}$, где K_0 — гауссова кривизна в центре круга $\bar{\omega}$ относительно метрики ds^2 в полярных геодезнческнх координатах. Рассмотрим метрику $d\tilde{s}^2_\beta$, заданную в круге $\bar{\omega}$ линейным элементом

$$d\tilde{s}^2_\beta = d\rho^2 + (\beta c + (1-\beta)\,\tilde{c})^2\, d\vartheta^2, \qquad 0 \leqslant \beta \leqslant 1.$$

В точке O функции $c(\rho, \vartheta)$ и $\tilde{c}(\rho, \vartheta)$ совпадают вместе с их производными до второго порядка. Поэтому при достаточно малом $\alpha = \alpha_0$ метрика $d\tilde{s}^2_\beta$ в окрестности области $\bar{\omega}_{\alpha_0}$ имеет положительную гауссову кривизну, а кривая γ_{α_0} не только относительно метрикн ds^2, но и относительно каждой метрики $d\tilde{s}^2_\beta$ имеет положительную геодезическую кривизну.

Отсюда следует, что метрика ds^2, рассматрнваемая в области $\bar{\omega}_{\alpha_0}$ и достаточно малой ее окрестности, реализуема выпуклой шапкой, аналитически продолжаемой за ее границу, если реализуема метрика $d\tilde{s}^2$. Если $\tilde{\omega}_{\alpha_0}$ — область на сфере S, ограниченная кривой $\tilde{\gamma}_{\alpha_0}$ с тем же уравнением в полярных геодезическнх коордннатах ρ, ϑ, что и у кривой γ_{α_0}, то реализуемость метрики $d\tilde{s}^2$, рассматриваемой в области ω_{α_0}, аналитической шапкой, аналитически продолжаемой за ее границу, равносильна существованию такой шапкн, изометричной $\tilde{\omega}_{\alpha_0}$.

Спроектируем кривую $\tilde{\gamma}_{\alpha_0}$ нз центра сферы S на касательную плоскость σ к сфере S в точке $\rho = 0$. В результате получим выпуклую кривую $\tilde{\gamma}'_{\alpha_0}$ с положительной кривизной. Введем на плоскости σ полярные координаты r, φ, приняв направление $\vartheta = 0$ на сфере S за направление $\varphi = 0$ на плоскости σ. Пусть

$$r = f(\varphi)$$

— уравнение кривой $\tilde{\gamma}'_{\alpha_0}$ в полярных координатах r, φ. Рассмотрнм кривую λ_t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ в плоскости σ, заданную уравнением

$$r = \frac{f(\varphi)}{(1-t) + tf(\varphi)}.$$

Эта кривая имеет всюду положительную кривизну при каждом значении t из указанного сегмента и при $t=0$ совпадает с кривой $\tilde{\gamma}'_{\alpha_0}$, а при $t=1$ — с окружностью $r=1$ *).

Спроектируем кривую λ_t на сферу S из ее центра и обозначим через $\tilde{\omega}_{\alpha_0, t}$ выпуклую область, ограниченную этой проекцией на сфере.

Для того чтобы существовала аналитическая шапка, аналитически продолжаемая за ее границу и изометричная области $\tilde{\omega}_{\alpha_0}$, достаточно, чтобы такая шапка существовала хотя бы для одной области $\tilde{\omega}_{\alpha_0, t}$. Но для $\tilde{\omega}_{\alpha_0, 1}$ такая шапка действительно существует — это сегмент сферы S, в который проектируется круг $r \leqslant 1$ плоскости σ. Следовательно, существует аналитическая шапка, аналитически продолжаемая за ее границу, изометричная области $\tilde{\omega}_{\alpha_0}$ сферы S, а тогда существует подобного рода шапка, реализующая метрику $ds^2_{\alpha_0}$, заданную в круге $\bar{\omega}$, и, наконец, существует аналитическая шапка, реализующая метрику ds^2 в этом круге. Теорема доказана.

§ 10. Регулярность выпуклых поверхностей с регулярной метрикой

Основной результат настоящей главы составляет следующая теорема.

Теорема 1. *Если выпуклая поверхность имеет регулярную метрику класса C^n $(n \geqslant 2)$ и положительную гауссову кривизну, то сама поверхность принадлежит по крайней мере классу $C^{n-1+\alpha}$ при любом α, $0<\alpha<1$. Если метрика поверхности аналитическая, то поверхность аналитическая.*

Доказательство. Пусть Φ — выпуклая поверхность, удовлетворяющая условиям теоремы. Согласно теоремам 1, 2 § 3 эта поверхность гладкая и существенно выпуклая в том смысле, что каждая касательная плоскость поверхности Φ имеет с ней только одну общую точку — точку касания. Пусть O — произвольная точка поверхности Φ. Отрежем от поверхности Φ плоскостью, параллельной касательной плоскости в точке O, маленькую выпуклую шапку ω с внутренним диаметром меньше $1/\sqrt{K_2}$, где K_2 — максимум гауссовой кривизны шапки. Это воз-

*) В этом утверждении, может быть, не совсем очевидно то, что кривая λ_t имеет положительную кривизну. Но это просто следует из того, что кривизна кривой, заданной в полярных координатах r, φ уравнением $r=p(\varphi)$, равна

$$\frac{\frac{1}{p}+\left(\frac{1}{p}\right)''}{\left(1+(\ln p)'^2\right)^{3/2}}.$$

можно, так как поверхность Ф существенно выпуклая, и следовательно, при достаточной близости секущей плоскости к точке O отрезаемая ею шапка ω будет иметь сколь угодно малый внутренний диаметр. Обозначим через γ границу шапки ω.

Впишем в кривую γ геодезическую ломаную с малыми звеньями, а затем сгладим ее в вершинах с помощью геодезических кругов малого радиуса. В результате получим внутренне гладкую выпуклую кривую γ_1, близкую к кривой γ. Сместим теперь каждую точку X этой кривой вдоль кратчайшей к точке O на расстояние, равное $\varepsilon_1 d$, где d — первоначальное расстояние между X и O на поверхности Ф. При таком преобразовании кривой γ_1 геодезическая кривизна увеличивается, и мы получим некоторую кривую, у которой в каждой точке справа и слева существует, и притом положительная, геодезическая кривизна. Очевидно, эту кривую, которую мы обозначим через γ_2, можно считать сколь угодно близкой к кривой γ. Для этого мало взять только достаточно малыми звенья ломаной, вписываемой в кривую γ, и достаточно малым число ε_1.

Построим теперь аналитическую кривую $\tilde{\gamma}$ с положительной геодезической кривизной и близкую к γ_2. Так как кривая γ_2 гладкая и имеет почти всюду, за исключением конечного числа точек, строго положительную геодезическую кривизну, то построение кривой $\tilde{\gamma}$ не составляет труда. Пусть $\tilde{\omega}$ — область на поверхности Ф, ограниченная кривой $\tilde{\gamma}$.

Пусть u, v — координатная сеть на поверхности Ф,

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

— линейный элемент поверхности, причем коэффициенты E, F, G — трижды дифференцируемые функции переменных u, v. Построим последовательности аналитических функций E_n, F_n, G_n, сходящиеся к E, F, G равномерно с их производными до третьего порядка включительно в области ω поверхности Ф. Рассмотрим метрику, заданную в области ω квадратичной формой

$$ds_n^2 = E_n\,du^2 + 2F_n\,du\,dv + G_n\,dv^2.$$

Если n достаточно велико, то гауссова кривизна, вычисленная с помощью коэффициентов формы ds_n^2, сколь угодно близка к гауссовой кривизне поверхности ω, а геодезическая кривизна кривой $\tilde{\gamma}$ относительно метрики ds_n^2 в каждой точке больше нуля. По теореме § 9 существует аналитическая шапка $\tilde{\omega}_n$, реализующая метрику ds_n^2, заданную в области $\tilde{\omega}$.

Устремляя теперь кривую $\tilde{\gamma}$ к γ, построим последовательность аналитических шапок $\tilde{\omega}'_n$, сходящуюся к шапке $\tilde{\omega}'$, изометричной ω. По теореме § 6 шапка $\tilde{\omega}'$ равна шапке ω, и, таким

образом, остается доказать, что предельная шапка $\tilde{\omega}'$ обладает указанной в теореме регулярностью.

Хейнц в работе [70] доказал следующую теорему. *Пусть $r(u, v)$ — дважды дифференцируемая вектор-функция, заданная в области Ω плоскости u, v; $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ — линейный элемент поверхности Φ: $r = r(u, v)$. Пусть коэффициенты формы ds^2 ограничены вместе с их производными до третьего порядка и величиной, обратной дискриминанту формы, постоянной a; гауссова кривизна поверхности Φ всюду больше $b > 0$, а интегральная средняя кривизна ограничена постоянной $c < \infty$. Тогда на множестве внутренних точек Φ, удаленных от ее границы на расстояние, не меньшее $\rho > 0$, можно указать оценку модулей вторых производных $r(u, v)$ в зависимости только от величин a, b, c, ρ. Более того, каково бы ни было положительное число $\nu < 1$, для постоянных Гёльдера вторых производных r относительно показателя ν может быть указана оценка в зависимости от тех же величин и числа ν.*

Применяя эту теорему к последовательности шапок $\tilde{\omega}_n'$ и переходя к пределу при $n \to \infty$, мы заключаем, что предельная шапка $\tilde{\omega}'$ должна принадлежать классу $C^{2+\nu}$, $0 < \nu < 1$, т. е. вектор-функция $r(u, v)$, ее задающая, имеет вторые производные, удовлетворяющие условию Гёльдера с любым показателем ν $(0 < \nu < 1)$.

Дальнейшая регулярность предельной шапки $\tilde{\omega}'$ получается с помощью теоремы Ниренберга о характере регулярности дважды дифференцируемого решения уравнения эллиптического типа с регулярными коэффициентами в применении ее к уравнению Дарбу. Согласно этой теореме из двукратной дифференцируемости поверхности $\tilde{\omega}'$ и n-кратной дифференцируемости ее метрики следует, что поверхность $\tilde{\omega}'$ по крайней мере $n - 1$ раз дифференцируема и $(n-1)$-е производные функции $r(u, v)$, задающей поверхность, удовлетворяют условию Гёльдера с любым показателем λ, $0 < \lambda < 1$, [51].

Таким образом, если $n \geqslant 3$, то выпуклая поверхность с метрикой класса C^n и положительной гауссовой кривизной принадлежит по крайней мере классу $C^{n-1+\alpha}$ при любом α, $0 < \alpha < 1$.

Аналогичный результат имеет место и при $n = 2$. Он получается из другой теоремы Хейнца [71]. Хейнц доказал, что *если дважды дифференцируемая функция $z(x, y)$ в области Ω плоскости xy удовлетворяет условию*

$$0 < \alpha < z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2 < \beta < \infty,$$

то на множестве внутренних точек Ω, удаленных от ее границы на расстояние, не меньшее d, первые производные функции $z(x, y)$ удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $\nu = \sqrt{\beta/\alpha}$

и постоянной, зависящей только от α, β, d *и*

$$\delta = d \max_{\Omega} \left(z_x^2 + z_y^2\right)^{1/2}.$$

Применяя эту теорему к шапкам $\tilde{\omega}_n'$, сходящимся к $\bar{\omega}$, заключаем, что в окрестности точки O первые производные функций $z_n(x, y)$, задающих эти поверхности, равномерно удовлетворяют условию Гёльдера с любым показателем $\nu < 1$. (При малой окрестности величина β/α сколь угодно близка к единице ввиду непрерывности гауссовой кривизны и гладкости предельной поверхности.) Переходя к пределу при $n \to \infty$, заключаем, что этим свойством обладает и поверхность $\tilde{\omega}'$. Теорема доказана.

Как следствие теоремы 1 и теоремы А. Д. Александрова о реализуемости выпуклой метрики, заданной на многообразии, гомеоморфном сфере, выпуклой поверхностью (гл. I, § 7) получается полное решение проблемы Вейля в виде следующей теоремы.

Теорема 2. *Регулярная метрика с положительной гауссовой кривизной, заданная на многообразии, гомеоморфном сфере, реализуется замкнутой регулярной поверхностью. Именно, если метрика принадлежит классу* C^n, $n \geqslant 2$, *то поверхность принадлежит по крайней мере классу* $C^{n-1+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. *Если метрика аналитическая, то поверхность аналитическая.*

С помощью теоремы А. Д. Александрова о реализуемости полных выпуклых метрик (гл. I, § 11) и теоремы 1 получается следующая теорема.

Теорема 3. *Полная регулярная метрика с положительной гауссовой кривизной, заданная в области, гомеоморфной кругу, реализуется бесконечной регулярной выпуклой поверхностью. Если метрика принадлежит классу* C^n, $n \geqslant 2$, *то поверхность принадлежит классу* $C^{n-1+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. *Если метрика аналитическая, то поверхность аналитическая.*

Как следствие теоремы 1 и теоремы А. Д. Александрова о реализуемости неполных выпуклых метрик выпуклой шапкой получается

Теорема 4. *Пусть в гомеоморфной кругу области* G, *ограниченной кривой* γ, *задана регулярная метрика с положительной гауссовой кривизной. Пусть геодезическая кривизна кривой* γ *относительно заданной метрики неотрицательна.*

Тогда существует регулярная выпуклая шапка, реализующая эту метрику. Если заданная метрика принадлежит классу C^n, $n \geqslant 2$, *то шапка принадлежит классу* $C^{n-1+\alpha}$. *Если метрика аналитическая, то шапка аналитическая.*

Теорема 5. *Пусть в гомеоморфной кругу области* G, *ограниченной кривой* γ, *задана регулярная метрика с положительной*

гауссовой кривизной. Пусть геодезическая кривизна кривой γ относительно заданной метрики положительна. Пусть, наконец, Ω — произвольная выпуклая область на единичной сфере с площадью, равной интегральной кривизне заданной метрики.

Тогда существует регулярная выпуклая поверхность, реализующая заданную в области G метрику, и имеющая область Ω своим сферическим изображением. Если метрика принадлежит классу C^n, $n \geqslant 2$, то поверхность принадлежит классу $C^{n-1+\alpha}$, $0<\alpha<1$. Если метрика аналитическая, то поверхность аналитическая.

Доказательство. Согласно теореме А. Д. Александрова заданная в области G метрика реализуется некоторой выпуклой шапкой F. Возьмем на поверхности шапки F достаточно густую сеть точек A_k. Построим выпуклую оболочку множества точек A_k и основания шапки F. При этом получится замкнутая выпуклая поверхность, которая состоит из некоторой шапки F' и основания шапки F. Когда густота сети точек A_k увеличивается, шапка F' сходится к шапке F. Поворот кривой γ', ограничивающей шапку F', сходится к повороту кривой γ, ограничивающей шапку F. Вся кривизна шапки F' сосредоточена в вершинах A_k, вне этих вершин шапка F' локально изометрична плоскости.

Возьмем две точки $A \equiv A_i$ и $B \equiv A_j$. Пусть α и β — кривизны в этих точках. Соединим точки A и B кратчайшей на поверхности F' и обозначим через l ее длину. Разрежем шапку F' по кратчайшей AB и вклеим в полученный разрез два треугольника с основанием l и прилежащими углами $\alpha/2$, $\beta/2$. Получится многообразие с выпуклой метрикой, в которой вместо вершин A и B появляется некоторая новая вершина C с кривизной $\alpha+\beta$. Такое последовательное вклеивание треугольников приводит нас в конце концов к некоторому многообразию F'', содержащему только одну вершину с кривизной в ней, равной кривизне исходной шапки F'. Это многообразие изометрично области на конусе с кривизной в вершине, равной кривизне шапки F'. Поворот кривой, ограничивающей многообразие F'', очевидно, равен повороту ее на F'. Если теперь, увеличивая густоту сети точек A_k, перейти к пределу, то получим многообразие F''', изометричное области G на конусе V с кривизной в вершине, равной кривизне шапки F. Соответствующие участки границ области G и шапки F имеют равные длины и повороты. С помощью теоремы о склеивании А. Д. Александрова (гл. I, § 11) из шапки F и многообразия $V-G$ строится полное многообразие H. Вся кривизна этого многообразия сосредоточена на части, изометричной F, на остальной части H кривизна равна нулю.

По теореме С. П. Оловянишникова (гл. I, § 11) внутренняя метрика многообразия H реализуется на бесконечной выпуклой поверхности Φ с предельным конусом, имеющим область Ω

своим сферическим изображением. Поверхность Φ имеет ограниченную удельную кривизну, а следовательно, она гладкая. Пусть Φ' — область на поверхности Φ, изометричная F, а Φ'' — оставшаяся часть поверхности. Кривизна Φ'' равна нулю. Возьмем произвольную точку Q внутри области Φ'' и построим касательную плоскость α к поверхности Φ в этой точке. Обозначим через M множество общих точек плоскости α с поверхностью Φ. Множество M является выпуклым. Покажем, что оно бесконечно.

Прежде всего, M не может состоять из одной точки Q, так как тогда плоскостью, параллельной α, можно было бы отрезать малую шапку, принадлежащую Φ''. Но это невозможно, так как Φ'' имеет нулевую кривизну. Покажем, что M не может быть отрезком. Действительно, допустим что M — отрезок. Утверждаем, что этот отрезок с границей γ' области Φ' не может иметь более одной общей точки. В самом деле, пусть δ — часть этого отрезка с концами на границе γ'. Отрезок δ и кривая γ' ограничивают на Φ'' гомеоморфную кругу область с нулевой кривизной. Применяя к этой области теорему Гаусса — Боннэ (гл. I, § 8), немедленно заключаем, что кривая γ' имеет нулевой поворот со стороны этой области. Но повороты кривой γ' по обе стороны равны (по модулю), а со стороны области Φ' он заведомо положителен, так как положительна геодезическая кривизна. Мы пришли к противоречию. Итак, отрезок M с границей области Φ' имеет не более одной общей точки. Отсюда следует, что один из концов этого отрезка является внутренней точкой области Φ''. Пусть Q' — точка границы области Φ', принадлежащая множеству M, если такая точка существует. Проведем в плоскости α прямую g, разделяющую точки Q и Q'. Тогда достаточно малым поворотом плоскости α около прямой g можно отрезать шапку от поверхности Φ''. А это невозможно. Если M не содержит точек границы области Φ', то такую шапку можно отрезать близкой к α параллельной плоскостью.

Аналогичным рассуждением доказывается, что множество M не может быть конечной областью. Итак, M — бесконечное выпуклое множество. Так как нормали к поверхности Φ во всех точках множества M параллельны, то сферическое изображение каждой точки Q области Φ'' принадлежит границе области Ω на единичной сфере. Сферическое изображение поверхности Φ' есть открытое множество, так как гауссова кривизна этой поверхности положительна. По доказанному оно содержит все внутренние точки области и только эти точки. Теорема доказана.

С помощью теоремы о склеивании и теоремы 1 устанавливаются весьма общего содержания теоремы о разрешимости первой краевой задачи (задачи Дирихле) для уравнения Дарбу,

Теорема 6. *Пусть в гомеоморфной кругу области G, ограниченной кривой γ, задана регулярная метрика с положительной гауссовой кривизной линейным элементом*

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Пусть

$$\Phi(z_{uu}, z_{uv}, z_{vv}, z_u, z_v, u, v) = 0$$

— уравнение Дарбу, составленное с помощью линейного элемента ds^2. Пусть h — произвольная функция, заданная на границе области G.

Тогда, если геодезическая кривизна $\varkappa$ кривой γ относительно метрики ds^2 положительна и удовлетворяет условию

$$\varkappa > \frac{|h''|}{(1-h'^2)^{1/2}}, \qquad |h'| < 1, \tag{$*$}$$

то первая краевая задача для уравнения $\Phi = 0$ в области G при граничных значениях h вдоль γ всегда разрешима. Если метрика ds^2 принадлежит классу C^n, $n \geqslant 2$, то решение принадлежит классу $C^{n-1+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Если метрика аналитическая, то решение аналитическое.

Доказательство. Пусть $h(s)$ — заданная на границе γ области G функция (s — дуга кривой γ в метрике ds^2). Построим в плоскости xy кривую $\bar{\gamma}$:

$$x = x(s), \quad y = h(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant l,$$

где s — дуга этой кривой, а l — длина кривой γ в метрике ds^2. Кривая $\bar{\gamma}$ вполне определяется заданием только функции $h(s)$. Нетрудно проверить, что ее кривизна равна

$$k = \frac{h''}{(1-h'^2)^{1/2}}.$$

Таким образом, условие ($*$) теоремы допускает и такую запись: $\varkappa > |k|$. Проведем через концы кривой $\bar{\gamma}$ прямые, параллельные оси y, и свернем ограниченную этими прямыми полосу в цилиндр. Этот цилиндр разбивается кривой $\bar{\gamma}$ на два полуцилиндра. Обозначим один из них через Z.

Пусть F — выпуклая шапка, реализующая метрику, заданную линейным элементом ds^2 в области G. Ввиду условия $\varkappa > |k|$ теоремы, для шапки F и полуцилиндра Z выполнены условия теоремы о склеивании. Следовательно, существует бесконечная полная выпуклая поверхность Φ, которая состоит из двух частей $\bar{F}$ и $\bar{Z}$, изометричных F и Z соответственно. Предельный конус этой поверхности, очевидно, вырождается в полупрямую. Введем в пространстве декартовы координаты x, y, z и распо-

ложим поверхность Ф так, чтобы предельный конус этой поверхности совпадал с положительной полуосью z. При таком расположении поверхности Ф область $\tilde{F}$ на ней однозначно проектируется на плоскость xy, так как имеет строго положительную гауссову кривизну. Покажем, что область $\tilde{Z}$ на поверхности Ф есть полуцилиндр (в общем случае, конечно, не круговой).

Пусть $\tilde{\gamma}$ — общая граница областей $\tilde{F}$ и $\tilde{Z}$ на поверхности Ф и Q — точка на ней. Возьмем точку Q' в области $\tilde{Z}$, близкую к точке Q. Проведем в точке Q' опорную плоскость α к поверхности Ф. Пусть M — множество общих точек поверхности Ф с плоскостью α. M — выпуклое множество. Покажем, что оно не может быть конечным. Прежде всего, множество M не может состоять из одной точки (точки Q'), так как тогда параллельная к α и достаточно близкая к ней плоскость отрезает от $\tilde{Z}$ «горбушку» и, следовательно, поверхность $\tilde{Z}$ имеет положительную кривизну, что невозможно.

Допустим теперь, что M есть ограниченное множество, не сводящееся к точке Q'. Множество точек строгой выпуклости границы M содержит по крайней мере две точки. Все они принадлежат кривой $\tilde{\gamma}$. Действительно, пусть точка P строгой выпуклости границы M не принадлежит $\tilde{\gamma}$ и, следовательно, является внутренней точкой области $\tilde{Z}$. Проведем опорную прямую g к множеству M в точке P так, чтобы эта точка была единственной общей точкой множества M и опорной прямой. Сместим эту прямую параллельно в сторону M настолько мало, чтобы все точки M, принадлежащие $\tilde{\gamma}$, если такие есть, были отделены от P. А теперь малым поворотом плоскости α около построенной прямой отрезаем горбушку от поверхности $\tilde{Z}$. Но это невозможно. Итак, все точки строгой выпуклости границы множества M лежат на кривой $\tilde{\gamma}$.

Так как все точки строгой выпуклости границы M лежат на кривой $\tilde{\gamma}$, то могут представиться только следующие две возможности:

1) некоторый отрезок границы M сливается с $\tilde{\gamma}$;

2) некоторый прямолинейный отрезок δ_1 границы M соединяет две точки A_1 и B_1 кривой $\tilde{\gamma}$ и лежит на поверхности $\tilde{Z}$.

В первом случае найдутся сколь угодно близкие точки кривой $\tilde{\gamma}$, которые соединяются прямолинейным отрезком на $\tilde{Z}$: это точки, принадлежащие общей части границы множества M и кривой $\tilde{\gamma}$. Во втором случае отрезок δ_1 вместе с дугой A_1B_1 кривой $\tilde{\gamma}$ ограничивает гомеоморфную кругу область G_1. Возьмем посредине между точками A_1 и B_1 на кривой $\tilde{\gamma}$ точку C_1 и затем точку C_1' в области G_1, достаточно близкую к C_1. Построим в точке C_1'

опорную плоскость α_1 поверхности Φ и обозначим M_1 множество общих точек этой плоскости с поверхностью Φ. M_1 — выпуклое множество, принадлежащее G_1. Его точки строгой выпуклости также принадлежат $\tilde{\gamma}$. Далее заключаем о существовании прямолинейного отрезка δ_2 на поверхности $\tilde{Z}$, соединяющего точки A_2 и B_2 одной из дуг A_1C_1 или B_1C_1. Повторяя это построение, приходим к выводу о том, что в любом случае на кривой $\tilde{\gamma}$ найдутся сколь угодно близкие точки A_n, B_n, которые на поверхности $\tilde{Z}$ соединяются прямолинейным отрезком δ_n. Пусть l_n — длина кратчайшей, соединяющей точки A_n и B_n в области $\tilde{F}$, а $\bar{l}_n$ — длина прямолинейного отрезка δ_n. Сейчас мы покажем, что при достаточной близости точек A_n, B_n будет $l_n < \bar{l}_n$. Полученное противоречие докажет, что M не может быть конечным множеством.

При доказательстве теоремы 5 для выпуклой шапки F была построена коническая поверхность V, у которой соответствующие отрезки края имеют ту же длину и поворот, что и у края шапки F. Из способа построения этой поверхности путем вклеивания треугольников ясно, что расстояние между двумя данными точками на краю шапки не больше расстояния между соответствующими точками края конической поверхности (речь идет о расстояниях по поверхности).

Пусть C — точка на краю поверхности V, A и B — близкие к ней точки края. Так как поверхность V локально изометрична плоскости, то расстояние между точками A и B на этой поверхности равно

$$\rho = s - \frac{1}{24}\varkappa^2 s^3 + (*),$$

где s — расстояние между точками A и B вдоль края, $\varkappa$ — геодезическая кривизна в точке C, а $(*)$ обозначает слагаемое более высокого порядка малости.

По доказанному выше существует последовательность отрезков δ_n, неограниченно убывающих по длине, соединяющих точки A_n и B_n кривой $\tilde{\gamma}$ на поверхности $\tilde{Z}$. Не ограничивая общности, можно считать, что последовательности точек A_n и B_n сходятся к некоторой точке C. Расстояние между точками A_n и B_n на поверхности F при достаточной близости их к C меньше чем

$$s - \left(\frac{1}{24}\varkappa^2(C) - \varepsilon\right)s^3,$$

где ε — малое положительное число. С другой стороны, длина прямолинейного отрезка A_nB_n не меньше

$$s - \left(\frac{1}{24}k^2(C) + \varepsilon\right)s^3.$$

Так как длина кратчайшей, соединяющей точки A_n и B_n на поверхности F, не меньше длины прямолинейного отрезка A_nB_n, то

$$s-\left(\frac{1}{24}\varkappa^2(C)-\varepsilon\right)s^3\geqslant s-\left(\frac{1}{24}k^2(C)+\varepsilon\right)s^3.$$

Но это невозможно, если достаточно мало ε, ибо по условию теоремы $\varkappa>|k|$. Итак, предположив, что множество M конечно, мы приходим к противоречию. Следовательно, M — бесконечное множество.

Так как M — бесконечное выпуклое множество, то оно содержит полупрямую, исходящую из точки Q'. Переходя к пределу при $Q'\to Q$, заключаем, что на поверхности $\bar{Z}$ лежит полупрямая g_Q, исходящая из точки Q. Так как предельный конус поверхности Φ вырождается в полупрямую — положительную полуось z, то полупрямая g_Q параллельна оси z. При движении точки Q по кривой $\tilde{\gamma}$, полупрямая g_Q описывает поверхность $\bar{Z}$. Следовательно, поверхность $\bar{Z}$ — полуцилиндр. Очевидно, смещением поверхности Φ в направлении оси z можно добиться того, чтобы вдоль кривой $\tilde{\gamma}$ выполнялось условие $z=h$. Координата z точки поверхности $\bar{F}$, рассматриваемая как функция параметров u, v, и дает решение $z(u, v)$, которое утверждается теоремой. Теорема доказана.

Пусть F — выпуклая поверхность, звездно расположенная относительно точки O. Это значит, что никакой луч, исходящий из точки O, не касается поверхности. Пусть $\rho(u, v)$ — расстояние точки O до точки поверхности с координатами u, v. Оказывается, что функция $\rho(u, v)$ также удовлетворяет уравнению Монжа — Ампера с коэффициентами, зависящими только от коэффициентов линейного элемента ds^2 поверхности F и их производных. Это уравнение также называется уравнением Дарбу. Оно будет уравнением эллиптического типа, если гауссова кривизна поверхности F положительна.

Теорема 7. *Пусть в гомеоморфной кругу области G, ограниченной кривой γ и расположенной на единичной сфере, задана регулярная метрика*

$$ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$$

с положительной гауссовой кривизной. Пусть

$$\psi(\rho_{uu}, \rho_{uv}, \rho_{vv}, \rho_u, \rho_v, \rho, u, v)=0$$

есть уравнение Дарбу, составленное с помощью линейного элемента ds^2. Пусть h — произвольная функция, заданная на границе области G.

Тогда, если геодезическая кривизна $\varkappa$ кривой γ относительно метрики ds^2 положительна и удовлетворяет условию

$$\varkappa > \sqrt{1-h'^2}\left|\frac{1}{h} - \frac{h''}{1-h'^2}\right|, \qquad |h'| < 1,$$

то первая краевая задача для уравнения $\psi=0$ в области G при граничных значениях h вдоль γ всегда разрешима. Если метрика ds^2 принадлежит классу C^n, $n \geqslant 2$, то решение принадлежит классу $C^{n-1+\alpha}$. Если метрика аналитическая, то решение аналитическое.

Доказательство этой теоремы основано на тех же соображениях, что и в теореме 6. Сначала строится на плоскости кривая $\bar{\gamma}$, задаваемая в полярных координатах ρ, ϑ уравнениями

$$\theta=\theta(s), \qquad \rho=h(s),$$

где s — дуга кривой $\bar{\gamma}$. Кривизна этой кривой равна

$$k=\sqrt{1-h'^2}\left(\frac{1}{h} - \frac{h''}{1-h'^2}\right).$$

Из начала координат O к концам кривой $\bar{\gamma}$ проводятся полупрямые, и угол, образованный этими полупрямыми, сворачивается в конус. Этот конус кривой $\bar{\gamma}$ разбивается на две части. Пусть V — та из этих частей, которая содержит вершину O. Реализуем метрику ds^2, заданную в области G, выпуклой шапкой F. Для этой шапки и конуса V выполнены условия теоремы о склеивании. Отсюда следует существование замкнутой выпуклой поверхности Φ, состоящей из двух частей: $\bar{F}$, изометричной шапке F, и $\bar{V}$, изометричной конусу V. Далее показывается, что поверхность $\bar{V}$ сама является конусом. Расстояние ρ от вершины этого конуса до точек поверхности $\bar{F}$, рассматриваемое как функция координат u, v на поверхности, и есть решение краевой задачи, существование которого утверждается теоремой.

§ 11. Об оценках для производных решения уравнения в частных производных второго порядка эллиптического типа

В доказательстве регулярности выпуклой поверхности с регулярной метрикой (теорема 1 § 10) мы воспользовались одной теоремой об оценках производных решения уравнения в частных производных второго порядка эллиптического типа. Доказательству этой теоремы посвящен настоящий параграф.

Теорема 1. *Пусть*

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t)=0 \tag{1}$$

— уравнение в частных производных эллиптического типа и $z=z(x, y)$ — его регулярное решение в области G плоскости xy.

Тогда для модулей третьих производных функции z в точке (x, y) области G могут быть получены оценки в зависимости только от верхней грани модулей функции z и ее производных до второго порядка, верхней грани модулей частных производных функции F до третьего порядка, верхней грани модулей величин

$$\frac{1}{F_r},\ \frac{1}{F_t},\ \frac{1}{F_rF_t-\frac{1}{4}F_s^2}$$

и расстояния точки (x, y) от границы области G *).

Доказательство. Дифференцируя уравнение (1) по x, получим

$$F_rr_x+F_ss_x+F_tt_x=M_1. \tag{2}$$

Дифференцируя уравнение (2) еще раз по x, получим

$$F_rr_{xx}+F_ss_{xx}+F_tt_{xx}=M_2, \tag{3}$$

где M_2 представляет собой многочлен второй степени относительно третьих производных r_x, s_x и t_x, коэффициенты которого не содержат производных функции z выше второго порядка. Подставим вместо третьей производной t_x в M_2 ее выражение через r_x и s_x из (2), тогда M_2 превращается в многочлен не выше второй степени относительно третьих производных r_x и s_x с коэффициентами, не содержащими производных функции z выше второго порядка.

Пусть $n_1, n_2, \ldots, n_5$ — производные функции z по x и y до второго порядка, $N_1, N_2, \ldots$ — все производные функции F по ее аргументам до третьего порядка. Тогда для удобства изложения выражения вида

$$\sum\frac{n_1^{\alpha_1}\ldots n_5^{\alpha_5}N_1^{\beta_1}\ldots N_k^{\beta_k}}{F_r^{\lambda}F_t^{\mu}\left(F_rF_t-\frac{1}{4}F_s^2\right)^{\nu}}, \tag{ω}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_1, \beta_2, \ldots, \lambda, \mu, \nu$ — любые целые неотрицательные числа, будем называть «выражениями типа (ω)».

Положим

$$r=-M+\alpha\ln\ln u,$$

*) Предполагается, что после формального вычисления производных функции F вместо z, p, q, r, s, t подставляется решение $z(x, y)$ и его производные, а затем вычисляются верхние грани модулей указанных величин.

где M — верхняя грань модуля второй производной r. Тогда из уравнения (3) получим

$$Ar_1 + 2Bs_1 + Ct_1 = \\ = \frac{1+\ln u}{u \ln u}(Ap_1^2 + 2Bp_1q_1 + Cq_1^2) + \frac{\alpha}{u \ln u} P_2 + P_1 + \frac{u \ln u}{\alpha} P_0 = Q_1, \quad (4)$$

где p_1, q_1, r_1, s_1, t_1 — обозначения для первых и вторых производных функции $u(x, y)$, $A = F_r$, $2B = F_s$, $C = F_t$, а P_2, P_1, P_0 — многочлены соответственно второй, первой и нулевой степени относительно p_1 и q_1 с коэффициентами типа (ω).

Следуя С. Н. Бернштейну [21], рассмотрим теперь функцию $w(x, y)$, определяемую равенством

$$w = Ap_1^2 + 2Bp_1q_1 + Cq_1^2.$$

Допустим, что в некоторой точке (x_0, y_0) эта функция достигает максимума. Тогда в этой точке

$$w_x = 0, \qquad w_y = 0. \quad (5)$$

Решая эти уравнения совместно с уравнением (4) относительно r_1, s_1, t_1, получим

$$r_1 = \frac{1}{w\Delta}\left\{ w\,(Bp_1 + Cq_1)^2 \frac{1+\ln u}{u \ln u} + \frac{\alpha g_1}{u \ln u} + h_1 + \frac{l_1 u \ln u}{\alpha} \right\},$$

$$s_1 = -\frac{1}{w\Delta}\left\{ w\,(Bp_1 + Cq_1)(Ap_1 + Bq_1) \frac{1+\ln u}{u \ln u} + \frac{\alpha g_2}{u \ln u} + h_2 + \frac{l_2 u \ln u}{\alpha} \right\},$$

$$t_1 = \frac{1}{w\Delta}\left\{ w\,(Ap_1 + Bq_1)^2 \frac{1+\ln u}{u \ln u} + \frac{\alpha g_3}{u \ln u} + h_3 + \frac{l_3 u \ln u}{\alpha} \right\},$$

где $\Delta = AC - B^2$; g_1, g_2, g_3 — многочлены не выше четвертой степени относительно p_1, q_1; h_1, h_2, h_3 — не выше третьей степени, l_1, l_2, l_3 — не выше второй степени с коэффициентами типа (ω).

Рассмотрим выражение

$$K(w) = \frac{1}{2}(Aw_{xx} + 2Bw_{xy} + Cw_{yy}).$$

Если предположить, что $A > 0$, а этого всегда можно добиться, умножая, в случае необходимости, исходное уравнение (1) на -1, то в точке, где w достигает максимума, $K(w) \leqslant 0$, так как форма

$$A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2$$

положительно определенная, а форма

$$w_{xx}\xi^2 + 2w_{xy}\xi\eta + w_{yy}\eta^2$$

не принимает положительных значений. Подставляя в $K(w)$ $w = Ap_1^2 + 2Bp_1q_1 + Cq_1^2$, находим

$$K(w) = (Ap_1 + Bq_1)(Ap_{1xx} + 2Bp_{1xy} + Cp_{1yy}) + \\ + (Bp_1 + Cq_1)(Aq_{1xx} + 2Bq_{1xy} + Cq_{1yy}) + A(Ar_1^2 + 2Br_1s_1 + Cs_1^2) + \\ + 2B(Ar_1s_1 + B(r_1t_1 + s_1^2) + Cs_1t_1) + C(As_1^2 + 2Bs_1t_1 + Ct_1^2) + \\ + H_1 + H_2 + \frac{\alpha}{u \ln u} H_3 + \alpha \frac{1 + \ln u}{(u \ln u)^2} H_4 + \frac{\alpha^2}{(u \ln u)^2} H_5,$$

где H_1 — многочлен первой степени относительно p_1r_1, p_1s_1, p_1t_1, q_1s_1, q_1r_1, q_1t_1; H_2 — многочлен второй степени относительно p_1, q_1; H_3 — многочлен первой степени относительно $p_1^2r_1$, $p_1^2s_1$, $p_1^2t_1$, $p_1q_1r_1$, $p_1q_1s_1$, $p_1q_1t_1$, $q_1^2r_1$, $q_1^2s_1$, $q_1^2t_1$ и, наконец, H_4 и H_5 — многочлены четвертой степени относительно p_1, q_1. Коэффициенты всех многочленов суть выражения типа (ω).

Дифференцируя уравнение (4) по x, получим

$$Ap_{1xx} + 2Bp_{1xy} + Cp_{1yy} = \\ = -\frac{1 + \ln u + (\ln u)^2}{(u \ln u)^2} p_1 w + \frac{\alpha(1 + \ln u)}{(u \ln u)^2} G_1 + \frac{\alpha}{u \ln u} G_2 + \\ + \frac{\alpha^2}{u \ln u} G_3 + G_4 + \frac{u \ln u}{\alpha} G_5 + \frac{1 + \ln u}{u \ln u} G_6,$$

где G_1 и G_3 — многочлены третьей степени, G_5 — первой степени относительно p_1, q_1; G_2 — многочлен первой степени относительно p_1r_1, p_1s_1, p_1t_1, q_1r_1, q_1s_1, q_1t_1, p_1^2, p_1q_1, q_1^2; G_4 — многочлен первой степени относительно r_1, s_1, t_1, p_1, q_1; наконец, G_6 — многочлен второй степени относительно p_1 и q_1, и все с коэффициентами типа (ω).

Точно так же, дифференцируя уравнение (4) по y, получим

$$Aq_{1xx} + 2Bq_{1xy} + Cq_{1yy} = \\ = -\frac{1 + \ln u + (\ln u)^2}{(u \ln u)^2} q_1 w + \frac{\alpha(1 + \ln u)}{(u \ln u)^2} G_{(1)} + \frac{\alpha}{u \ln u} G_{(2)} + \\ + \frac{\alpha^2}{(u \ln u)^2} G_{(3)} + G_{(4)} + \frac{u \ln u}{\alpha} G_{(5)} + \frac{1 + \ln u}{u \ln u} G_{(6)},$$

где $G_{(1)}$, $G_{(2)}$, ..., $G_{(6)}$ — многочлены, обладающие свойствами, аналогичными свойствам многочленов G_1, G_2, ..., G_6.

Обращаясь теперь к выражению $K(w)$ и подставляя туда найденные выражения для $Ap_{1xx}+2Bp_{1xy}+Cp_{1yy}$ и $Aq_{1xx}+$ $+2Bq_{1xy}+Cq_{1yy}$, получим

$$w^2K(w) = -\frac{1+\ln u+(\ln u)^2}{(u\ln u)^2}w^4+\left(\frac{1+\ln u}{u\ln u}\right)^2 w^4+$$
$$+\alpha\frac{1+\ln u}{(u\ln u)^2}+wP_6+\frac{\alpha^2}{(u\ln u)^2}P_8+\frac{1+\ln u}{u\ln u}P_7+$$
$$+\frac{\alpha}{u\ln u}P'_7+\frac{u\ln u}{\alpha}P'_6+P''_6+\left(\frac{u\ln u}{\alpha}\right)P_4,$$

где через P_k, P'_k и P''_k обозначены многочлены степени k относительно p_1, q_1 с коэффициентами типа (ω).

Совокупность членов восьмой степени относительно p_1 и q_1 в $w^2K(w)$ задается выражением

$$T_8=\frac{w^4}{u^2\ln u}+\alpha\frac{1+\ln u}{(u\ln u)^2}wP_6+\frac{\alpha^2}{(u\ln u)^2}P_8.$$

Так как $\ln u>1$, то можно указать достаточно малое число α такое, чтобы при $|p|+|q|>1$ было

$$T_8>\frac{1}{2}\frac{w^4}{u^2\ln u}.$$

Пусть α выбрано именно таким образом.

Тогда, если $|p|+|q|<1$, то функция

$$w=Ap_1^2+2Bp_1q_1+Cq_1^2$$

не может превзойти максимума $|A|+2|B|+|C|$. Если же $|p|+|q|>1$, то

$$w^2K(w)>\frac{1}{2}\frac{w^4}{u^2\ln u}+T_7.$$

И так как $K(w)\leqslant 0$, то не представляет труда указать число w_0, которого w в точке (x_0, y_0) не может превзойти.

Теперь, когда получена оценка для w, получение оценок для третьих производных r_x и s_x не составляет труда, так как

$$w=\alpha^2e^{2\left(\frac{r+M}{\alpha}\right)}e^{2e^{\left(\frac{r+M}{\alpha}\right)}}(Ar_x^2+2Br_xs_x+Cs_x^2).$$

Аналогично могут быть получены оценки для третьих производных s_y и t_y.

При получении оценки максимума функции w мы предполагали, что этот максимум достигается внутри области G при достаточно малых значениях параметра α.

Оценим теперь величину w в некоторой внутренней точке области G, удаленной на расстояние ε от ее границы, без пред-

положения о том, что максимум w достигается внутри области G.

Не ограничивая общности, можно считать, что точка, в которой желательно получить оценку для w, есть начало координат.

Рассмотрим функцию

$$\widetilde{w}=\lambda w,$$

где $\lambda=(\varepsilon^2-x^2-y^2)^2$, а w — введенная раньше вспомогательная функция С. Н. Бернштейна. В круге $\omega_\varepsilon\,(x^2+y^2\leqslant\varepsilon^2)$ функция $\widetilde{w}$ неотрицательна, обращается в нуль на окружности круга и, следовательно, достигает максимума в некоторой внутренней точке P круга ω_ε. В точке P

$$\widetilde{w}_x=w_x\lambda+w\lambda_x=0, \quad \widetilde{w}_y=w_y\lambda+w\lambda_y=0.$$

Отсюда

$$w_x=-\frac{\lambda_x}{\lambda}w, \quad w_y=-\frac{\lambda_y}{\lambda}w.$$

Далее, в той же точке P по известной причине

$$K(\widetilde{w})=\frac{1}{2}(A\widetilde{w}_{xx}+2B\widetilde{w}_{xy}+C\widetilde{w}_{yy})\leqslant 0.$$

Преобразуем $K(\widetilde{w})$:

$$K(\widetilde{w})=\frac{1}{2}\lambda(Aw_{xx}+2Bw_{xy}+Cw_{yy})+\frac{1}{2}w(A\lambda_{xx}+2B\lambda_{xy}+C\lambda_{yy})+$$
$$+(A\lambda_x w_x+B(\lambda_x w_y+\lambda_y w_x)+C\lambda_y w_y)$$

Заменяя w_x и w_y найденными их выражениями в точке P и замечая, что $\left|\frac{1}{\lambda}\lambda_x^2\right|$, $\left|\frac{1}{\lambda}\lambda_x\lambda_y\right|$, $\left|\frac{1}{\lambda}\lambda_y^2\right|$ ограничены, получим

$$K(\widetilde{w})=\lambda K(w)+wL,$$

где L — некоторая функция, модуль которой не может превзойти некоторого числа L_0, зависящего от верхней грани модулей коэффициентов A, B, C.

Так как $K(\widetilde{w})\leqslant 0$ в точке P, то в этой точке

$$K(w)-\frac{wL_0}{\lambda}\leqslant 0.$$

Найдем вторые производные r_1, s_1, t_1 функции u в точке P, где $\widetilde{w}$ достигает максимума, из системы

$$Ar_1+2Bs_1+Ct_1=Q_1;$$
$$w_x=-\frac{\lambda_x}{\lambda}w; \quad w_y=-\frac{\lambda_y}{\lambda}w.$$

Если правые части двух последних уравнений заменить нулями, то мы приходим к рассмотренной выше системе (4), (5). Поэтому решения этой системы можно представить в виде

$$r_1 = \beta_1 + n_1, \quad s_1 = \beta_2 + n_2, \quad t_1 = \beta_3 + n_3,$$

где β_1, β_2, β_3 — решение системы (4), (5), а n_1, n_2, n_3 — решение системы

$$Ar_1 + 2Bs_1 + Ct_1 = 0,$$

$$r_1(Ap_1 + Bq_1) + s_1(Bp_1 + Cq_1) = -\frac{\lambda_x w}{2\lambda},$$

$$s_1(Ap_1 + Bq_1) + t_1(Bp_1 + Cq_1) = -\frac{\lambda_y w}{2\lambda}.$$

Решения этой системы имеют вид

$$n_1 = \frac{\lambda_x k_1 + \lambda_y l_1}{\lambda}, \quad n_2 = \frac{\lambda_x k_2 + \lambda_y l_2}{\lambda}, \quad n_3 = \frac{\lambda_x k_3 + \lambda_y l_3}{\lambda},$$

где k_1, l_1, k_2, l_2, k_3, l_3 — линейные выражения относительно p_1, q_1 с известными ограниченными коэффициентами.

Положим

$$K(w) = K_\beta(w) + K_n(w),$$

где $K_\beta(w)$ — значение $K(w)$, если в качестве r_1, s_1, t_1 взять β_1, β_2, β_3, а $K_n(w)$ — добавка к $K_\beta(w)$, которая вызвана тем, что r_1, s_1, t_1 равны β_1+n_1, β_2+n_2, β_3+n_3 соответственно.

Все члены $K(w)$, содержащиеся в $K_n(w)$, входят в выражение

$$(Ap_1 + Bq_1)\left(\frac{\alpha G_2}{u \ln u} + G_4\right) + (Bp_1 + Cq_1)\left(\frac{\alpha G_{(2)}}{u \ln u} + G_{(4)}\right) +$$
$$+ A\left(Ar_1^2 + 2Br_1 s_1 + Cs_1^2\right) + 2B\left(Ar_1 s_1 + B\left(r_1 t_1 + s_1^2\right) + Cs_1 t_1\right) +$$
$$+ C\left(As_1^2 + 2Bs_1 t_1 + Ct_1^2\right) + H_1 + \frac{\alpha H_3}{u \ln u}.$$

Если теперь заметить, что β_1, β_2, β_3 при больших w имеют порядок w, а n_1, n_2, n_3 имеют порядок не выше $\frac{1}{\lambda}\sqrt{w}\,(|\lambda_x| + |\lambda_y|)$, то нетрудно заключить, что при больших w

$$|K_n(w)| < N\left\{\frac{w^{3/2}}{\lambda}(|\lambda_x| + |\lambda_y|) + \frac{w}{\lambda^2}\left(\lambda_x^2 + \lambda_y^2\right)\right\},$$

где N — некоторая постоянная, зависящая только от верхней грани модулей производных z до второго порядка, верхней грани модулей производных F до третьего порядка, верхней грани функций $\frac{1}{F_r}$, $\frac{1}{F_t}$, $\frac{1}{F_r F_t - \frac{1}{4} F_s^2}$ в области G.

Взяв достаточно малым число α, при достаточно больших w будем иметь

$$K_\beta(w) > \frac{1}{4}\frac{w^2}{u^2 \ln u}.$$

Но

$$K(w) - \frac{L_0 w}{\lambda} < 0,$$

поэтому при больших w

$$\frac{1}{4}\frac{w^2}{u^2 \ln u} - N\left(\frac{w^{3/2}}{\lambda}(|\lambda_x| + |\lambda_y|) + \frac{w}{\lambda^2}(\lambda_x^2 + \lambda_y^2)\right) - \frac{wL_0}{\lambda} < 0.$$

Отсюда следует, что существует достаточно большое число R_0, зависящее только от верхней грани модулей производных F и z в области G, такое, что w в точке P не превосходит числа

$$w_0 = \frac{R_0}{\lambda}.$$

Следовательно, в круге ω_ε, в частности, в его центре, $\widetilde{w} \leqslant R_0$. Таким образом, для w в точке области G, удаленной на расстояние ε от ее границы, получается оценка

$$w \leqslant \frac{R_0}{\varepsilon^4},$$

причем R_0 зависит только от верхней грани модулей производных функций z и F до второго и соответственно третьего порядков и верхней грани модулей величин

$$\frac{1}{F_r},\ \frac{1}{F_t},\ \frac{1}{F_r F_t - \frac{1}{4}F_s^2}.$$

в области G.

После того как получена оценка для w, получение оценок для третьих производных функции z не представляет труда. Теорема доказана.

Получение оценок для четвертых и последующих производных решения $z(x, y)$ уравнения (1) может быть основано на следующей теореме Шаудера [72] для линейных уравнений эллиптического типа.

Пусть в ограниченной области G переменных x_1, x_2 рассматривается линейное уравнение в частных производных эллиптического типа

$$a_{11}(x_1, x_2)u_{11} + 2a_{12}(x_1, x_2)u_{12} + a_{22}(x_1, x_2)u_{22} = f(x_1, x_2),$$

причем $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 1$. Пусть, далее, в замкнутой области $\bar{G}$ коэффициенты уравнения a_{ij} и его правая часть f удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $\alpha + \varepsilon$ $(0 < \alpha < 1,\ \varepsilon > 0)$ и постоянной Гёльдера M.

Тогда, если вторые производные решения $u(x_1, x_2)$ удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α, то для верхней грани модулей производных $u(x_1, x_2)$ первого и второго порядка в области B, которая вместе с границей содержится в G, и для наименьших постоянных Гёльдера вторых производных функции $u(x_1, x_2)$ в области B относительно показателя α может быть указан верхний предел в зависимости только от M, максимума модуля $u(x_1, x_2)$ в G и расстояния области B от границы области G. Пусть

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t)=0 \tag{6}$$

— уравнение в частных производных эллиптического типа в круге ω_ε $(x^2+y^2 \leqslant \varepsilon^2)$, $z(x, y)$ — его решение. Дифференцируя уравнение (6), например по x, получим уравнение, которому удовлетворяет функция $u=z_x$:

$$\frac{A}{\Delta} u_{xx}+\frac{2B}{\Delta} u_{xy}+\frac{C}{\Delta} u_{yy}=\frac{D}{\delta}, \tag{7}$$

где

$$A=F_r, \quad 2B=F_s, \quad C=F_t, \quad \Delta^2=AC-B^2,$$

D — некоторое выражение, построенное из производных первого порядка функции F и производных решения $z(x, y)$ до второго порядка.

Будем рассматривать коэффициенты уравнения (7) как известные функции x и y. Тогда в отношении уравнения (7) мы находимся в условиях применимости теоремы Шаудера. В самом деле, мы можем оценить постоянную Гёльдера относительно показателя α $(0<\alpha<1)$ для коэффициентов и правой части уравнения (7) в зависимости только от верхней грани модулей вторых производных функции F, третьих производных решения $z(x, y)$ и нижней грани дискриминанта уравнения $AC-B^2$ в круге ω_ε.

По теореме Шаудера можно указать оценку постоянной Гёльдера для вторых производных функции u (т. е. третьих производных z) относительно показателя $\alpha'<\alpha$ в круге $\omega_{\bar{\varepsilon}}$, целиком содержащемся в ω_ε. Итак, зная оценки для третьих производных решения, мы можем оценить наименьшие постоянные Гёльдера этих производных относительно любого показателя α $(0<\alpha<1)$ в круге $\omega_{\bar{\varepsilon}} \subset \omega_\varepsilon$, используя при этом только двукратную дифференцируемость функции F.

Дифференцируя уравнение (6), например, дважды по x, мы получим уравнение такого же вида, как уравнение (7), для функции $v=z_{xx}$, с той лишь разницей, что теперь правая часть будет выражением, построенным из вторых производных функции F и третьих производных решения $z(x, y)$. Рассматривая

снова коэффициенты полученного уравнения и его правую часть как известные функции x и y, применяем теорему Шаудера. В результате получаем оценки для вторых производных функции v и их наименьших постоянных Гёльдера относительно показателя $\alpha'' < \alpha'$ в круге $\omega_{\bar{\bar{\varepsilon}}}$, целиком лежащем в круге $\omega_{\bar{\varepsilon}}$.

Так, шаг за шагом, могут быть получены оценки для производных любого порядка функции z и их наименьших постоянных Гёльдера относительно любого положительного показателя, меньшего единицы. Окончательный результат может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 2. *Пусть*

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

— уравнение в частных производных эллиптического типа, $z(x, y)$ — его регулярное решение в круге ω_ε: $x^2 + y^2 \leqslant \varepsilon^2$.

Тогда внутри круга $\omega_{\bar{\varepsilon}}$ $(\bar{\varepsilon} < \varepsilon)$ можно указать оценку для производных k-го порядка решения $z(x, y)$ в зависимости только от верхней грани модуля z и его производных до второго порядка в круге ω_ε, верхней грани величин

$$\frac{1}{|F_r|}, \quad \frac{1}{|F_t|}, \quad \frac{1}{F_r F_t - \frac{1}{4} F_s^2}$$

и верхней грани модулей производных функции F до s-го порядка, причем $s = 3$ при $k = 3$ и $s = k - 1$ при $k > 3$.

Более того, в зависимости от тех же величин могут быть указаны оценки для наименьших постоянных Гёльдера производных k-го порядка функции z относительно любого показателя α $(0 < \alpha < 1)$.

Глава III

Однозначная определенность выпуклых поверхностей

Проблема однозначной определенности заключается в решении вопроса о равенстве изометричных поверхностей при наличии изометрии. Вот один из относящихся сюда результатов:

Два изометричных замкнутых выпуклых многогранника равны.

Значение проблемы однозначной определенности для выпуклых поверхностей особенно возросло в связи с доказательством А. Д. Александрова теорем о реализуемости абстрактно заданной выпуклой метрики выпуклой поверхностью; эти теоремы как средство исследования в теории выпуклых поверхностей значительно усиливаются фактом однозначной определенности. В теории поверхностей теоремы реализуемости и однозначной определенности находятся между собой в таком же отношении, в каком находятся в теории дифференциальных уравнений теоремы существования и единственности решения.

Проблема однозначной определенности выпуклых поверхностей привлекала к себе внимание многих геометров. Первый результат был получен еще Коши, который в 1813 г. доказал, что два замкнутых выпуклых многогранника, одинаково составленные из конгруэнтных граней, равны.

Несколько позже, в 1838 г., Миндинг высказал гипотезу, что сфера неизгибаема. Однако доказать это удалось только в 1899 г. Либману и Минковскому. Ими была доказана не только неизгибаемость, но и то, что сфера не допускает нетривиальных изометрических преобразований, т. е. ее однозначная определенность.

После этого вопросом неизгибаемости и однозначной определенности выпуклых поверхностей занимались Гильберт, Вейль, Бляшке, Кон-Фоссен. Усилиями этих геометров была доказана неизгибаемость замкнутых регулярных выпуклых поверхностей (Либман, Бляшке, Вейль) и однозначная определенность замкнутых регулярных (трижды непрерывно дифференцируемых) поверхностей с положительной гауссовой кривизной в классе поверхностей с такой же степенью регулярности (Кон-Фоссен [40]). Теорема Кон-Фоссена гласит:

Если F_1 — трижды непрерывно дифференцируемая замкнутая выпуклая поверхность с положительной гауссовой кривизной и F_2 — трижды непрерывно дифференцируемая поверхность, изометричная F_1, то F_2 конгруэнтна либо F_1, либо зеркальному изображению F_1.

В 1941 г. С. П. Оловянишников получил принципиально новый результат в проблеме однозначной определенности выпуклых поверхностей. Он доказал, что всякая выпуклая поверхность F, изометричная замкнутому выпуклому многограннику P (без предположения о том, что она является многогранником) есть многогранник, равный P [54].

Полное решение проблемы об однозначной определенности выпуклых поверхностей, причем не только замкнутых, было получено автором сначала для выпуклых поверхностей ограниченной удельной кривизны [59], а затем и для общих выпуклых поверхностей [60]. Изложению этих результатов и посвящается в основном настоящая глава.

§ 1. Кривые ограниченной вариации поворота

Достаточно широкий класс в известном смысле «хороших» кривых на общей выпуклой поверхности составляют кривые ограниченной вариации поворота. В дальнейшем нам предстоит рассматривать такого рода кривые в одном из центральных мест доказательства основной теоремы об однозначной определенности замкнутых выпуклых поверхностей (§ 6).

Под кривой мы будем понимать непрерывный и однозначный образ отображения отрезка в пространство. Введем понятие вариации поворота кривой.

Пусть γ — кривая в пространстве. Впишем в нее ломаную c и обозначим $\omega(c)$ сумму дополнений до π углов этой ломаной. Верхний предел $\omega(\gamma)$ величин $\omega(c)$ по всем ломаным c, вписанным в кривую γ, называется *вариацией поворота* кривой γ. Если $\omega(\gamma)$ конечно, то γ называется *кривой с ограниченной вариацией поворота.*

Рассмотрим некоторые свойства кривых ограниченной вариации поворота. Сначала отметим следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть c — ломаная в пространстве. Если звено a этой ломаной заменить двумя звеньями, то поворот ломаной ω не уменьшится, причем он наверное увеличится, если звенья ломаной c, примыкающие к a, не лежат в одной плоскости.*

Доказательство. Пусть e_1, e_2, e_3, e_2', e_2'' — векторы, изображаемые звеньями ломаной (рис. 23). Обозначим через $\vartheta(x, y)$ угол, образуемый векторами x и y. Тогда поворот

исходной ломаной на участке AB равен

$$\omega(c)=\vartheta(e_1, e_2)+\vartheta(e_2, e_3).$$

После замены звена a двумя звеньями поворот ломаной на том же участке будет

$$\omega(c')=\vartheta(e_1, e_2')+\vartheta(e_2', e_2'')+\vartheta(e_2'', e_3).$$

Так как $e_2=e_2'+e_2''$, то

$$\vartheta(e_2', e_2)+\vartheta(e_2, e_2'')=\vartheta(e_2', e_2'').$$

Сумма двух плоских углов трехгранного угла не меньше третьего, причем равна ему только тогда, когда трехгранный угол вырождается. Отсюда

$$\vartheta(e_1, e_2)\leqslant\vartheta(e_1, e_2')+\vartheta(e_2', e_2),$$
$$\vartheta(e_2, e_3)\leqslant\vartheta(e_2, e_2'')+\vartheta(e_2'', e_3).$$

Следовательно,

$$\omega(c)\leqslant\omega(c'),$$

причем имеет место строгое неравенство, если рассматриваемые три звена исходной ломаной не лежат в одной плоскости. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть V_1 и V_2 — два круговых конуса с общей вершиной O, не имеющие других общих точек. Пусть точки A и B принадлежат конусу V_1, а точка C принадлежит конусу V_2. Тогда существует такое положительное число ε, что при любом расположении точек A, B, C угол $\vartheta(C)$ треугольника ABC не превосходит $\pi-\varepsilon$.*

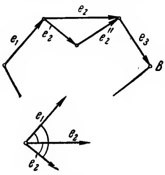

Рис. 23.

Доказательство. При смещении вершины A вдоль полупрямой OA в одном из двух направлений угол $\vartheta(C)$ монотонно растет. Аналогично, при смещении точки B вдоль полупрямой OB в одном из двух направлений угол $\vartheta(C)$ также монотонно растет. Отсюда следует, что угол $\vartheta(C)$ исходного треугольника не превосходит либо максимального угла α, образуемого полупрямыми, проходящими внутрь конуса V_1, либо угла $\pi-\beta$, где β — наименьший угол, образуемый полупрямыми, одна из которых проходит внутри конуса V_1, а другая внутри конуса V_2. Число ε есть меньшее из двух чисел $\pi-\alpha$ и β. Лемма доказана.

Теорема 1. *Кривая ограниченной вариации поворота имеет в каждой точке правую и левую полукасательные.*

Доказательство. Допустим, утверждение неверно и кривая γ ограниченной вариации поворота в точке O не имеет правой полукасательной. Тогда существуют две последовательности точек на кривой, сходящиеся в точке O справа по двум различным направлениям t_1 и t_2. Опишем около каждой из полупрямых t_1 и t_2 конус с вершиной O так, чтобы эти конусы не имели других общих точек, кроме вершины O. Впишем теперь в кривую γ ломаную c с достаточно большим числом звеньев так, чтобы все ее вершины принадлежали построенным конусам, причем чтобы любые две соседние вершины принадлежали разным конусам. Согласно лемме 2 поворот ломаной c может быть сколь угодно большим, если только достаточно велико число ее звеньев. Но это невозможно, так как по предположению кривая γ ограниченной вариации поворота. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть точка P разбивает кривую γ ограниченной вариации поворота на две кривые γ' и γ''. Пусть $\vartheta(P)$ — угол между правой и левой полукасательной в точке P. Тогда* $\omega(\gamma)=\omega(\gamma')+\omega(\gamma'')+(\pi-\vartheta(P))$.

Доказательство. Пусть c_n', c_n'' и c_n — последовательности вписанных в кривые γ', γ'' и γ ломаных, удовлетворяющие условиям $\omega(c_n')\to\omega(\gamma')$, $\omega(c_n'')\to\omega(\gamma'')$, $\omega(c_n)\to\omega(\gamma)$. Согласно лемме 1, не ограничивая общности, можно считать, что звенья ломаных стремятся к нулю. Пополним вершины каждой из ломаных c_n', c_n'', c_n вершинами двух других. Тогда получим ломаные $\bar{c}_n'$, $\bar{c}_n''$, $\bar{c}_n$. Они обладают свойствами ломаных c_n', c_n'', c_n, т. е. при $n\to\infty$

$$\omega(\bar{c}_n')\to\omega(\gamma'),\quad \omega(\bar{c}_n'')\to\omega(\gamma''),\quad \omega(\bar{c}_n)\to\omega(\gamma).$$

Так как $\omega(\bar{c}_n)=\omega(\bar{c}_n')+\omega(\bar{c}_n'')+(\pi-\vartheta_n(P))$ ($\vartheta_n(P)$ — угол между звеньями ломаной $\bar{c}_n$, сходящимися в точке P) и $\vartheta_n(P)\to\vartheta(P)$, то действительно

$$\omega(\gamma)=\omega(\gamma')+\omega(\gamma'')+(\pi-\vartheta(P)).$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *На кривой ограниченной вариации поворота может быть не более счетного множества угловых точек, т. е. таких точек, в которых правая и левая полукасательные образуют угол, отличный от π.*

Доказательство. Согласно теореме 2 множество M_n тех угловых точек кривой, в которых полукасательные образуют

угол, меньший $\pi - \frac{1}{n}$, конечно. Отсюда следует, что множество всех угловых точек

$$M = \sum_n M_n$$

не более чем счетно. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть P — точка на кривой γ ограниченной вариации поворота. Тогда справа (соответственно слева) от точки P на кривой γ можно указать точку $Q \neq P$ такую, что вариация поворота дуги PQ кривой γ будет сколь угодно мала.*

Доказательство. Пусть γ' — часть кривой γ, расположенная справа от точки P. Впишем в кривую γ' ломаную c так, чтобы $\omega(\gamma') - \omega(c) < \varepsilon$. Пусть A — первая вершина ломаной c, если двигаться от точки P. Возьмем между точками P и A кривой γ' еще одну вершину ломаной — точку Q, настолько близкую к P, чтобы угол между звеньями, примыкающими к вершине A, изменился при этом на величину, не превосходящую ε. Очевидно, вариация дуги PQ кривой γ не больше 2ε. Теорема доказана.

Теорема 5. *Кривую ограниченной вариации поворота можно разбить на конечное число кусков со сколь угодно малой вариацией поворота.*

Доказательство. По теореме 4 у каждой точки P кривой существует замкнутая окрестность $U(P)$ такая, что ее правая и левая полуокрестности $U'(P)$ и $U''(P)$ имеют поворот меньше ε. Из окрестностей $U(P)$ можно выделить конечное покрытие кривой. Из соответствующих полуокрестностей строится без труда разбиение кривой, обладающее указанным свойством. Теорема доказана.

Теорема 6. *Кривая ограниченной вариации поворота спрямляема.*

Доказательство. Согласно теореме 5 достаточно доказать спрямляемость кривой с вариацией поворота меньше ε. Впишем в такую кривую ломаную c. Звенья этой ломаной образуют с начальным звеном углы меньше ε. Поэтому длины ломаных c ограничены некоторым числом l, которое зависит только от ε и расстояния между концами кривой. Отсюда следует спрямляемость кривой. Теорема доказана.

Теорема 7. *Пусть P — точка кривой γ ограниченной вариации поворота, Q — близкая к P точка кривой, s_{PQ} — длина дуги отрезка PQ кривой γ, d_{PQ} — расстояние между точками P и Q. Тогда отношение s_{PQ}/d_{PQ} стремится к единице, когда $Q \to P$.*

Доказательство. При $Q \to P$ вариация поворота $\omega(P, Q)$ дуги PQ кривой γ стремится к нулю. Так как каждое звено ломаной c, вписанной в дугу PQ кривой γ, образует с начальным

звеном угол не больше $\omega(P, Q)$, то длина каждой ломаной c, а следовательно, и дуги PQ кривой γ, не больше $d_{PQ}/\cos\omega(P, Q)$. Отсюда заключаем, принимая во внимание $s_{PQ}/d_{PQ}>1$, что $s_{PQ}/d_{PQ}\to 1$, когда $Q\to P$. Теорема доказана.

Теорема 8. *Пусть γ — кривая ограниченной вариации поворота, $r(s)$ — точка кривой, соответствующая дуге s. Тогда вектор-функция $r(s)$ имеет для каждого s правую и левую производные, по абсолютной величине равные единице.*

Утверждение очевидно в силу теорем 1 и 7.

Понятие вариации поворота для кривых, имеющих в каждой точке правую (или левую) полукасательную, можно ввести другим способом. А именно, пусть γ — кривая, имеющая в каждой точке правую полукасательную. Возьмем на ней конечное число точек P_k и построим в каждой из них правую полукасательную t_k. Верхнюю грань суммы углов между последовательными полукасательными по всем конечным системам точек P_k будем называть *вариацией поворота* кривой γ. То, что это определение эквивалентно данному выше определению, пока не очевидно. В нижеследующих теоремах ограниченность вариации поворота кривой мы будем понимать в смысле этого определения.

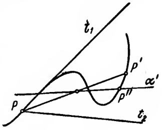

Рис. 24.

Теорема 9. *Пусть γ — кривая ограниченной вариации поворота, P — точка на ней, Q — точка кривой γ, близкая к P. Тогда, если $Q\to P$, оставаясь справа от P, то правая полукасательная в Q сходится к правой полукасательной в P; если же $Q\to P$, оставаясь слева от P, то полукасательная в точке Q сходится к некоторой полупрямой, которая может не совпадать с правой полукасательной в P.*

Доказательство. То, что полукасательная в точке Q стремится к определенному пределу, когда эта точка неограниченно приближается к P, оставаясь справа от нее (или соответственно слева), непосредственно вытекает из требования ограниченности поворота кривой γ. Покажем, что полукасательная в точке Q стремится к полукасательной в P, когда $Q\to P$, оставаясь справа от P. Допустим, утверждение неверно. Обозначим t_1 правую полукасательную в точке P и t_2 — предел полукасательной в Q, когда $Q\to P$ справа. Пусть P' — точка, близкая к P. Проведем через точки P и P' плоскость α перпендикулярно плоскости полупрямых t_1 и t_2, а потом повернем эту плоскость на малый угол около средины отрезка PP' в положение α' так, чтобы точка P' была с одной стороны плоскости α', а точка P и полупрямая t_2 — с другой (рис. 24). Пусть P'' — первая точка

дуги PP' кривой γ, если двигаться от P' к P, которая лежит в плоскости α'. Правая полукасательная кривой γ в точке P'' направлена либо в полупространство, определяемое плоскостью α', где лежит точка P', либо лежит в плоскости α'. Отсюда видно, что можно указать точку P'', сколь угодно близкую к точке P, в которой правая полукасательная кривой γ будет образовывать с полупрямой t_2 угол больше $\vartheta - \varepsilon$, где ϑ — угол между полупрямыми t_1 и t_2, а ε — любое положительное число. Мы пришли к противоречию с тем, что t_2 является пределом правых полукасательных. Теорема доказана.

Теорема 10. *Пусть γ — кривая ограниченной вариации поворота, P — точка этой кривой, A и B — точки кривой γ, расположенные справа от P, причем так, что A находится между P и B. Тогда при A и $B \to P$ направление отрезка AB сходится к направлению правой полукасательной t к γ в точке P.*

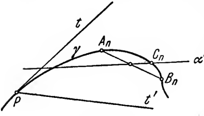

Рис. 25.

Доказательство. Допустим, утверждение неверно. Не ограничивая общности, можно считать, что существует последовательность пар точек A_n, B_n, такая, что направление отрезка A_nB_n сходится к некоторому направлению t', отличному от t. Построим плоскость α, параллельную t' и перпендикулярную плоскости направлений t и t'. Сместим эту плоскость параллельно так, чтобы она проходила через средину отрезка A_nB_n, а затем поворотом на малый угол переведем ее в положение α', при котором точки A_n и B_n будут по разные стороны плоскости α', причем точка A_n — с той стороны этой плоскости, куда направлена полупрямая t (рис. 25). Будем теперь двигаться вдоль γ из точки B_n к P, и первую точку встречи с плоскостью α' обозначим C_n. Правая полукасательная в точке C_n, если угол между плоскостями α и α' мал в сравнении с углом между направлениями t и t', не сходится к t — правой полукасательной в точке P. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Замечание к теореме 10. Очевидно, аналогичным рассуждением можно показать, что *если точки A и B расположены слева от P, причем так, что B находится между A и P, то при A и $B \to P$ направление отрезка AB сходится к тому же направлению, к которому сходится правая полукасательная в точке Q, сходящейся слева к точке P.*

Теорема 11. *Кривая ограниченной вариации поворота спрямляема.*

Доказательство. Пусть P — произвольная точка кривой и Q — близкая к ней точка кривой, расположенная справа от P. По теореме 10, если точка Q достаточно близка к P, то все звенья ломаной c, вписанной в отрезок PQ кривой, образуют с правой полукасательной в точке P углы меньше $\varepsilon<\pi/2$. Отсюда следует, что длина ломаной c не превосходит $PQ/\cos\varepsilon$. Аналогично с помощью замечания к теореме 10 показывается, что таким свойством обладает отрезок PQ кривой, если взять точку Q слева от P достаточно близко к P. Отсюда следует существование у каждой точки кривой спрямляемой окрестности, а следовательно, и спрямляемость всей кривой. Теорема доказана.

Теорема 12. *Пусть γ — кривая ограниченной вариации поворота, $r(s)$ — радиус-вектор точки этой кривой, соответствующей дуге s. Тогда в каждой точке существуют правая и левая производные вектор-функции $r(s)$ по дуге s, равные по абсолютной величине единице. Почти для всех s, исключая не более чем счетное множество s, правая и левая производные совпадают.*

Доказательство. Пусть Δs — малое положительное число. Впишем в отрезок $(s, s+\Delta s)$ кривой ломаную c с достаточно малыми звеньями так, чтобы ее длина была больше $\Delta s(1-\varepsilon)$. По теореме 10 при достаточно малом Δs звенья ломаной образуют с правой полукасательной в точке s углы меньше ε. Следовательно, вектор $\frac{r(s+\Delta s)-r(s)}{\Delta s}$ по направлению сходится к правой полукасательной кривой в точке s, а по величине к единице.

Аналогичными соображениями устанавливается существование левой производной вектор-функции $r(s)$. Счетность множества тех точек, в которых эти производные не совпадают, доказывается так же, как счетность множества угловых точек в теореме 3.

Теорема 13. *Первое и второе определения вариации поворота кривой эквивалентны.*

Доказательство. Пусть γ — кривая ограниченной вариации поворота в смысле первого определения. Согласно теореме 1 она в каждой точке имеет правую и левую полукасательные. Возьмем на кривой γ конечную систему точек $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и проведем в каждой точке P_k правую полукасательную t_k. Возьмем, далее, справа от каждой точки P_k близкую к ней точку Q_k и впишем в кривую γ ломаную c с вершинами $P_1, Q_1, P_2, Q_2, \ldots$ $\ldots, P_n, Q_n$. Поворот этой ломаной $\omega(c)$ не больше $\omega(\gamma)$. Если неограниченно приближать точки Q_k к соответствующим точкам P_k, то направления звеньев P_kQ_k сходятся к направлениям полукасательных t_k. Отсюда мы заключаем, что сумма углов $\omega_k'(\gamma)$ между последовательными полукасательными t_k не

превосходит $\omega(\gamma)$. Следовательно, кривая γ будет ограниченной вариации поворота в смысле второго определения, причем имеет место неравенство $\omega'(\gamma) \leqslant \omega(\gamma)$.

Пусть теперь γ — кривая ограниченной вариации поворота в смысле второго определения. Покажем, что она будет ограниченной вариации поворота в смысле первого определения, причем выполняется неравенство $\omega(\gamma) \leqslant \omega'(\gamma)$. Впишем в кривую γ произвольную ломаную c. Пополним вершины этой ломаной точками, в которых правая и левая полукасательные образуют угол больше ε (ε — малое положительное число). Пополним теперь ломаную c новыми вершинами так, чтобы правые полукасательные кривой γ в точках, лежащих между соседними вершинами ломаной, образовали углы меньше ε_1 ($\varepsilon_1 \ll \varepsilon$). Оценим теперь поворот полученной ломаной c'.

Пусть $\tau_i(s)$ — единичный вектор правой полукасательной кривой γ на участке, соответствующем i-му звену ломаной, δ_i — длина этого звена. Тогда поворот ломаной c' равен

$$\omega(c') = \sum_i \vartheta\left(\frac{1}{\delta_i}\int \tau_i\, ds,\ \frac{1}{\delta_{i+1}}\int \tau_{i+1}\, ds\right),$$

где ϑ обозначает угол между соответствующими векторами. Сумму, стоящую справа, удобно разбить на две суммы Σ' и Σ'', объединяя в первую слагаемые, соответствующие вершинам ломаной, в которых правая и левая полукасательные образуют угол больше ε, а в Σ'' — остальные слагаемые. Относительно каждого слагаемого прежней суммы заметим, что

$$\vartheta\left(\frac{1}{\delta_i}\int \tau_i\, ds,\ \frac{1}{\delta_{i+1}}\int \tau_{i+1}\, ds\right) \leqslant (1+\eta_1)\left|\frac{1}{\delta_i}\int \tau_i\, ds - \frac{1}{\delta_{i+1}}\int \tau_{i+1} ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant (1+\eta_2)\left|\frac{1}{s_i}\int \tau_i\, ds - \frac{1}{s_{i+1}}\int \tau_{i+1} ds\right|,$$

где η_1, η_2 — сколь угодно малые положительные числа, если ε_1 достаточно мало. Параметризуем теперь каждый участок кривой γ, относя точке X значение λ, равное отношению расстояния точки X от начальной точки участка к длине всего участка. Тогда для слагаемых суммы Σ'' будем иметь

$$\left|\frac{1}{s_i}\int \tau_i\, ds - \frac{1}{s_{i+1}}\int \tau_{i+1}\, ds\right| = \left|\int_0^1 \tau_i\, d\lambda - \int_0^1 \tau_{i+1}\, d\lambda\right| =$$

$$= \left|\int_0^1 (\tau_i - \tau_{i+1})\, d\lambda\right| \leqslant (1+\eta_3)\int_0^1 \vartheta(\tau_i,\ \tau_{i+1})\, d\lambda,$$

где η_3 по-прежнему мало вместе с ε_1.

Для слагаемых суммы Σ' также имеем

$$\vartheta\left(\frac{1}{\delta_i}\int \tau_i\,ds,\ \frac{1}{\delta_{i+1}}\int \tau_{i+1}\,ds\right) \leqslant (1+\eta_3)\int\limits_0^1 \vartheta(\tau_i,\ \tau_{i+1})\,d\lambda.$$

Принимая во внимание полученные выше оценки для сумм Σ'' и Σ', заключаем, что

$$\omega(c') \leqslant (1+\eta)\int\limits_0^1 \sum_i \vartheta(\tau_i,\ \tau_{i+1})\,d\lambda,$$

где η сколь угодно мало, если достаточно мало ε_1. Отсюда $\omega(c') \leqslant \omega'(\gamma)$ и, следовательно, $\omega(\gamma) \leqslant \omega'(\gamma)$. Так как, кроме того, было показано, что $\omega'(\gamma) \leqslant \omega(\gamma)$, то $\omega(\gamma) = \omega'(\gamma)$, что и требовалось доказать.

Теорема 14. *Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots$ — бесконечная последовательность кривых ограниченной вариации поворота, причем вариация поворота каждой кривой не превосходит V. Тогда, если последовательность кривых γ_n сходится к кривой γ, то эта кривая ограниченной вариации поворота и вариация поворота ее не превосходит V.*

Доказательство. Впишем в кривую γ произвольную ломаную c. В кривую γ_n, если достаточно велико n, можно вписать ломаную c_n, близкую к c, так, что $|\omega(c) - \omega(c_n)| < \varepsilon$. Так как вариации поворота кривых ограничены числом V, то $\omega(c_n) \leqslant V$. Отсюда, ввиду произвола c и малости ε, следует, что кривая γ имеет ограниченный поворот, не превосходящий V. Теорема доказана.

Теорема 15. *Если диаметр кривой γ не больше d, а вариация не больше V, то длина ее не превосходит $2\left(\left[\frac{3V}{\pi}\right]+1\right)d$, где $\left[\frac{3V}{\pi}\right]$ обозначает целую часть $\frac{3V}{\pi}$.*

Доказательство. Кривую γ можно разбить на $\left[\frac{3V}{\pi}\right]+1$ кусков γ_k, каждый из которых имеет вариацию поворота не больше $\pi/3$. Впишем в кривую γ_k произвольную ломаную c. Звенья этой ломаной образуют с направлением начального звена углы не больше $\pi/3$. Отсюда следует, что длина ломаной c, а следовательно, и кривой γ_k, не превосходит $d/\cos\frac{\pi}{3}$. Так как число кривых γ_k равно $\left[\frac{3V}{\pi}\right]+1$, то длина всей ломаной не превосходит $2\left(\left[\frac{3V}{\pi}\right]+1\right)d$. Теорема доказана.

В гл. I, § 8 было введено понятие поворота кривой на выпуклой поверхности, а также отмечены основные его свойства.

С помощью этого понятия мы выделим важный для дальнейшего изложения класс кривых ограниченной вариации поворота на поверхности следующим определением.

Пусть кривая γ на выпуклой поверхности имеет определенный поворот на каждом участке. Разобьем ее точками $P_1, P_2, \ldots, P_k$ на куски $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{k+1}$ и составим сумму

$$\sum_i |\varphi(\gamma_i)| + \sum_j |\pi - \vartheta(P_j)|,$$

где $\varphi(\gamma_i)$ — правый поворот кривой γ_i, а $\vartheta(P_i)$ — угол правого сектора при точке P_i. Точную верхнюю грань таких сумм по всем разбиениям кривой γ будем называть *вариацией правого поворота кривой* γ на поверхности. Оказывается, если вариация правого поворота кривой γ ограничена, то вариация левого поворота тоже ограничена.

Теорема 16. *Пусть F — выпуклая поверхность, расположенная над плоскостью xy, и опорные плоскости этой поверхности образуют с плоскостью xy углы $\leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$. Пусть γ — кривая на F, которая проектируется на плоскость xy в кривую $\bar{\gamma}$ ограниченной вариации поворота (для плоской кривой вариация поворота будет одна и та же в смысле каждого из данных выше определений).*

Тогда кривая γ будет ограниченной вариации поворота в пространстве.

Доказательство. Впишем в кривую $\bar{\gamma}$ ломаную с малыми звеньями. Сместим незначительно вершины этой ломаной так, чтобы в эти вершины проектировались гладкие точки поверхности F и чтобы поворот ломаной при этом изменился на величину, не превосходящую ε. Так построенную ломаную обозначим c. Пусть γ_c — кривая на поверхности, которая проектируется в ломаную c, Z_c — цилиндр, проектирующий кривую γ_c на плоскость xy. Развернем цилиндр Z_c на плоскость. При этом кривая γ_c на Z_c перейдет в плоскую кривую $\tilde{\gamma}_c$, составленную из кусков выпуклых кривых $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \ldots, \tilde{\gamma}_n$ с концами $P_1, P_2, \ldots \ldots, P_{n-1}$, соответствующими вершинам ломаной c. При движении вдоль кривой $\tilde{\gamma}_c$ правая полукасательная на каждом участке $\tilde{\gamma}_i$ поворачивается в одном и том же направлении. Пусть $\tilde{\vartheta}_i$ — изменение направления правой полукасательной в точке P_i, а $\bar{\vartheta}_i$ — изменение направления звена ломаной c при прохождении через вершину, соответствующую точке P_i. Так как касательные плоскости поверхности F образуют с плоскостью xy углы $\leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$, то можно указать постоянную m такую, что

$|\tilde{\vartheta}_i| \leqslant m|\bar{\vartheta}_i|$. Отсюда $\sum|\tilde{\vartheta}_i| \leqslant m\sum|\bar{\vartheta}_i|$ или, вводя вариацию поворота кривой $\bar{\gamma}$, $\sum|\tilde{\vartheta}_i| < m\omega(\bar{\gamma}) + \varepsilon$.

Так как при движении вдоль кривой $\tilde{\gamma}_c$ правая полукасательная на каждом участке $\tilde{\gamma}_i$ поворачивается в одном и том же направлении, а сумма абсолютных поворотов правой полукасательной в точках P_i меньше $m\omega(\bar{\gamma}) + \varepsilon$, то вариация поворота кривой $\tilde{\gamma}_c$ не превосходит $\pi + m\omega(\bar{\gamma}) + \varepsilon$.

Отсюда следует, что если проектирующий кривую γ цилиндр развернуть на плоскость, то кривая γ перейдет при этом в плоскую кривую $\tilde{\gamma}$, вариация поворота которой не больше $\pi + m\omega(\bar{\gamma})$.

Возьмем на кривой γ две точки Q_1 и Q_2. Пусть t_1 и t_2 — правые полукасательные в этих точках, $\bar{t}_1$ и $\bar{t}_2$ — правые полукасательные кривой $\bar{\gamma}$, а $\tilde{t}_1$ и $\tilde{t}_2$ — правые полукасательные кривой $\tilde{\gamma}$ в точках, соответствующих Q_1 и Q_2. Очевидно, сумма углов между $\bar{t}_1$ и $\bar{t}_2$, $\tilde{t}_1$ и $\tilde{t}_2$ не меньше угла между t_1 и t_2. Поэтому вариация поворота в пространстве кривой γ не больше суммы вариаций поворота кривых $\bar{\gamma}$ и $\tilde{\gamma}$, т. е. не больше $\pi + (m+1)\omega(\bar{\gamma})$. Теорема 16 доказана.

Теорема 17. *Если кривая γ на выпуклой поверхности F имеет ограниченной вариации правый поворот, то она ограниченной вариации поворота в пространстве.*

Доказательство. Во-первых, заметим, что кривую γ можно разбить на конечное число кусков таких, что сферическое изображение ε-окрестности каждого куска расположено на сегменте единичной сферы, меньшем полусферы. Поэтому теорему достаточно доказать для каждого такого куска. Не ограничивая общности, можно считать, что сама кривая γ обладает этим свойством, т. е. сферическое изображение ε-окрестности ее расположено на сегменте, меньшем полусферы.

Пусть g' — полупрямая, образующая с внешними нормалями поверхности F в точках ε-окрестности кривой γ углы $\leqslant \frac{\pi}{2} - \delta$, где $\delta > 0$.

Согласно теореме В. А. Залгаллера [36], существует последовательность геодезических ломаных c_n на поверхности, равномерно сходящаяся к γ, с вариациями правого поворота, сходящимися к вариации правого поворота γ, и длинами, сходящимися к длине кривой γ. Можно считать, что вершины этих ломаных находятся в гладких точках поверхности F.

Спроектируем геодезическую ломаную c_n в направлении g'. Развернем проектирующий цилиндр Z' на плоскость. Ломаная c_n перейдет при этом в некоторую кривую $\tilde{c}_n$. По теореме Либермана о выпуклости геодезической каждое звено кривой $\tilde{c}_n$

на развертке цилиндра представляет собой выпуклую кривую, причем все эти кривые обращены выпуклостью в одну сторону — в направлении проектирования g'. Оценим вариацию поворота кривой $\tilde{c}_n$. Пусть $\tilde{c}_n^1, \tilde{c}_n^2, \ldots, \tilde{c}_n^m$ — куски этой кривой, соответствующие звеньям геодезической ломаной, а $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \ldots, \tilde{P}_{m+1}$ — точки, соответствующие ее вершинам. Вариация поворота кривой c_n на поверхности F равна $\sum|\vartheta_i|$, где ϑ_i — поворот правой полукасательной кривой c_n при прохождении через вершину P_i. Пусть $\tilde{\vartheta}_i$ — поворот правой полукасательной кривой $\tilde{c}_n$ при прохождении через точку $\tilde{P}_i$. Так как внешние нормали касательных плоскостей F в вершинах кривой c_n образуют с полупрямой g' углы меньше $\frac{\pi}{2}-\delta$, то существует постоянная m, зависящая только от δ, такая, что $|\tilde{\vartheta}_i| \leqslant m|\vartheta_i|$. Отсюда при достаточно большом n получаем, что $\sum|\tilde{\vartheta}_i| < m\omega_F(c_n)+\varepsilon'$, где $\omega_F(c_n)$ — вариация правого поворота ломаной c_n на поверхности F, а ε' стремится к нулю, когда $n\to\infty$.

Так как при движении вдоль кривой $\tilde{c}_n$ правая полукасательная на каждом участке $\tilde{c}_n^i$ поворачивается в одном и том же направлении, а сумма абсолютных поворотов правой полукасательной в точках $\tilde{P}_i$ меньше, чем $m\omega_F(c_n)+\varepsilon'$, то вариация поворота кривой $\tilde{c}_n$ меньше $\pi+m\omega_F(c_n)+\varepsilon'$.

Отсюда следует, что если проектирующий кривую γ в направлении g' цилиндр развернуть на плоскость, то кривая γ перейдет при этом в кривую $\tilde{\gamma}'$, вариация поворота которой не больше $\pi+m\omega_F(\gamma)$.

Построим теперь еще две полупрямые g'' и g''', обладающие свойством полупрямой g', причем так, чтобы они не лежали в одной плоскости с полупрямой g'. Подобно $\tilde{\gamma}'$ построим кривые $\tilde{\gamma}''$ и $\tilde{\gamma}'''$. Пусть Q_1 и Q_2 — две произвольные точки на кривой γ, t_1 и t_2 — правые полукасательные в них, t_1' и t_2', t_1'' и t_2'', t_1''' и t_2''' — правые полукасательные в соответствующих точках кривых $\tilde{\gamma}', \tilde{\gamma}'', \tilde{\gamma}'''$. Можно показать элементарным рассуждением, что существует постоянная $\varkappa$, зависящая только от числа δ и углов между полупрямыми g', g'', g''', такая, что

$$\vartheta(t_1, t_2) \leqslant \varkappa\left(\vartheta(t_1', t_2') + \vartheta(t_1'', t_2'') + \vartheta(t_1''', t_2''')\right).$$

Отсюда следует, что вариация поворота кривой γ в пространстве

$$\omega(\gamma) \leqslant 3\varkappa(\pi + m\omega_F(\gamma)).$$

Теорема доказана.

Теорема 18. *Пусть F — выпуклая поверхность, расположенная над плоскостью xy, причем опорные плоскости поверх-*

ности образуют с плоскостью xy углы $\leqslant \frac{\pi}{2} - \delta$, $\delta > 0$. Пусть γ — кривая на поверхности F, $\bar{\gamma}$ — ее проекция на плоскость xy. Тогда, если $\bar{\gamma}$ ограниченной вариации поворота, то γ имеет ограниченной вариации правый (левый) поворот на поверхности F.

Доказательство. Построим последовательность выпуклых многогранников F_n, сходящуюся к F, и последовательность ломаных $\bar{c}_n$ на плоскости xy, сходящуюся справа к кривой $\bar{\gamma}$, причем так, чтобы при этом вариации поворота ломаных $\bar{c}_n$ сходились к вариации поворота кривой $\bar{\gamma}$ и никакая вершина многогранника F_n не проектировалась бы в вершину ломаной $\bar{c}_n$. Пусть c_n — кривая на многограннике F_n, которая проектируется в ломаную $\bar{c}_n$. Вариация правого поворота c_n на F_n, очевидно, не больше вариации поворота c_n в пространстве, а для последней мы можем получить оценку в зависимости от вариации поворота кривой $\bar{c}_n$ и наибольшего угла, образуемого опорными плоскостями многогранника F_n с плоскостью xy.

Таким образом, вариации правых поворотов кривых c_n на многогранниках F_n равномерно ограничены. Отсюда следует, что кривая γ на поверхности F имеет ограниченной вариации правый поворот. Теорема доказана.

§ 2. О сходимости изометричных выпуклых поверхностей

В ходе дальнейшего изложения нам неоднократно придется рассматривать сходящиеся последовательности изометричных выпуклых поверхностей. Чаще всего в этих рассмотрениях приходится делать некоторые заключения о характере сходимости соответствующих по изометрии направлений и их отношении к направлению на предельной поверхности. Чтобы не повторяться и несколько разгрузить доказательство основных вспомогательных теорем, мы рассмотрим в этом параграфе некоторые общие предложения, касающиеся данного вопроса.

Теорема 1. *Пусть F — выпуклая поверхность, F_n — последовательность выпуклых поверхностей, изометричных F и сходящихся к F, X_0 — точка на F, X_n — точка на поверхности F_n, соответствующая по изометрии точке X_0 на F, $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ — убывающая последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю. Пусть $\bar{F}_n$ — поверхность, полученная из F_n преобразованием подобия относительно центра X_n с коэффициентом подобия $1/s_n$.*

Тогда, если при $n \to \infty$ последовательность поверхностей $\bar{F}_n$ сходится, то предельная поверхность представляет собой:

1) *конус, равный касательному конусу поверхности F в точке X_0, если эта точка коническая;*

2) *цилиндр с образующими, параллельными ребру поверхности F в точке X_0, если X_0 — ребристая точка, причем этот цилиндр содержит двугранный угол в точке X_0;*

3) *плоскость, если X_0 — гладкая точка на F.*

Доказательство. Кривизна поверхности $\bar{F}_n$ в точке X_n не зависит от n и равна кривизне F в точке X_0. Кривизна любой ограниченной части поверхности $\bar{F}_n$, исключая точку X_n, неограниченно убывает, когда $n \to \infty$. Отсюда следует, что поверхность $\bar{F}$ — предельная поверхность последовательности $\bar{F}_n$ — есть или конус (если точка X_0 на F коническая), или цилиндр (если точка X_0 на F гладкая или ребристая).

Опорные плоскости $\bar{F}$ в точке X_0 должны быть опорными плоскостями для F, так как таковыми являются предельные опорные плоскости поверхностей F_n. Касательный конус поверхности $\bar{F}$ в точке X_0 содержит касательный конус поверхности F. Отсюда, принимая во внимание равенство кривизны поверхностей $\bar{F}$ и F в точке X_0, заключаем, что $\bar{F}$ совпадает с касательным конусом F в точке X_0, если эта точка коническая. Если же X_0 ребристая точка, то $\bar{F}$ — цилиндр, содержащий ребро двугранного угла в точке X_0 поверхности F в качестве одной из образующих. Весь двугранный угол содержится внутри этого цилиндра. Если X_0 — гладкая точка поверхности F, то $\bar{F}$ — плоскость, совпадающая с касательной плоскостью поверхности F в точке X_0. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть F — выпуклая поверхность, X_0 — точка на ней, F_n — последовательность выпуклых поверхностей, изометричных F и сходящихся к F, X_n — точка на поверхности F_n, соответствующая по изометрии точке X_0.*

Тогда, если точка X_0 гладкая или коническая, то направления в точках X_n на поверхностях F_n при $n \to \infty$ сходятся равномерно к соответствующим по изометрии направлениям на F в точке X_0.

Если же точка X_0 ребристая, то этим свойством обладают по крайней мере два направления, соответствующие направлениям ребра в точке X_0 на F.

Доказательство. Возьмем на поверхности F точку Y_0, близкую к X_0, и соединим их кратчайшей γ_0. Пусть γ_n — соответствующая кратчайшая на поверхности F_n. При $n \to \infty$ $F_n \to F$, а $\gamma_n \to \gamma_0$.

Если точка X_0 гладкая или коническая, то в силу теоремы 1 полукасательная t_n к γ_n в точке X_n сходится к полупрямой, лежащей в касательной плоскости к F в точке X_0 или к одной из образующих касательного конуса. Согласно следствиям из теоремы Либермана (§ 1 гл. II) отсюда заключаем, что предел по-

лукасательных t_n является полукасательной к предельной кратчайшей, т. е. γ_0 в точке X_0. Из равенства кривизн поверхности F в точке X_0 и поверхности F_n в точке X_n и характера сходимости поверхностей $\overline{F}_n$ к поверхности $\overline{F}$ (см. теорему 1) теперь следует равномерная сходимость всех направлений в точке X_n поверхности F_n к соответствующим по изометрии направлениям на F в точке X_0.

Допустим, X_0 — ребристая точка поверхности F. Возьмем на поверхности F точку Y_0 так, чтобы кратчайшая γ_0, соединяющая X_0 и Y_0, образовала с направлением ребра в точке X_0 угол меньше ε. Не ограничивая общности, можно считать, что полукасательная t_n к γ_n в точке X_n сходится к некоторой полупрямой t_0. Из теоремы 1 следует, что эта полупрямая не может проходить внутри двугранного угла поверхности F в точке X_0 и, следовательно, по теореме 9 (§ 1, гл. II) она должна образовать с направлением полукасательной к γ_0 в точке X_0 угол порядка ε. Отсюда мы заключаем, что направления на поверхности F_n в точке X_n, соответствующие направлениям ребра в точке X_0 на F, сходятся к соответствующим по изометрии направлениям на F. Теорема доказана.

Теперь несколько обобщим теорему 2 в том смысле, что вместо отдельной точки X_0 на поверхности F возьмем любое замкнутое множество точек. Именно, докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть F — выпуклая поверхность, M — замкнутое множество на ней, F_n — последовательность выпуклых поверхностей, изометричных F и сходящихся к F.*

Тогда при достаточно большом n у каждого касательного конуса поверхности F в точках множества M найдутся два направления, разбивающие этот конус пополам и образующие с соответствующими по изометрии направлениями на F_n углы меньшие ε.

Доказательство. Допустим, утверждение неверно. Тогда для каждого n на F существует точка $X_n \subset M$, в которой указанное свойство не имеет места. Не ограничивая общности, можно считать, что последовательность точек X_n сходится к некоторой точке X_0 поверхности F. Могут представиться три случая:

1) X_0 — гладкая точка;
2) X_0 — коническая точка;
3) X_0 — ребристая точка.

Пусть s_n — расстояние между точками X_0 и X_n поверхности F. Обозначим $F^n = \frac{1}{s_n} F$ поверхность, полученную преобразованием подобия из F относительно центра X_0 с коэффициентом подобия $\frac{1}{s_n}$, а F_n^n — аналогично построенную поверхность для F_n относительно точки, соответствующей по изометрии

точке X_0. Пусть γ_n — кратчайшая на F, соединяющая точки X_0 и X_n, γ^n и γ_n^n — соответствующие по изометрии и подобию кратчайшие на F^n и F_n^n. Не ограничивая общности, можно считать, что последовательности поверхностей F^n и F_n^n сходятся, а также сходятся последовательности кратчайших γ^n и γ_n^n. Обозначим F^0 и F_0^0 предельные поверхности для последовательностей F^n и F_n^n, а γ^0 и γ_0^0 — предельные кратчайшие для γ^n и γ_n^n соответственно.

Допустим теперь, что X_0 — гладкая или коническая точка поверхности F. В этом случае обе поверхности F^0 и F_0^0 совпадают и представляют собой касательную плоскость к F в точке X_0, если эта точка гладкая, или касательный конус в этой точке, если X_0 — коническая точка. Кратчайшие γ^0 и γ_0^0 суть прямолинейные отрезки с концом в точке X_0, лежащие в касательной плоскости или соответственно на касательном конусе поверхности F в точке X_0. В силу теоремы 2 прямолинейные отрезки γ^0 и γ_0^0 совпадают. Применяя теорему 9 (§ 1, гл. II), отсюда заключаем, что полукасательные кратчайших γ^n и γ_n^n в точках, соответствующих X_n, сходятся к одной и той же полупрямой t_0, содержащей прямолинейный отрезок $\gamma^0 \equiv \gamma_0^0$. Поэтому при достаточно большом n поверхность F в точке X_n и поверхность F_n в соответствующей точке будут иметь соответствующие по изометрии направления, образующие друг с другом сколь угодно малый угол. Ясно также, что направления на F и F_n, которые вместе с отмеченными делят соответствующие касательные конусы пополам, соответствуют по изометрии и также образуют малый угол. Мы пришли к противоречию.

Рассмотрим случай, когда X_0 — ребристая точка на F. В этом случае, если последовательность точек X_n сходится к X_0 так, что полукасательные к γ^n в точке X_0 сходятся к направлению ребра в этой точке (не ограничивая общности, можно считать, что полукасательные сходятся), надо повторить все то, что было сказано в случае гладкой и конической точек. Если же предельная полукасательная не лежит на ребре двугранного угла — касательного конуса в точке X_0, то предельные кратчайшие γ^0 и γ_0^0, вообще говоря, не совпадают, но полукасательные к ним в точке X_0 получаются одна из другой поворотом на некоторый угол около направления ребра поверхности F в точке X_0, иными словами говоря, эти полукасательные образуют с направлением ребра один и тот же угол ϑ_0. Отсюда, принимая во внимание, что F^0 — двугранный угол, а F_0^0 — цилиндр, содержащий ребро этого угла, мы заключаем, что одно из направлений на F в точке X_n, образующее с γ_n угол ϑ_0, при $n \to \infty$ обра-

зует с соответствующим по изометрии направлением на F_n сколь угодно малый угол. Другое направление, обладающее этим свойством, делит соответствующий касательный конус вместе с указанным направлением пополам. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана полностью.

В доказательстве основной теоремы — об однозначной определенности замкнутых выпуклых поверхностей мы будем исходить из предположения о существовании двух близких замкнутых выпуклых изометричных, но не равных поверхностей и придем к противоречию. В связи с этим мы докажем следующую лемму.

Лемма. *Пусть F — замкнутая выпуклая поверхность. Тогда, если существует замкнутая выпуклая поверхность F', изометричная F, но не равная F, то сколь угодно близко к F существуют изометричные F, но не равные ей замкнутые выпуклые поверхности. При этом к числу замкнутых выпуклых поверхностей относятся также дважды покрытые выпуклые области плоскости.*

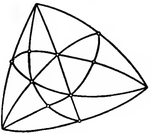

Рис. 26.

Доказательство. Во-первых покажем, что замкнутую выпуклую поверхность F можно разбить на выпуклые треугольники так, что будут выполняться следующие условия:

1. Стороны каждого треугольника меньше ε.

2. Две вершины каждого треугольника можно соединить на поверхности только одной кратчайшей, а именно — соответствующей стороной треугольника.

3. Углы каждого треугольника меньше π.

4. Кривизна каждого треугольника меньше ω, где ω — любое положительное число.

Существует разбиение T поверхности F на треугольники Δ, удовлетворяющие условиям 1 и 3 (§ 2 гл. I). Отправляясь от этого разбиения, мы построим разбиение T', удовлетворяющее также условию 2. Для этого проведем в каждом треугольнике Δ разбиения T геодезические медианы. Если в каком-либо треугольнике Δ медианы пересекаются в одной точке, то шесть треугольников, на которые разбивается треугольник Δ его медианами, уже удовлетворяют условиям 1, 2 и 3. Если же медианы треугольника Δ не пересекаются в одной точке, то они разбивают его на четыре треугольника и три четырехугольника. Проведем в каждом четырехугольнике диагонали. Тогда треугольник Δ будет разбит на шестнадцать треугольников, удовлетворяющих условиям 1, 2 и 3 (рис. 26). То, что условие 2

в каждом из рассмотренных случаев действительно выполняется, следует из теоремы о неналегании кратчайших (§ 2 гл. I).

Покажем теперь, что существует разбиение поверхности F, удовлетворяющее не только условиям 1—3, но также условию 4. Для этого заметим, что существует число δ, зависящее от ω, такое, что кривизна каждого треугольника на поверхности со сторонами, не превосходящими δ, за вычетом не более одной его внутренней точки, будет меньше ω. Действительно, каждой точке X поверхности F можно сопоставить область точек $U(X)$, удаленных на расстояние меньшее $\delta(X)$, от точки X, причем так, что кривизна множества $U(X)-X$ будет меньше ω. Множества $U(X)$ образуют открытое покрытие поверхности, из которого по известной теореме можно выделить конечное покрытие $U_1, U_2, \ldots, U_s$. Для этого покрытия найдется число $\delta>0$ такое, что всякий треугольник диаметра меньше δ на поверхности F будет принадлежать хотя бы одному из множеств $U_1, U_2, \ldots, U_s$. Возьмем разбиение T настолько мелким, чтобы диаметр каждого треугольника $\triangle$ был меньше δ. Кривизна каждого треугольника $\triangle$, если из него удалить некоторую внутреннюю точку, будет меньше ω. Соединим эту точку с вершинами треугольника. Тогда получим новое разбиение поверхности на треугольники, удовлетворяющие не только условиям 1—3, но и условию 4.

Построим теперь поверхность, существование которой утверждается леммой. Пусть T — разбиение поверхности на геодезические треугольники, удовлетворяющие условиям 1—4. Отметим на поверхности F достаточно густую сеть точек S, содержащую все вершины треугольников $\triangle$ разбиения T. Соответствующую по изометрии сеть точек на F' обозначим S'.

Образуем выпуклые оболочки множеств S и S'. Это будут замкнутые выпуклые многогранники. Обозначим их P и P' соответственно. Соединим вершины многогранников P и P', соответствующие вершинам триангуляции T, кратчайшими, соответствующими сторонам треугольников $\triangle$. Если сеть точек S взята достаточно густой, то эти кратчайшие осуществляют разбиение многогранников P и P' на треугольники так же, как триангуляция T на F, причем кривизны этих треугольников малы вместе с ω.

Обозначим через $\sigma_{\triangle, P}$ и соответственно $\sigma_{\triangle, P'}$ геодезические треугольники на многогранниках P и P', соответствующие треугольнику $\triangle$ на поверхности F. Каждый из этих треугольников представляет собой выпуклый многогранник с краем. Пусть X и Y — две какие-нибудь вершины многогранника P, расположенные внутри области $\sigma_{\triangle, P}$. Пусть α и β — кривизны в этих вершинах, γ — кратчайшая, соединяющая точки X и Y внутри

$\sigma_{\Delta,\, P}$, l — ее длина. Построим два плоских треугольника с основанием l и углами x и y при основании. Для этих треугольников и многогранника P, разрезанного вдоль кратчайшей γ, при всех x и y, удовлетворяющих условиям $x \leqslant \frac{\alpha}{2}$, $y \leqslant \frac{\beta}{2}$, выполнены условия теоремы о склеивании. Пусть $P_{x,\, y}$ — замкнутый выпуклый многогранник, полученный склеиванием этих двух треугольников и многогранника P, разрезанного вдоль кратчайшей γ. В силу теоремы об однозначной определенности замкнутых выпуклых многогранников можно считать, что при непрерывном возрастании x и y многогранник $P_{x,\, y}$ изменяется непрерывно и переходит от многогранника P (что соответствует $x=y=0$) к многограннику с меньшим числом вершин, чем у P, именно, вместо двух вершин X и Y на P, которые исчезают, появляется одна с кривизной $\alpha+\beta$.

Применяя конечное число раз эту операцию, мы сможем непрерывно деформировать многогранник P в многогранник, у которого в каждой из областей, соответствующих треугольникам Δ, будет не более одной вершины. Пусть $\bar{P}$ — такой многогранник и $\bar{\sigma}_{\Delta,\, \bar{P}}$ — треугольник на нем, соответствующий треугольнику Δ. Он изометричен или плоскому треугольнику, или боковой поверхности трехгранной пирамиды. Рассмотрим второй случай. Вырезав треугольник $\bar{\sigma}_{\Delta,\, \bar{P}}$, свернем его в боковую поверхность трехгранной пирамиды, а затем будем непрерывно переводить ее в треугольник, лежащий в основании пирамиды, смещая ее вершину по прямой к какой-нибудь внутренней точке основания.

Условия теоремы о склеивании для части многогранника $\bar{P}$, которая получается после удаления из него треугольника $\bar{\sigma}_{\Delta,\, \bar{P}}$ (обозначим ее $\bar{P}-\bar{\sigma}_{\Delta,\, \bar{P}}$), и деформированной боковой поверхности пирамиды все время выполнены. Склеенный таким образом замкнутый многогранник, изменяясь непрерывно при непрерывном изменении боковой поверхности пирамиды, в начальный момент равен $\bar{P}$, а в конце представляет собой многогранник, склеенный из $\bar{P}-\bar{\sigma}_{\Delta,\, \bar{P}}$ и плоского треугольника с теми же сторонами, что и $\bar{\sigma}_{\Delta,\, \bar{P}}$.

Применяя конечное число раз эту операцию, мы придем в конце концов к выпуклому замкнутому многограннику $\bar{\bar{P}}$, склеенному из плоских треугольников со сторонами, равными соответствующим сторонам треугольников $\sigma_{\Delta,\, P}$.

Определим понятие близости для замкнутых выпуклых многогранников, полученных описанной выше деформацией из P. Мы будем говорить, что два многогранника P_1 и P_2 *ε-близки*,

если они допускают такое взаимное расположение, при котором их вершины, соответствующие вершинам триангуляции T на F, удалены друг от друга не более чем на ε, но не существует такого взаимного расположения, при котором все пары упомянутых вершин находятся на расстоянии, меньшем ε.

В отношении многогранника P' можно применить такую же деформацию, как и для P. Таким образом, мы переведем его в замкнутый выпуклый многогранник $\bar{P}'$, склеенный из плоских треугольников со сторонами, равными сторонам треугольников $\sigma_{\Delta, P'}$, соответствующих треугольникам Δ на F.

Если сеть точек S была взята достаточно густой, то длины сторон треугольников $\sigma_{\Delta, P}$ и $\sigma_{\Delta, P'}$ отличаются мало, а поэтому многогранник $\bar{P}$ близок либо к $\bar{P}'$, либо к его зеркальному изображению.

Отсюда мы делаем важный вывод. При достаточной густоте сети S среди многогранников, полученных описанной выше деформацией из P и P', найдутся ε-близкие к P и ε-близкие к P', как бы ни было мало $\varepsilon>0$. Возьмем по одному представителю каждого из таких многогранников и обозначим их P_ε и P'_ε соответственно.

Если теперь переходить ко всем более мелким триангуляциям, уменьшая одновременно ω и увеличивая густоту сети S, то можно считать, что последовательность многогранников P_ε, а также P'_ε, сходится к выпуклым поверхностям, изометричным F, близким F и F' соответственно, но не равным им. Лемма доказана.

§ 3. Смешивание изометричных поверхностей

Пусть F_0 и F_1 — две фигуры, между точками которых некоторым образом установлено взаимно однозначное соответствие. Операция смешивания этих фигур заключается в построении фигуры F_λ, которая состоит из точек пространства, делящих отрезки, соединяющие соответствующие точки фигур F_0 и F_1, в отношении $\lambda:(1-\lambda)$. Эта операция оказывается полезной при рассмотрении изометричных поверхностей.

Сейчас мы рассмотрим смешивание простейших изометричных поверхностей: плоскостей, двугранных углов и конусов. Полученные результаты будут использованы при изучении смешивания общих изометричных выпуклых поверхностей.

Мы будем говорить, что две изометричные выпуклые поверхности F и F' ориентированы одинаково, если для любой пары соответствующих точек P и P' этих поверхностей соответствующие по изометрии обходы образуют с направлением полупрямых t и t', исходящих из точек P и P' и идущих внутрь тел,

ограниченных поверхиостями F и F', одновремеиио правый или левый виит. Поверхиость F и ее зеркальиое отражение F^* ориеитированы противоположио. Поэтому для каждой пары изометричных поверхностей всегда можно добиться одинаковой ориентации, отражая при иеобходимости одиу из иих зеркально. В иастоящем параграфе, рассматривая пары изометричных поверхиостей, мы будем предполагать, что они ориентированы одииаково.

Пусть α и β — два изометричиых выпуклых конуса (вырождеиие коиусов в двуграниые углы или плоскости ие исключается), P и Q — их вершииы, ω — шар, содержащийся внутри каждого из конусов. Пусть в вершине P конуса α есть два направления t' и t'', делящие угол в точке P на конусе α пополам, образующие между собой в пространстве угол больше $\pi - \varepsilon$, а с соответствующими по изометрии направлениями на конусе β в вершиие Q — углы меиьше ε.

Лемма 1. *Если кривизна конусов α, β достаточно мала, их вершины близки, ε и $\left|\lambda - \frac{1}{2}\right|$ малы, то результат смешивания γ конусов α и β есть выпуклый конус, содержащий внутри себя шар ω.*

Доказательство. Если α и β — плоскости, то результат их смешиваиия также плоскость. Действительно, если e_1 и e_2 — два едииичных, иепараллельных вектора в плоскости α, то эта плоскость задается вектор-функцией $r_\alpha = e_1 u + e_2 v$, $-\infty < u$, $v < < \infty$. Если e_1' и e_2' — едииичные векторы соответствующих направлений в плоскости β, то оиа задается вектор-функцией $r_\beta = = e_1' u + e_2' v$. Результат смешивания γ плоскостей α и β задается вектор-функцией $r_\gamma = \lambda(e_1 u + e_2 v) + (1 - \lambda)(e_1' u + e_2' v)$ и, следовательио, представляет собой плоскость. Для случая плоскостей при $\varepsilon = 0$ и $\lambda = 1/2$ утверждение леммы очевидно, так как плоскость γ является бисекторной для плоскостей α, β. Отсюда следует, что для плоскостей α и β при достаточно малых ε и $\left|\lambda - \frac{1}{2}\right|$ лемма остается справедливой.

В случае, если α является плоскостью, а β двугранным углом, результат смешиваиия γ, очевидно, представляет собой двугранный угол. Его грани получаются смешиванием граией угла β и соответствующих им по изометрии полуплоскостей плоскости α. Утверждеиие леммы очевидно при $\varepsilon = 0$ и $\lambda = 1/2$. Следовательио, оио верно и при достаточно малых ε и $\left|\lambda - \frac{1}{2}\right|$.

Пусть теперь конусы α и β не вырождаются ни в двугранные углы, ии в плоскости. Допустим, утверждение леммы неверно. Тогда существуют бесконечные последовательиости

конусов α_n и β_n с вершинами P_n и Q_n, чисел $\lambda_n \to \frac{1}{2}$ и $\varepsilon_n \to 0$, для которых утверждение неверно. Не ограничивая общности, можно считать, что конусы α_n и β_n сходятся к двугранным углам α_0 и β_0 (они могут вырождаться в плоскости), а их вершины — к точке S. Изометрическое отображение конуса α_n на β_n переходит в изометрическое отображение углов α_0 и β_0, у которых ребра соответствуют по изометрии и соответствующие по изометрии точки ребер совпадают.

Конус γ_n при достаточно большом n выпуклый. Чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что он локально выпуклый в том смысле, что через каждую его образующую t_n можно провести плоскость так, что все образующие, близкие к данной, будут в одном из полупространств, определяемых этой плоскостью, именно в том, где расположен шар ω. Допустим, на каждом конусе γ_n найдется образующая t_n, в которой нарушается локальная выпуклость. Не ограничивая общности, можно считать, что соответствующие образующие t_n' на α_n сходятся к t_0' на α_0. Пусть A_n' — точки на t_n' на единичном расстоянии от вершины конуса α_n, k_n' — касательный двугранный угол в этой точке и k_n'' — касательный двугранный угол в точке A_n'', соответствующей точке A_n' на конусе β_n. При смешивании углов k_n' и k_n'' при достаточно большом n получается двугранный угол k_n, внутри которого находится шар ω. Через ребро этого двугранного угла можно провести опорную плоскость так, что внутренняя нормаль к ней $\bar{n}$, будучи отложена из точек A_n' и A_n'', направлена внутрь конусов α_n и β_n. Соединим точку B_n', близкую к точке A_n', кратчайшей γ' на α_n. Пусть $r_1(s)$ — радиус-вектор точки кривой γ', соответствующей дуге s (начало отсчета дуг — точка A_n'), $r_2(s)$ — радиус-вектор соответствующей по изометрии точки на β_n. При $s=0$ имеем $\frac{d}{ds}(\lambda_n r_1 + (1-\lambda_n) r_2)\bar{n} \geqslant 0$. Применяя теорему Либермана о выпуклости геодезической к кратчайшей γ' на α_n и соответствующей кратчайшей γ'' на β_n, заключаем, что $\frac{d}{ds}(\lambda_n r_1 + (1-\lambda_n) r_2)\bar{n} \geqslant 0$ для всех s вдоль γ'.

Интегрируя это неравенство, заключаем, что все точки конуса γ_n, близкие к образу точки A_n', расположены с одной стороны опорной плоскости с внутренней нормалью $\bar{n}$. Мы пришли к противоречию, и тем самым локальная выпуклость конуса γ_n доказана. Заметим, что конус γ вырождается в двугранный угол только в том случае, если каждый из конусов α и β — двугранный угол и их ребра соответствуют по изометрии. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *При достаточно малых ε и $\left|\lambda-\frac{1}{2}\right|$ отображение конуса α на γ, при котором точке $X \in \alpha$ сопоставляется точка $X_\lambda \in \gamma$, делящая в отношении $\lambda:(1-\lambda)$ расстояние между точкой X и соответствующей по изометрии точкой конуса β, есть гомеоморфизм.*

Доказательство. Допустим, утверждение леммы неверно. Тогда существует бесконечная последовательность конусов α_n и β_n, пар точек A_n, A'_n и B_n, B'_n на этих конусах, чисел $\lambda_n \to 1/2$ и $\varepsilon \to 0$ таких, что точки C_n и C'_n, соответствующие A_n и A'_n на конусах γ_n, совпадают. Не ограничивая общности, можно считать сходящимися последовательности конусов α_n, β_n и последовательности точек A_n, A'_n; B_n, B'_n; C_n, C'_n, причем $\lim A_n = A_0 \neq S$, где S — вершина предельных конусов α_0 и β_0. Такая сходимость всегда может быть обеспечена переходом к соответствующей подпоследовательности конусов и их подобным преобразованием. Если теперь предположить, что $\lim A'_n = A'_0 \neq A_0$, то C_0 и C'_0 заведомо различны, что невозможно, так как $C'_n \equiv C_n$ для всех n.

Допустим, что $A'_0 \equiv A_0$. Подвергнем конусы α_n и β_n преобразованию подобия с коэффициентом подобия $1/s_n$, где s_n — расстояние между точками A_n и A'_n. Совместим точки A_n, B_n с фиксированной точкой пространства O и перейдем к пределу при $n \to \infty$. Не ограничивая общности, можно считать, что поверхности α_n и β_n сходятся к цилиндрам α_0, β_0 (теорема 1 § 2). Изометрическое соответствие α_n и β_n индуцирует изометрию цилиндров α_0, β_0. Направления образующих этих цилиндров параллельны и соответствуют по изометрии. Так как цилиндры α_0 и β_0 обращены выпуклостью в одну сторону и одинаково ориентированы, то $C_0 \not\equiv C'_0$, что противоречит предположению ($C_n \equiv \equiv C'_n$). Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть все направления на конусе α в его вершине P образуют с соответствующими по изометрии направлениями на конусе β углы, меньшие ε, а кривизна в вершине конусов не меньше $\vartheta_0 > 0$.*

Тогда при достаточно малых ε и $\left|\lambda-\frac{1}{2}\right|$ результат смешивания γ конусов α и β есть выпуклый конус, содержащий внутри себя шар ω, а естественное отображение конуса α на γ, которое определено в лемме 2, есть гомеоморфизм.

Доказательство леммы 3 основано на тех же соображениях, что и в леммах 1, 2. Именно, гомеоморфизм указанного соответствия устанавливается так же, как в лемме 2, а локальная

выпуклость, как в лемме 1. Мы не будем повторять эти рассуждения.

Лемма 4. *Пусть F — замкнутая невырожденная выпуклая поверхность и F_n — последовательность выпуклых поверхностей, изометричных F и сходящихся к F.*

Тогда результат смешивания $F_{n\lambda}$ поверхностей F и F_n при достаточно большом n и малом $\left|\lambda-\frac{1}{2}\right|$ есть замкнутая выпуклая поверхность. Соответствие точек поверхностей F и $F_{n\lambda}$, при котором точке X поверхности F ставится в соответствие точка $X_{n\lambda}$ поверхности $F_{n\lambda}$, делящая в отношении $\lambda:(1-\lambda)$ отрезок, соединяющий точку X с соответствующей по изометрии точкой поверхности F_n, есть гомеоморфизм.

Доказательство. Обозначим $V(X)$ — касательный конус поверхности F в точке X и $V_n(X)$ — касательный конус поверхности F_n в соответствующей по изометрии точке. Изометрическое соответствие поверхностей F и F_n естественным образом порождает изометрическое соответствие конусов V и V_n.

Пусть Q — точка, расположенная внутри поверхности F. Покажем, что при n достаточно большом и λ, близком к $1/2$, при смешивании конусов $V(X)$ и $V_n(X)$ для всех X получается выпуклый конус $V_{n\lambda}(X)$ (в частности, двугранный угол или плоскость), причем точка Q находится внутри этого конуса.

Допустим, утверждение неверно. Тогда существует на F бесконечная последовательность точек X^n и последовательность чисел $\lambda_n\to\frac{1}{2}$ при $n\to\infty$ такая, что для каждого $V_{n\lambda_n}(X^n)$ не имеет места хотя бы одно из указанных выше свойств.

Не ограничивая общности, можно считать, что последовательность точек X^n сходится к некоторой точке X^0 на F, конусы $V(X^n)$ и $V_n(X^n)$ сходятся к конусам V и V_0 с вершиной X^0, содержащим касательный конус F в этой точке. Изометрическое соответствие конусов $V(X^n)$ и $V_n(X^n)$ переходит в изометрическое соответствие предельных конусов V и V_0.

Какова бы ни была последовательность точек X^n, из нее всегда можно выделить подпоследовательность, удовлетворяющую одному из следующих условий:

1. Подпоследовательность X^n содержит только конические точки с кривизной, не меньшей $\vartheta_0>0$.

2. Кривизна в каждой точке подпоследовательности X^n меньше ϑ_0.

Применяя теорему 3 § 2, а затем лемму 3 или соответственно леммы 1, 2 настоящего параграфа, приходим к противоречию в обоих случаях выделенной подпоследовательности X^n.

Покажем теперь, что множество $F_{n\lambda}$ при достаточно большом n и малом $|\lambda-1/2|$ локально выпукло в том смысле, что

через каждую точку $X_{n\lambda}$ множества $F_{n\lambda}$ можно провести плоскость так, что все точки $Y_{n\lambda}$, которым на F соответствуют точки Y, близкие X, расположены по одну сторону этой плоскости, там, где расположена точка Q. Предположим, это неверно. Не ограничивая общности, можно считать, что нарушение локальной выпуклости происходит в точке, соответствующей X^n.

В точке $X^n_{n\lambda}$ поверхности $F_{n\lambda}$ не может быть нарушения локальной выпуклости, если конус $V_{n\lambda}(X^n)$ не вырождается в плоскость или двугранный угол. Отсюда следует, что для подпоследовательности X^n может иметь место только вторая из указанных выше возможностей. Можно считать, что если для достаточно больших n точки X^n и соответствующая ей по изометрии точка на F_n — обе ребристые, то направления ребер у них соответствуют по изометрии. В этом случае V и V_0 — двугранные углы или плоскости. Из теоремы 2 § 2 следует, что они имеют общую прямую, на которой совпадают соответствующие по изометрии точки углов V и V_0. Каждый из этих углов содержит касательный конус поверхности F в точке X^0.

Пусть V_λ — результат смешивания V и V_0. В общем случае V_λ представляет собой двугранный угол. Проведем через ребро этого угла плоскость α_λ так, чтобы внутренняя нормаль к ней проходила внутри V и V_0. Легко видеть, что такая плоскость действительно существует, если $\left|\lambda-\frac{1}{2}\right|<\chi$, где $\chi>0$ зависит только от наименьшего двугранного угла, внутрь которого можно поместить касательный конус поверхности F в точке X^0. Отсюда следует, что при n, достаточно большом, и λ, близком к $1/2$, через ребро угла $V^n_{n\lambda}$ можно провести плоскость $\alpha_{n\lambda}$ так, что полупрямые, одинаково направленные с внутренней нормалью к ней, с начальными точками на ребрах углов $V(X^n)$ и $V_n(X^n)$, пройдут внутри этих углов.

Соединим точку Y, близкую к точке X^n, кратчайшей γ на F.

Пусть $r(s)$ — радиус-вектор точки кривой γ, а $r_n(s)$ — радиус-вектор точки, соответствующей на поверхности F_n. Если обозначить $\bar{n}$ единичный вектор внутренней нормали к плоскости $\alpha_{n\lambda}$, то в начальной точке кривой γ (т. е. точке X^n) будет $\frac{d}{ds}(\lambda r+(1-\lambda)r_n)\bar{n}\geqslant 0$. Применяя теорему Либермана о выпуклости геодезической к кратчайшей γ и соответствующей кратчайшей на F_n, заключаем, что $\frac{d}{ds}(\lambda r+(1-\lambda)r_n)\bar{n}\geqslant 0$ для всех точек кривой γ. Отсюда следует, что для всех точек Y, близких к X^n,

$$\{\lambda(r(Y)-r(X^n))+(1-\lambda)(r_n(Y)-r_n(X^n)\}\bar{n}\geqslant 0.$$

Но это значит, что в точке $X^n_{n\lambda}$ имеет место локальная выпуклость. Мы пришли к противоречию.

Итак, при n, достаточно большом, и λ, близком к 1/2, поверхность $F_{n\lambda}$ локально выпукла, конус $V_{n\lambda}(X)$ выпуклый и содержит точку Q.

Покажем теперь, что отображение поверхности F на $F_{n\lambda}$, при котором точке X поверхности F сопоставляется точка $X_{n\lambda}$ поверхности $F_{n\lambda}$, есть гомеоморфизм.

Допустим противное. Именно, пусть для каждого n существует $\lambda_n \to \frac{1}{2}$ при $n \to \infty$ и пара точек X^n, Y^n на F такие, что $X^n_\lambda \equiv Y^n_\lambda$. Не ограничивая общности, можно считать, что последовательности X^n и Y^n сходятся. Очевидно, предельная точка будет одна и та же для каждой последовательности. Обозначим ее X^0. Подвергнем поверхности F и F_n преобразованию подобия относительно точек X^0 и X^0_n с коэффициентом подобия $1/s_n$, где s_n — расстояние от точки X^0 до наиболее удаленной из двух точек X^n и Y^n. Полученные поверхности обозначим F^n и F^n_n. Не ограничивая общности, можно считать, что поверхности F^n и F^n_n сходятся при $n \to \infty$ к F^0 и F^0_0. Изометрическое соответствие F^n и F^n_n переходит в изометрическое соответствие F^0 и F^0_0. При этом, если X^0 — коническая точка, то F^0_0 — конус, совпадающий с F^0 так, что соответствующие направления F^0 и F^0_0 в точке X^0 совпадают. Если X^0 — ребристая точка, то F^0 — двугранный угол, F^0_0 в общем случае цилиндр, имеющий ребро угла F^0 одной из образующих и содержащий этот угол, причем ребро угла совпадает с соответствующей по изометрии образующей. Если X^0 — гладкая точка, то F^0 и F^0_0 — совпадающие плоскости. Переходя к рассмотрению поверхностей F^n и F^n_n при $n \to \infty$, без особого труда заключаем, что точки $X^n_{\lambda_n}$ и $Y^n_{\lambda_n}$ при достаточно больших n не могут совпадать, и, таким образом, приходим к противоречию.

Итак, отображение F на $F_{n\lambda}$, при котором точке $X \in F$ сопоставляется точка $X_{n\lambda} \in F_{n\lambda}$, есть гомеоморфизм.

Покажем, наконец, что $F_{n\lambda}$ представляет собой замкнутую выпуклую поверхность. Для этого рассечем поверхность $F_{n\lambda}$ плоскостью, проходящей через точку Q. Покажем, что полученная в сечении кривая γ выпуклая. В самом деле, если бы это было неверно, то на кривой γ была бы точка P и в ней локально опорная прямая кривой γ, которая отделяла бы точку Q от точек кривой γ, близких к P. Но это находится в противоречии с расположением точек поверхности $F_{n\lambda}$, близких к P, относительно локально опорной плоскости в точке P.

Из того, что каждая кривая γ выпуклая, следует, что поверхность $F_{n\lambda}$ — замкнутая выпуклая поверхность. Лемма доказана полностью.

Пусть F_0 и F_1 — две замкнутые изометричные выпуклые поверхности, X_0 — произвольная точка поверхности F_0, X_1 — соответствующая по изометрии точка поверхности F_1. Пусть X_λ — точка, делящая отрезок X_0X_1 в отношении $\lambda : (1-\lambda)$. Мы показали, что геометрическое место F_λ точек X_λ, если поверхность F_1 достаточно близка к F_0 и λ близко к $1/2$, есть замкнутая выпуклая поверхность, а отображение поверхности F_0 на F_λ, при котором точке X_0 поверхности F_0 ставится в соответствие точка X_λ поверхности F_λ, есть гомеоморфизм. Относительно поверхности F_λ мы говорим, что она получена смешиванием поверхностей F_0 и F_1.

Покажем, что *поверхности F_λ и F_μ при достаточной близости F_1 к F_0, λ близком к $1/2$, и $\mu = 1-\lambda$ суть изометричные выпуклые поверхности и отображение поверхности F_λ на F_μ, при котором точке $X_\lambda \in F_\lambda$ сопоставляется точка $X_\mu \in F_\mu$, изометрическое.*

Действительно, пусть X_λ, Y_λ — две произвольные точки поверхности F_λ и γ_λ — соединяющая их кратчайшая. Пусть X_μ, Y_μ, γ_μ — соответствующие точки и кривая на поверхности F_μ; пусть, наконец, X_0, Y_0, γ_0 и X_1, Y_1, γ_1 — соответствующие точки и кривые на поверхностях F_0 и F_1.

Направления отрезков, соединяющих соответствующие по изометрии точки поверхностей F_0 и F_1, при достаточной близости поверхности F_1 к F_0 образуют углы меньшие $\pi - \delta$, где $\delta > 0$. Отсюда очевидным образом следует, что спрямляемость кривой γ_λ влечет за собой спрямляемость кривых γ_0, γ_1, а следовательно, и γ_μ. Обозначим $r_0(s)$, $r_1(s)$, $r_\lambda(s)$ и $r_\mu(s)$ — радиус-векторы соответствующих точек кривых γ_0, γ_1, γ_λ и γ_μ (s — дуга кривой γ_0). Вектор-функции $r_0(s)$ и $r_1(s)$ почти для всех s имеют ограниченные производные, поэтому таким же свойством обладают и $r_\lambda(s) = \lambda r_0(s) + \mu r_1(s)$, $r_\mu(s) = \mu r_0(s) + \lambda r_1(s)$. Отсюда следует, что длины кривых γ_λ и γ_μ равны соответственно

$$\int \sqrt{(r'_\lambda(s))^2}\, ds, \qquad \int \sqrt{(r'_\mu(s))^2}\, ds.$$

Но непосредственной проверкой убеждаемся, что почти для всех s подынтегральные функции у этих интегралов совпадают, откуда следует, что интегралы равны. Так как γ_μ кратчайшая, то это значит, что расстояние между точками X_λ и Y_λ на F_λ не меньше расстояния между точками X_μ и Y_μ на F_μ. Аналогично показывается, что и, наоборот, расстояние между точками X_μ и Y_μ на F_μ не меньше расстояния между X_λ и Y_λ на F_λ. Откуда следует, что эти расстояния равны, т. е. поверхности F_λ и F_μ изометричны. Утверждение доказано.

Повернем поверхность F_μ на малый угол ϑ около произвольной прямой и обозначим F_μ^ϑ поверхность F_μ в этом положении. Построим теперь смешанные поверхности $F_{\lambda\lambda_1}^\vartheta = \lambda_1 F_\lambda + \mu_1 F_\mu^\vartheta$ и $F_{\lambda\mu_1}^\vartheta = \mu_1 F_\lambda + \lambda_1 F_\mu^\vartheta$ $(\mu_1 = 1 - \lambda_1)$. При достаточной близости поверхности F_1 к F_0, λ и λ_1, близких к $\frac{1}{2}$, и малом ϑ поверхности $F_{\lambda\lambda_1}^\vartheta$ и $F_{\lambda\mu_1}^\vartheta$ суть изометричные выпуклые поверхности, и отображение поверхности $F_{\lambda\lambda_1}^\vartheta$ на $F_{\lambda\mu_1}^\vartheta$, при котором точке $X_{\lambda\lambda_1}^\vartheta$ поверхности $F_{\lambda\lambda_1}^\vartheta$ сопоставляется точка $X_{\lambda\mu_1}^\vartheta$ поверхности $F_{\lambda\mu_1}^\vartheta$, является изометрическим.

Доказательство этого утверждения совершенно аналогично доказательству леммы 4. Мы не будем приводить его во всех деталях, укажем только основные этапы.

1. Пусть V_λ — касательный конус выпуклой поверхности F_λ в произвольной точке X_λ, и V_μ^ϑ — касательный конус в соответствующей по изометрии точке X_μ^ϑ поверхности F_μ^ϑ, Q — точка, расположенная внутри поверхности $F_{(1/2)}$. Тогда при достаточной близости F_1 к F_0, λ, λ_1, близких к $\frac{1}{2}$, и малом ϑ смешанные конусы $V_{\lambda\lambda_1}^\vartheta$ и $V_{\lambda\mu_1}^\vartheta$ для всех X_λ выпуклые, и точка Q находится внутри этих конусов.

2. Каждое из множеств $F_{\lambda\lambda_1}^\vartheta$ и $F_{\lambda\mu_1}^\vartheta$ при достаточной близости поверхности F_1 к F_0, λ, μ, близких к $1/2$ и малом ϑ локально выпукло.

3. При достаточной близости F_1 к F_0, λ и λ_1, близких к $1/2$, и малом ϑ отображение, при котором точке $X_0 \in F_0$ сопоставляется точка $X_{\lambda\lambda_1}^\vartheta \in F_{\lambda\lambda_1}^\vartheta$, есть гомеоморфизм.

4. В тех же предположениях относительно λ, λ_1, ϑ и близости F_1 к F_0 множества точек $F_{\lambda\lambda_1}^\vartheta$ и $F_{\lambda\mu_1}^\vartheta$ представляют собой замкнутые изометричные выпуклые поверхности; отображение первой на вторую, при котором точке $X_{\lambda\lambda_1}^\vartheta$ поверхности $F_{\lambda\lambda_1}^\vartheta$ сопоставляется точка $X_{\lambda\mu_1}^\vartheta$ поверхности $F_{\lambda\mu_1}^\vartheta$, изометрическое.

§ 4. Об изометричных выпуклых поверхностях в каноническом расположении

Пусть F — выпуклая поверхность. Мы скажем, что поверхность F находится в *каноническом расположении* относительно плоскости xy, если она однозначно проектируется на эту плоскость, обращена выпуклостью к ней и опорные плоскости поверхности образуют с плоскостью xy углы меньшие $\vartheta_0 < \frac{\pi}{2}$.

Относительно двух изометричных поверхностей F_0 и F_1 мы будем говорить, что они находятся в *каноническом расположении*, если для них выполняются следующие условия:

1) обе поверхности одинаково ориентированы, и каждая из них находится в каноническом расположении относительно плоскости xy;

2) каждый отрезок, соединяющий две произвольные точки одной поверхности, образует с отрезком, соединяющим соответствующие по изометрии точки второй поверхности, угол меньший $\varphi_0<\pi$. В частности, соответствующие по изометрии направления на поверхностях F_0 и F_1 образуют углы меньшие φ_0;

3) при всех λ, достаточно близких к $1/2$, смешанная поверхность $F_\lambda=\lambda F_0+(1-\lambda)F_1$ выпуклая, и она находится в каноническом расположении относительно плоскости xy, а отображение поверхности F_0 на поверхность F_λ, при котором точке $X_0\in F$ сопоставляется точка $X_\lambda=\lambda X_0+(1-\lambda)X_1$ (X_1 — точка поверхности F_1, соответствующая по изометрии X_0), есть гомеоморфизм.

Кривые γ_0 и γ_1 на изометричных поверхностях F_0 и F_1, находящихся в каноническом расположении, мы будем называть *равноотстоящими* (от плоскости xy), если они соответствуют по изометрии поверхностей F_0 и F_1 и соответствующие точки этих кривых находятся на одинаковом расстоянии от плоскости xy.

Равноотстоящие кривые γ_0 и γ_1 на выпуклых поверхностях F_0 и F_1 в каноническом расположении назовем *нормальными*, если для них выполняются следующие условия:

1) кривые γ_0 и γ_1 ограниченной вариации поворота и не содержат конических точек поверхностей F_0 и F_1 соответственно;

2) если точка X кривой γ_i ($i=0, 1$) является ребристой точкой поверхности F_i, то направление ни одной из полукасательных кривой γ_i в точке X не совпадает с направлением ребра касательного двугранного угла в этой точке;

3) если X_0 — произвольная точка кривой γ_0, t_0 — полукасательная кривой γ_0 в этой точке, X_1 и t_1 — соответствующие точка и полукасательная кривой γ_1, то угол, образуемый плоскостью xy и опорной плоскостью поверхности F_0 в точке X_0, проходящей через полупрямую t_0, больше угла, образуемого плоскостью xy и опорной плоскостью поверхности F_1 в точке X_1, проходящей через полупрямую t_1.

Рассмотрим некоторые свойства изометричных выпуклых поверхностей, находящихся в каноническом расположении.

Пусть F_0 и F_1 — изометричные выпуклые поверхности, находящиеся в каноническом расположении, γ_0 и γ_1 — равноотстоящие нормальные кривые на этих поверхностях; $\bar\gamma_0$ и $\bar\gamma_1$ — их проекции на плоскость xy. Тогда *вариация поворота кривой $\bar\gamma_\lambda$ — проекции кривой $\gamma_\lambda=\lambda\gamma_0+(1-\lambda)\gamma_1$ на плоскость xy — равномерно (по λ) ограничена для всех λ, достаточно близких к $1/2$.*

Действительно, $\overline{\gamma}_\lambda = \lambda\overline{\gamma}_0 + (1-\lambda)\overline{\gamma}_1$. Пусть $\overline{\tau}_0(s)$ — единичный вектор правой полукасательной кривой $\overline{\gamma}_0$ в точке, соответствующей дуге s, $\overline{\tau}_1(s)$ — единичный вектор правой полукасательной в соответствующей точке кривой $\overline{\gamma}_1$. Тогда вариация поворота кривой $\overline{\gamma}_0$ (соответственно $\overline{\gamma}_1$) есть не что иное, как вариация вектор-функции $\overline{\tau}_0(s)$ (соответственно $\overline{\tau}_1(s)$), а вариация поворота кривой $\overline{\gamma}_\lambda$ равна вариации вектор-функции

$$\overline{\tau}_\lambda(s) = \frac{\lambda\overline{\tau}_0(s) + (1-\lambda)\overline{\tau}_1(s)}{|\lambda\overline{\tau}_0(s) + (1-\lambda)\overline{\tau}_1(s)|}$$

и, следовательно, равномерно (по λ) ограничена, поскольку $\overline{\tau}_0(s)$ и $\overline{\tau}_1(s)$ ограниченной вариации, а $|\lambda\overline{\tau}_0(s) + (1-\lambda)\overline{\tau}_1(s)|$ ни при каком λ и s не обращается в нуль.

Проведем через кривую γ_λ поверхности F_λ цилиндр Z_λ с образующими, параллельными оси z. Тогда *при λ, близком к 1/2, вариации поворота кривой γ_λ в пространстве, на поверхности F_λ и цилиндре Z_λ равномерно (по λ) ограничены.*

Это следует из равномерной ограниченности по λ вариации поворота кривой $\overline{\gamma}_\lambda$ и результатов § 1.

Пусть F_0 и F_1 — изометричные выпуклые поверхности, находящиеся в каноническом расположении. Тогда *при λ, близком к 1/2, изометричные выпуклые поверхности F_λ и $F_{(1-\lambda)}$ также находятся в каноническом расположении.*

Доказательство этого утверждения сводится к проверке условий, которым удовлетворяют поверхности в каноническом расположении, и оно довольно просто. Заметим только, что поверхности $\lambda_1 F_\lambda + (1-\lambda_1)F_{(1-\lambda)}$ содержатся среди поверхностей F_λ.

В дальнейшем условимся считать λ близким 1/2 и обозначим $\mu = 1-\lambda$.

Пусть F_0 и F_1 — изометричные выпуклые поверхности в каноническом расположении, γ_0 и γ_1 — равноотстоящие нормальные кривые на них. Тогда *кривые γ_λ и λ_μ на поверхностях F_λ и F_μ равноотстоящие и нормальные.*

Для доказательства этого утверждения надо проверить выполнение условий 1) — 3), которым должны удовлетворять нормальные равноотстоящие кривые на изометричных выпуклых поверхностях в каноническом расположении. Проверка этих условий не составляет труда.

Пусть p_0 — поворот кривой $\overline{\gamma}_0$ на отрезке Δ_0, p_1 и p_λ — повороты кривых $\overline{\gamma}_1$ и $\overline{\gamma}_\lambda$ на соответствующих отрезках Δ_1 и Δ_λ. Тогда, если $p_0 \neq p_1$, то $\frac{\partial p_\lambda}{\partial \lambda} = 0$ и при $\lambda = \frac{1}{2}$ $\left|\frac{\partial p_\lambda}{\partial \lambda}\right| = 2\left|\operatorname{tg}\frac{\vartheta'}{2} - \operatorname{tg}\frac{\vartheta''}{2}\right|$, где ϑ' и ϑ'' — углы, на которые надо повернуть полукасательные

на концах кривой Δ_0 для совмещения их с соответствующими полукасательными на концах отрезка Δ_1.

Доказательство этого утверждения достаточно просто и мы его опускаем.

Пусть F — выпуклая поверхность в каноническом расположении относительно плоскости xy, γ — кривая ограниченной вариации на поверхности F. Разбиение кривой γ на конечное число отрезков Δ_i и δ_j мы будем называть *ε-подразделением*, если выполняются следующие условия:

1) концы каждого отрезка Δ суть гладкие точки поверхности F;

2) опорные плоскости поверхности F в любых двух точках каждого отрезка Δ образуют друг с другом угол, не превосходящий ε;

3) правые (левые) полукасательные кривой γ в любых двух точках каждого отрезка Δ образуют друг с другом угол не больше ε;

4) сумма вариаций поворота кривой γ на всех отрезках δ на поверхности F, на цилиндре Z, проектирующем кривую $\bar{\gamma}$, так же как и сумма вариаций поворота отрезков $\bar{\delta}$ кривой $\bar{\gamma}$, в которые проектируются отрезки δ кривой γ, не превосходит ε.

Для любого $\varepsilon>0$ существует ε-подразделение кривой γ на отрезки Δ и δ.

Действительно, каждая точка X кривой γ имеет на кривой окрестность $\omega(X)$ такую, что для отрезков, на которые она разбивается точкой X, выполняются условия 2) и 3). По известной теореме из совокупности отрезков $\omega(X)$ можно выделить конечное покрытие $\omega(X_1)$, $\omega(X_2)$, ..., $\omega(X_n)$. Точки X_k и концы отрезков $\omega(X_k)$ разбивают кривую γ на конечное число открытых отрезков, для которых условия 2) и 3) выполняются. Возьмем теперь у каждой точки этого деления кривой γ на отрезки справа и слева по малому отрезку δ, настолько малому, чтобы сумма вариаций поворотов всех таких отрезков в смысле условия 4 была меньше ε и чтобы вторые концы этих отрезков были гладкими точками поверхности F. При этом мы получим разбиение кривой γ на отрезки δ, удовлетворяющие условию 4), и на остальные отрезки (будем их обозначать Δ), для которых выполняются условия 1), 2) и 3).

Пусть F_1 и F_2 — изометричные выпуклые поверхности в каноническом расположении, γ_1 и γ_2 — равноотстоящие нормальные кривые на этих поверхностях. Тогда *для любого $\varepsilon>0$ существуют соответствующие по изометрии ε-разбиения кривых γ_1 и γ_2.*

Это утверждение доказывается аналогично предыдущему.

Пусть F — выпуклая поверхность в каноническом расположении относительно плоскости xy, γ — кривая ограниченной

вариацин на ней, не содержащая конических точек поверхности, причем, если точка X кривой является ребристой точкой поверхности, то направление ребра касательного двугранного угла в точке X не совпадает ни с одной из полукасательных кривой γ в точке X. Пусть, далее, нмеется какое-нибудь ε-подразделение крнвой γ на отрезки Δ и δ. Зададим направление на кривой и сообщим, таким образом, точный смысл выражению «справа от крнвой».

С помощью одной теоремы В. А. Залгаллера [36], цитированной нами в § 1, нетрудно показать, что существует простая геодезическая ломаная $\bar{\gamma}$ на поверхности F, расположенная справа от кривой γ, удовлетворяющая следующим условиям:

1. Ломаная $\bar{\gamma}$ составлена из кусков $\bar{\Delta}$ и $\bar{\delta}$ подобно тому, как кривая γ нз отрезков Δ и δ.

2. Опорные плоскости поверхности F в точках соответствующих отрезков Δ и $\bar{\Delta}$ образуют углы меньше 2ε.

3. Полукасательные (правые илн левые) в точках соответствующих отрезков Δ и $\bar{\Delta}$ образуют углы меньше 2ε.

4. Правые повороты любых двух соответствующих отрезков Δ и $\bar{\Delta}$, а также отрезков δ и $\bar{\delta}$ крнвых γ и $\bar{\gamma}$ отличаются не более чем на ε' (ε' — сколь угодно малое положительное число).

5. Вариация правого поворота ломаной $\bar{\gamma}$ превосходит не более чем на ε' вариацию правого поворота кривой γ.

6. Вершины ломаной $\bar{\gamma}$ суть гладкие точки поверхности F, каждое звено является единственной кратчайшей на поверхности, соединяющей его концы.

Построим теперь достаточно близкую к F регулярную выпуклую поверхность $\tilde{F}$ с положнтельной гауссовой кривизной. Спроектируем вершины ломаной $\bar{\gamma}$ на эту поверхность и соединнм полученные прн этом точки на поверхности $\tilde{F}$ в том же порядке, как соединены соответствующие вершины ломаной $\bar{\gamma}$ ее звеньями. Полученную при этом ломаную обозначим $\tilde{\gamma}'$, а ее отрезки, соответствующие отрезкам $\bar{\Delta}$ и $\bar{\delta}$, обозначим $\tilde{\Delta}'$ и $\tilde{\delta}'$ соответственно.

Если поверхность $\tilde{F}$ достаточно близка к поверхностн F, для ломаной $\tilde{\gamma}'$ на поверхностн $\tilde{F}$ можно считать выполненными следующне условия:

1. Опорные плоскости поверхностн $\tilde{F}$ в точках каждого отрезка $\tilde{\Delta}'$ образуют с опорнымн плоскостямн поверхности F в точках соответствующего отрезка $\bar{\Delta}$ углы меньше 3ε.

2. Полукасательные (правые и левые) в точках соответствующих отрезков $\bar{\Delta}$ и $\tilde{\Delta}'$ ломаных $\bar{\gamma}$ и $\tilde{\gamma}'$ образуют углы меньше 3ε.

3. Правые повороты любых двух соответствующих отрезков $\overline{\Delta}$ и $\tilde{\Delta}'$, а также отрезков $\overline{\delta}$ и $\tilde{\delta}'$, отличаются не больше чем на $2\varepsilon'$.

4. Вариация правого поворота ломаной $\tilde{\gamma}'$ не более чем на $2\varepsilon'$ превосходит вариацию правого поворота кривой $\overline{\gamma}$.

Все эти свойства легко доказываются от противного путем использования следующих фактов.

Пусть F — выпуклая поверхность и X — точка на ней, F_n — последовательность выпуклых поверхностей, сходящаяся к F, X_n — точка на поверхности F_n и α_n — опорная плоскость поверхности F_n в точке X_n. Тогда, если $X_n \to X$ при $n \to \infty$ и последовательность плоскостей α_n сходится к плоскости α, то α является опорной плоскостью F в точке X.

Пусть на каждой поверхности F_n заданы две точки X_n и Y_n, и γ_n — соединяющая их кратчайшая. Тогда, если X_n и Y_n при $n \to \infty$ сходятся к точкам X и Y на F, которые можно соединить только одной кратчайшей γ, то γ_n сходится к γ.

Если точка X на поверхности F гладкая, то полукасательные к кратчайшим γ_n в точках X_n сходятся к полукасательной к γ в точке X.

Если диаметр сферического изображения кратчайшей меньше η, то углы, образуемые правыми полукасательными в любых двух точках этой кратчайшей, меньше 3ε.

Сгладим ломаную $\tilde{\gamma}'$ в вершинах каждого отрезка $\tilde{\Delta}'$, но так, чтобы при этом правые повороты этих отрезков, а также вариация всей кривой $\tilde{\gamma}'$ изменилась бы не более чем на ε'. Полученную при этом кривую и отрезки, на которые она разбивается, обозначим соответственно $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\Delta}$ и $\tilde{\delta}$.

Спроектируем кривые γ и $\tilde{\gamma}$ на плоскость xy и обозначим γ_{xy}, $\tilde{\gamma}_{xy}$ соответствующие проекции, Z и $\tilde{Z}$ — проектирующие цилиндры, Δ_{xy} и δ_{xy}, $\tilde{\Delta}_{xy}$ и $\tilde{\delta}_{xy}$ — отрезки кривых γ_{xy} и $\tilde{\gamma}_{xy}$, соответствующие отрезкам Δ и δ, $\tilde{\Delta}$ и $\tilde{\delta}$ кривых γ и $\tilde{\gamma}$.

Выведем теперь некоторые соотношения для поворота регулярной кривой $\tilde{\Delta}$ на регулярной поверхности $\bar{F}$.

Для кривой γ на F мы задались некоторым направлением обхода. Этому обходу соответствует некоторый обход кривой $\tilde{\gamma}$ и соответственно определяется понятие лежать «справа» или «слева» от кривой $\tilde{\gamma}$. Проведем в произвольной точке X кривой $\tilde{\Delta}$ касательную плоскость к поверхности $\bar{F}$ и цилиндру $\tilde{Z}$, обозначим их σ и σ_z соответственно. Касательная к кривой $\tilde{\Delta}$ в точке X разбивает каждую из этих плоскостей на две полуплоскости σ', σ'' и σ'_z, σ''_z. Пусть для определенности σ' — та из полуплоскостей плоскости σ, которая прилегает к поверхности $\bar{F}$ в точке X, расположенной справа от $\tilde{\Delta}$, а σ'_z — та из

полуплоскостей плоскости σ_z, которая прилегает к части цилиндра Z, расположенной над кривой $\tilde{\Delta}$.

Пусть $\tilde{p}$ — правый поворот кривой $\tilde{\Delta}$ на поверхности F, $\tilde{p}_1$ — поворот кривой $\tilde{\Delta}$ на полуцилиндре Z_1, $\tilde{\varkappa}$ и $\tilde{\varkappa}_1$ — геодезические кривизны кривой $\tilde{\Delta}$ на поверхности F и цилиндре Z. Пусть, далее, $\tilde{\beta}$ — угол, образуемый полуплоскостями σ' и σ_z'', $\tilde{\alpha}$ — угол, образуемый главной нормалью $\tilde{n}$ кривой $\tilde{\Delta}$ с полуплоскостью σ_z' (который считается положительным, если нормаль $\tilde{n}$ направлена в то из полупространств, определяемых плоскостью σ_z, где расположена полуплоскость σ'). Обозначим, наконец, $\bar{\bar{p}}$ — правый поворот кривой $\bar{\bar{\Delta}}$ (проекции $\tilde{\Delta}$ на плоскость xy), $\tilde{\gamma}_{xy}$ — проекцию кривой $\tilde{\gamma}$ на плоскость xy, $\bar{\bar{\varkappa}}$ — кривизну этой проекции и $\tilde{\varphi}$ — угол, образуемый касательной кривой $\tilde{\gamma}$ с плоскостью xy.

Обычная кривизна $\tilde{k}$ кривой $\tilde{\Delta}$ связана с ее геодезическими кривизнами на поверхности F и цилиндре Z, а также с кривизной $\bar{\bar{\varkappa}}$ проекции $\bar{\bar{\Delta}}$ этой кривой на плоскость xy известными соотношениями:

$$\tilde{k}\cos(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}) = -\tilde{\varkappa},$$
$$\tilde{k}\cos\tilde{\alpha} = \tilde{\varkappa}_1,$$
$$\tilde{k}\sin\tilde{\alpha} = \bar{\bar{\varkappa}}\sin^2\tilde{\varphi}.$$

Из этих соотношений легко получаем

$$\bar{\bar{\varkappa}} = \frac{\tilde{\varkappa}_1\cos\tilde{\beta}+\tilde{\varkappa}}{\sin\tilde{\beta}\sin^2\tilde{\varphi}}.$$

Следовательно,

$$\bar{\bar{p}} = \int\limits_{\bar{\bar{\Delta}}} \frac{\tilde{\varkappa}_1\cos\tilde{\beta}+\tilde{\varkappa}}{\sin\tilde{\beta}\sin^2\tilde{\varphi}}\, d\bar{\bar{s}}.$$

Покажем, что

$$\frac{d}{d\beta}\bar{\bar{\varkappa}} = -\frac{\tilde{\varkappa}_1+\tilde{\varkappa}\cos\tilde{\beta}}{\sin^2\tilde{\varphi}\sin^2\tilde{\beta}} < 0.$$

Действительно,

$$\tilde{\varkappa}_1+\tilde{\varkappa}\cos\tilde{\beta} = \tilde{k}(\cos\tilde{\alpha}-\cos\tilde{\beta}\cos(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})) = \frac{\tilde{k}}{2}\sin\tilde{\beta}\sin(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}).$$

Так как $\tilde{k}>0$, $0<\tilde{\beta}<\pi$, $0<\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}<\pi$, то $\tilde{\varkappa}_1+\tilde{\varkappa}\cos\tilde{\beta}>0$. Следовательно,

$$-\frac{\tilde{\varkappa}_1+\tilde{\varkappa}\cos\tilde{\beta}}{\sin^2\tilde{\varphi}\sin^2\tilde{\beta}} < 0.$$

Подобно тому как для кривой $\tilde{\Delta}$ на поверхности $\tilde{F}$, введем аналогичные величины для кривой Δ на поверхности F, именно:

p — поворот кривой Δ на поверхности F;

p_1 — поворот кривой Δ на цилиндре Z, проектирующем кривую γ на плоскость xy;

$\bar{p}$ — поворот кривой $\bar{\Delta}$ — проекции кривой Δ на плоскость xy;

β и φ — углы, образованные плоскостью xy соответственно с касательной плоскостью поверхности F и с касательной к кривой γ в какой-нибудь точке отрезка Δ, которая является гладкой точкой поверхности F.

Покажем, что сумма

$$\sum_{(\Delta)}\left(-\frac{p_1+p\cos\beta}{\sin^2\varphi\sin^2\beta}\right)\cos\varphi,$$

где суммирование распространяется на все отрезки Δ для ε-разбиения кривой γ, меньше любого положительного числа, если ε достаточно мало.

Действительно, если ε достаточно мало, то сумму

$$\left|\sum_{(\Delta)}\left(-\frac{p_1+p\cos\beta}{\sin^2\varphi\sin^2\beta}\right)\cos\varphi-\sum_{(\tilde{\Delta})}\left(-\frac{\tilde{p}_1+\tilde{p}\cos\beta}{\sin^2\varphi\sin^2\beta}\right)\cos\varphi\right|$$

можно считать сколь угодно малой, так как сколь угодно малы $|p_1-\tilde{p}_1|$ и $|p-\tilde{p}|$. Далее, величину

$$\left|\sum_{(\tilde{\Delta})}\left(-\frac{\tilde{p}_1+\tilde{p}\cos\beta}{\sin^2\varphi\sin^2\beta}\right)\cos\varphi-\sum_{(\tilde{\Delta})}\left(\int\limits_{\tilde{\Delta}}\frac{\tilde{\varkappa}_1+\tilde{\varkappa}\cos\tilde{\beta}}{\sin^2\tilde{\varphi}\sin^2\tilde{\beta}}\cos\tilde{\varphi}\,d\tilde{s}\right)\right|=$$

$$=\left|\sum_{(\tilde{\Delta})}\int\limits_{\tilde{\Delta}}\frac{\tilde{\varkappa}_1+\tilde{\varkappa}\cos\beta}{\sin^2\varphi\sin^2\beta}\cos\tilde{\varphi}\,d\tilde{s}-\sum_{(\tilde{\Delta})}\int\limits_{\tilde{\Delta}}\frac{\tilde{\varkappa}_1+\tilde{\varkappa}\cos\tilde{\beta}}{\sin^2\tilde{\varphi}\sin^2\tilde{\beta}}\cos\tilde{\varphi}\,d\tilde{s}\right|$$

также можно считать сколь угодно малой, так как $|\varphi-\tilde{\varphi}|$, $|\beta-\tilde{\beta}|$ малы вместе с ε, а для $\sum\limits_{(\tilde{\Delta})}\int\limits_{\tilde{\Delta}}|\tilde{\varkappa}_1|\,d\tilde{s}$ и $\sum\limits_{(\tilde{\Delta})}\int\limits_{\tilde{\Delta}}|\tilde{\varkappa}|\,d\tilde{s}$ можно дать оценки сверху, не зависящие от ε.

Вспоминая, что $-\dfrac{\tilde{\varkappa}_1+\tilde{\varkappa}\cos\tilde{\beta}}{\sin^2\tilde{\varphi}\sin^2\tilde{\beta}}<0$, заключаем, что сумма

$$\sum_{\Delta}\left(-\frac{p_1+p\cos\beta}{\sin^2\varphi\sin^2\beta}\right)\cos\varphi$$

меньше любого положительного числа, если ε достаточно мало.

Пусть w, w' — повороты кривой $\bar{\gamma}$ на отрезках $\bar{\Delta}$ и $\bar{\delta}$ соответственно, а w'' — поворот в точке $\bar{P}$ этой кривой, являющейся

общим концом двух отрезков подразделения кривой $\bar{\gamma}$. Тогда полный поворот кривой $\bar{\gamma}$ будет

$$\bar{p} = \sum_{(\bar{\Delta})} w + \sum_{(\bar{\delta})} w' + \sum_{(P)} w''.$$

Покажем, что *если достаточно мало* ε, *то величина* $\bar{p}$ *сколь угодно мало отличается от суммы*

$$\sum_{(\bar{\Delta})} \frac{p_1 \cos\beta + p}{\sin\beta \sin^2\varphi} \cos\varphi + \sum_{(P)} w''.$$

Действительно, $\bar{p}$ при достаточно малом ε' сколь угодно мало отличается от суммы

$$\sum_{(\tilde{\Delta})} \int_{\tilde{\Delta}} \frac{\tilde{\varkappa}_1 \cos\tilde{\beta} + \tilde{\varkappa}}{\sin\tilde{\beta} \sin^2\tilde{\varphi}} \cos\tilde{\varphi} d\tilde{s} + \sum_{(\bar{\delta})} w' + \sum_{(P)} w''.$$

Далее по соображениям, которые указаны в предыдущем рассуждении, величина

$$\left| \sum_{(\tilde{\Delta})} \int_{\tilde{\Delta}} \frac{\tilde{\varkappa}_1 \cos\tilde{\beta} + \tilde{\varkappa}}{\sin\tilde{\beta} \sin^2\tilde{\varphi}} \cos\tilde{\varphi}\, d\tilde{s} - \sum_{(\bar{\Delta})} \frac{p_1 \cos\beta + p}{\sin\beta \sin^2\varphi} \cos\varphi \right|$$

мала, если достаточно мало ε. Что касается суммы $\sum_{(\bar{\delta})} w'$, то она тоже мала вместе с ε. Итак, $\bar{p}$ *сколь угодно мало отличается от суммы*

$$\sum_{(\bar{\Delta})} \frac{p_1 \cos\beta + p}{\sin\beta \sin^2\varphi} \cos\varphi + \sum_{(P)} w''.$$

Пусть F_0 и F_1 — изометричные выпуклые поверхности в каноническом расположении относительно плоскости xy, γ_0 и γ_1 — равноотстоящие нормальные кривые на этих поверхностях. Построим изометричные поверхности F_λ и F_μ (λ близко к 1/2, $\mu = 1 - \lambda$) и кривые γ_λ и γ_μ на них. Как было показано выше, выпуклые поверхности F_λ и F_μ находятся в каноническом расположении, а кривые γ_λ и γ_μ являются равноотстоящими нормальными кривыми.

Подвергнем обе кривые γ_λ и γ_μ таким ε-подразделениям Δ_λ, δ_λ и Δ_μ, δ_μ, чтобы отрезки Δ_λ и Δ_μ, δ_λ и δ_μ соответствовали по изометрии. Введем теперь для поверхности F_λ, подобно тому как это сделано для поверхности F, следующие обозначения:

p_λ — поворот кривой Δ_λ на поверхности F_λ;

$p_{1\lambda}$ — поворот кривой Δ_λ на цилиндре Z_λ, проектирующем кривую γ_λ на плоскость xy;

β_λ и φ_λ — углы, образуемые плоскостью xy соответственно с касательной плоскостью поверхности F_λ и с касательной к

кривой Δ_λ в какой-нибудь точке кривой Δ_λ, которая является гладкой точкой поверхности F_λ;

w_λ и w'_λ — повороты отрезков $\overline{\Delta}_\lambda$ и $\overline{\delta}_\lambda$ кривой $\overline{\gamma}_\lambda$ — проекции кривой γ_λ на плоскость xy, соответствующих отрезкам Δ_λ и δ_λ кривой γ_λ;

w'' — поворот кривой $\overline{\gamma}_\lambda$ в точке P_λ, являющейся концом двух отрезков подразделения кривой $\overline{\gamma}_\lambda$.

Аналогичные обозначения введем для поверхности F_μ и кривой γ_μ на ней.

Пусть кривые γ_0 и γ_1 — замкнутые жордановы кривые. Покажем, что *все точки этих кривых являются гладкими точками поверхностей F_0 и F_1 соответственно.*

Допустим, точка P_0 кривой γ_0 является ребристой точкой поверхности F_0. Тогда каждая из точек — $P_{0\lambda}$ на поверхности F_λ и $P_{0\mu}$ на поверхности F_μ — является тоже ребристой. Соответствующие точки $\overline{P}_{0\lambda}$ и $\overline{P}_{0\mu}$ кривых $\overline{\gamma}_\lambda$ и $\overline{\gamma}_\mu$ будут неизбежно угловые. Пусть $w''_{0\lambda}$ и $w''_{0\mu}$ — повороты в точках $\overline{P}_{0\lambda}$ и $\overline{P}_{0\mu}$ кривых $\overline{\gamma}_\lambda$ и $\overline{\gamma}_\mu$ соответственно. Тогда $w''_{0\lambda} > w''_{0\mu}$ $(\lambda<\mu)$; более того, при $\lambda \to \frac{1}{2}$ отношение

$$\frac{w''_{0\mu} - w''_{0\lambda}}{\mu - \lambda}$$

стремится к определенному отрицательному пределу w_0.

Так как кривые $\overline{\gamma}_\lambda$ и $\overline{\gamma}_\mu$ замкнутые, то поворот каждой из них равен 2π.

С другой стороны, при достаточно малом ε эти повороты сколь угодно мало отличаются от

$$\sum_{(\Delta_\lambda)} \frac{p_{1\lambda}\cos\beta_\lambda + p_\lambda}{\sin\beta_\lambda \sin^2\varphi_\lambda}\cos\varphi_\lambda + \sum_{(P_\lambda)} w''_\lambda$$

и

$$\sum_{(\Delta_\mu)} \frac{p_{1\mu}\cos\beta_\mu + p_\mu}{\sin\beta_\mu \sin^2\varphi_\mu}\cos\varphi_\mu + \sum_{(P_\mu)} w''_\mu$$

соответственно.

Поэтому при фиксированных λ и μ можно взять настолько малое ε, что выражение

$$R = \sum_{(\Delta_\lambda, \Delta_\mu)} \frac{1}{\mu-\lambda}\left(\frac{p_{1\mu}\cos\beta_\mu + p_\mu}{\sin\beta_\mu \sin^2\varphi_\mu}\cos\varphi_\mu - \frac{p_{1\lambda}\cos\beta_\lambda + p_\lambda}{\sin\beta_\lambda \sin^2\varphi_\lambda}\cos\varphi_\lambda\right) + \\ + \sum_{(\overline{P}_\lambda, \overline{P}_\mu)} \frac{w''_\mu - w''_\lambda}{\mu - \lambda}$$

по абсолютной величине будет сколь угодно мало.

Но

$$\frac{\cos\beta_\mu}{\sin\beta_\mu}=\frac{\cos\beta_\lambda}{\sin\beta_\lambda}-(\mu-\lambda)\left(\frac{1}{\sin^2\beta_\lambda}+\xi_1\right),$$

$$\frac{1}{\sin\beta_\mu}=\frac{1}{\sin\beta_\lambda}-(\mu-\lambda)\left(\frac{\cos\beta_\lambda}{\sin^2\beta_\lambda}+\xi_2\right),$$

где ξ_1 и ξ_2 сколь угодно малы, если λ близко к 1/2. Так как $p_{1\lambda}=p_{1\mu}$, $p_\lambda=p_\mu$, $\varphi_\lambda=\varphi_\mu$ и суммы $\sum\limits_{\Delta_\lambda}|p_{1\lambda}|, \sum\limits_{\Delta_\lambda}|p_\lambda|$ равномерно (по λ) ограничены, то выражение

$$\sum_{(\Delta_\lambda,\,\Delta_\mu)}\frac{1}{\mu-\lambda}\left(\frac{p_{1\mu}\cos\beta_\mu+p_\mu}{\sin\beta_\mu\sin^2\varphi_\mu}\cos\varphi_\mu-\frac{p_{1\lambda}\cos\beta_\lambda+p_\lambda}{\sin\beta_\lambda\sin^2\varphi_\lambda}\cos\varphi_\lambda\right)$$

при λ, близком к 1/2, отличается сколь угодно мало от суммы

$$\sum_{(\Delta_\lambda)}\left(-\frac{p_{1\lambda}+p_\lambda\cos\beta_\lambda}{\sin^2\beta_\lambda\sin^2\varphi_\lambda}\right)\cos\varphi_\lambda,$$

которая, как показано выше, при достаточно малом ε меньше любого положительного числа.

Что касается суммы

$$\sum_{(P_\lambda,\,P_\mu)}\frac{w''_\mu-w''_\lambda}{\mu-\lambda},$$

то у нее все слагаемые не больше нуля, причем, если достаточно мало ε, так что точки $P_{0\lambda}$ и $P_{0\mu}$ входят в число точек деления кривых γ_λ и γ_μ на отрезки, а λ близко к половине, то по крайней мере одно слагаемое, именно то, которое соответствует точкам $P_{0\lambda}$ и $P_{0\mu}$, заведомо меньше $w_0/2$.

Отсюда следует, что при достаточно малом ε и λ, близком к 1/2, выражение R не может быть сколь угодно малым по абсолютной величине. Мы пришли к противоречию. Итак, все точки кривых γ_0 и γ_1 на поверхностях F_0 и F_1 суть гладкие точки, а также гладкие и сами кривые γ_0 и γ_1.

Покажем теперь, что *кривые γ_0 и γ_1 на поверхностях F_0 и F_1 не могут быть замкнутыми.*

Не ограничивая общности, можно считать, что в ε-разбиениях кривых γ_λ и γ_μ нет отрезков δ_λ и δ_μ. При $\varepsilon\to 0$ введенное выше выражение R стремится к нулю и в пределе может быть представлено с помощью интеграла Стилтьеса:

$$\frac{1}{\mu-\lambda}\left\{\int\frac{dp_{1\mu}\cos\beta_\mu+dp_\mu}{\sin\beta_\mu\sin^2\varphi_\mu}\cos\varphi_\mu-\int\frac{dp_{1\lambda}\cos\beta_\lambda+dp_\lambda}{\sin\beta_\lambda\sin^2\varphi_\lambda}\cos\varphi_\lambda\right\}=0.$$

Отсюда, как и в предыдущем рассуждении, заключаем, что выражение

$$-\int\limits_{(\gamma_\lambda)} \frac{dp_{1\lambda} + dp_\lambda \cos\beta_\lambda}{\sin^2\beta_\lambda \sin^2\varphi_\lambda} \cos\varphi_\lambda$$

сколь угодно мало по абсолютной величине. А так как этот интеграл, взятый по любой части кривой γ_λ, имеет один и тот же знак, то он мал для любого отрезка этой кривой, причем сколь угодно мал, если λ близко к $1/2$. Таким образом, для любых двух соответствующих участков m_λ и m_μ кривых γ_λ и γ_μ при λ, достаточно близком к $1/2$, выражение

$$\frac{1}{\mu-\lambda}\left\{\int\limits_{(m_\mu)} \frac{dp_{1\mu}\cos\beta_\mu + dp_\mu}{\sin\beta_\mu \sin^2\varphi_\mu}\cos\varphi_\mu - \int\limits_{(m_\lambda)} \frac{dp_{1\lambda}\cos\beta_\lambda + dp_\lambda}{\sin\beta_\lambda \sin^2\varphi_\lambda}\cos\varphi_\lambda\right\}$$

сколь угодно мало. А так как интегралы

$$\int\limits_{(m_\mu)} \frac{dp_{1\mu}\cos\beta_\mu + dp_\mu}{\sin\beta_\mu \sin^2\varphi_\mu}\cos\varphi_\mu \quad \text{и} \quad \int\limits_{(m_\lambda)} \frac{dp_{1\lambda}\cos\beta_\lambda + dp_\lambda}{\sin\beta_\lambda \sin^2\varphi_\lambda}\cos\varphi_\lambda$$

не что иное, как повороты проекций отрезков m_μ и m_λ кривых γ_μ и γ_λ соответственно, то, как показано выше, это возможно только в том случае, если кривые $\bar\gamma_\lambda$ и $\bar\gamma_\mu$ на соответствующих участках имеют одинаковые повороты, т. е. если эти кривые конгруэнтны.

Из конгруэнтности кривых $\bar\gamma_0$ и $\bar\gamma_1$ немедленно следует конгруэнтность кривых γ_0 и γ_1.

Поворотом поверхности F_1 около оси, параллельной оси z, совместим кривые γ_1 и γ_0. При этом, поскольку касательные плоскости поверхности F_0 вдоль кривой γ_0 образуют с плоскостью xy углы большие, чем касательные плоскости поверхности F_1, то кривизна той части поверхности F_0, которая ограничена кривой γ_0, существенно больше кривизны соответствующей части поверхности F_1. Но это невозможно, так как эти куски поверхностей соответствуют по изометрии. Итак, кривые γ_0 и γ_1 не могут быть замкнутыми.

§ 5. *Вспомогательная поверхность* Ω *и ее плоские сечения*

Пусть F_0 и F_1 — изометричные выпуклые поверхности в каноническом расположении относительно плоскости xy. Пусть $r_0(X)$ — радиус-вектор произвольной точки X поверхности F_0 и $r_1(X)$ — радиус-вектор соответствующей по изометрии точки поверхности F_1. Обозначим $\bar F$ смешанную поверхность, заданную

уравнением

$$r=\frac{1}{2}(r_0(X)+r_1(X))=\bar{r}(X).$$

Отобразим поверхность F_1 зеркально в плоскости xy. Пусть $r_1^*(X)$ — радиус-вектор точки поверхности F_1^* — зеркального изображения поверхности F_1, которая соответствует точке X поверхности F_0. Поверхность, заданную уравнением

$$r=\frac{1}{2}(r_0(X)+r_1^*(X))=r(X),$$

будем называть *поверхностью* Ω. Рассмотрим плоские сечения этой поверхности.

Прямыми, параллельными оси z, поверхность $\bar{F}$ однозначно проектируется на поверхность Ω, причем точке $\bar{r}(X)$ поверхности $\bar{F}$ соответствует точка $r(X)$ поверхности Ω. Если точка $\bar{r}(X)$ на $\bar{F}$ гладкая или ребристая, то соответствующая ей точка $r(X)$ на Ω гладкая или ребристая. Действительно, соответствующие точки $r_0(X)$ и $r_1(X)$ на F_0 и F_1 должны быть либо гладкими, либо ребристыми, причем, если они обе ребристые, то направления ребер должны соответствовать по изометрии.

Множество U тех точек поверхности Ω, которые соответствуют коническим точкам поверхности $\bar{F}$, не более чем счетно. Поэтому почти все плоскости, секущие поверхность Ω, не содержат таких точек.

Пусть α — плоскость, секущая поверхность Ω, не содержащая ни одной точки множества U. Мы скажем, что плоскость α *существенно пересекает* поверхность Ω или что она нигде не касается этой поверхности, если в каждой гладкой точке поверхности Ω, лежащей в плоскости α, касательная плоскость не совпадает с α, а в ребристых точках плоскость α или разделяет двугранный угол, или пересекает ребро. Покажем, что *почти все плоскости α, пересекающие поверхность Ω, существенно пересекают ее.*

Введем понятие толщины куска поверхности Ω следующим образом. Пусть ω — кусок поверхности Ω, P и Q — две его точки, причем точка P, а также лежащая над ней точка поверхности $\bar{F}$ не являются коническими. Это значит, что точки на F_0 и F_1, соответствующие P, или обе гладкие, или одна гладкая, другая ребристая, или, наконец, обе ребристые, причем направления ребер соответствуют по изометрии. Проведем в точке P касательную плоскость α, если P — гладкая точка. Если же точка P ребристая, то плоскость α проведем через ребро касательного двугранного угла в точке P так, чтобы грани угла этой плоскостью не разделялись. Пусть $d_\alpha(P, Q)$ — расстояние точки Q от плоскости α. Под толщиной d_ω куска ω будем пони-

мать верхнюю грань значений $d_\alpha(P, Q)$ при всевозможных P, Q и α, удовлетворяющих указанным условиям.

Построим разбиение поверхности Ω на куски ω следующим образом. Сначала разобьем плоскость xy на маленькие квадраты со стороной δ, а затем спроектируем сеть таких квадратов на поверхность Ω прямыми, параллельными оси z. Аналогично спроектируем те же квадраты на поверхность $\overline{F}$. Будем обозначать ω_P кусок поверхности Ω, являющейся проекцией квадрата с центром P. Далее будем обозначать $\overline{\omega}_P^k$ кусок поверхности $\overline{F}$, который является проекцией квадрата с центром P и стороной $k\delta$.

Покажем, что *при достаточно большом, но фиксированном* k *можно указать настолько малое* $\varepsilon>0$, *что при* $\delta<\varepsilon$ *будет* $d_{\omega_P} < \lambda d_{\overline{\omega}_P^k}$ *для всех* P *(центров квадратов разбиения плоскости* xy*), причем* λ *можно считать не зависящим от* δ.

Зададимся круговым конусом K_φ с углом раствора $\pi-\varphi$, где φ достаточно мало. Такой конус близок к плоскости.

Пусть $\eta>1$. Тогда для каждого куска ω_P можно указать такие точки X и Y на нем и плоскость α, что $\eta d_\alpha(X, Y) \geqslant d_{\omega_P}$.

Разобьем все куски ω_P на два класса следующим образом. Пусть $\overline{X}_P$ и X_P — точки $\overline{F}$ и Ω, которые проектируются в центр квадрата P. Проведем в точке $\overline{X}_P$ какую-нибудь опорную плоскость к $\overline{F}$ и поместим конус K_φ так, чтобы его ось совпала с нормалью к опорной плоскости, вершина была в точке $\overline{X}_P$, а сам конус был бы с той же стороны опорной плоскости, что и поверхность $\overline{F}$. Если при этом никакая точка куска $\overline{\omega}_P^{2k}$ не будет внутри конуса K_φ, то отнесем кусок ω_P в первый класс; если же хоть одна точка куска $\overline{\omega}_P^{2k}$ попадет внутрь конуса K_φ, то отнесем кусок ω_P во второй класс.

Очевидно, если кусок ω_P принадлежит второму классу, то $d_{\overline{\omega}_P^k} > c\delta$, где $c>0$ и, можно считать, не зависит от δ. И так как $d_{\omega_P}<c'\delta$ (c' можно считать не зависящим от δ), то для кусков ω_P второго класса может быть указана постоянная λ, не зависящая от δ, такая, что

$$d_{\omega_P} < \lambda d_{\overline{\omega}_P^k}.$$

Теперь обратимся к кускам ω_P из первого класса. На поверхностях F_0 и F_1 куску $\overline{\omega}_P^{2k}$ соответствуют куски $\omega_P'^{2k}$ и $\omega_P''^{2k}$. Из принадлежности куска ω_P первому классу следует, что сферическое изображение куска $\overline{\omega}_P^k$ мало вместе с φ. Отсюда в свою очередь следует, что сферические изображения кусков $\omega_P'^k$ и $\omega_P''^k$ тоже малы.

Пусть X'_P — произвольная точка куска ω'^k_P, которой на поверхности $\overline{F}$ соответствует неконическая точка $\overline{X}_P$, Y'_P — другая точка этого куска. Соединим точки X'_P и Y'_P на F_0 кратчайшей γ_0. Пусть X''_P, Y''_P — соответствующие по изометрии точки и γ_1 — кратчайшая на поверхности F_1. Векторы $\overline{X'_PY'_P}$ и $\overline{X''_PY''_P}$ допускают следующее представление:

$$\overline{X'_PY'_P} = \tau_0 s + \nu_0, \qquad \overline{X''_PY''_P} = \tau_1 s + \nu_1,$$

где τ_0 и τ_1 — единичные векторы кратчайших γ_0 и γ_1 в точках X'_P и X''_P, а s — длина кратчайших γ_0 и γ_1 (см. § 2 гл. II). Проведем в точке $\overline{X}_P$ опорную плоскость к $\overline{F}$, содержащую вектор $\tau_0+\tau_1$. Точка $\overline{Y}_P$ отстоит от этой плоскости на величину порядка $|\nu_0|+|\nu_1|$. Если взять любую другую опорную плоскость в точке $\overline{X}_P$, то это расстояние может увеличиться на величину порядка $\overline{\psi}\chi s$, где $\overline{\psi}$ — угол, дополняющий угол между предельными опорными плоскостями поверхности $\overline{F}$ в точке $\overline{X}_P$ до π, а χ — угол, образуемый направлением τ_0 с ребром поверхности F_0, или, что то же, угол между направлением τ_1 и ребром поверхности F_1 в точке X''_P (эти углы совпадают, потому что направления ребер в точках X'_P и X''_P соответствуют по изометрии). Таким образом,

$$d(\overline{X}_P,\ \overline{Y}_P) \geqslant \overline{\mu}\,(|\nu_0|+|\nu_1|+\overline{\psi}\chi s).$$

Обратимся теперь к куску ω^k_P поверхности Ω. Расстояние точки Y_P (соответствующей $\overline{Y}_P$ на $\overline{F}$) от грани касательного угла в точке X_P (соответствующей $\overline{X}_P$) не больше $|\nu_0|+|\nu_1|$. Если взять вместо грани угла любую плоскость, проходящую через его ребро и не разделяющую граней, то расстояние точки Y_P от такой плоскости может быть больше $|\nu_0|+|\nu_1|$ на величину порядка $\psi\chi s$, где ψ — угол, на который надо повернуть одну из граней угла, чтобы развернуть его на плоскость, а χ и s имеют прежние значения. Отсюда следует, что

$$d(X_P,\ Y_P) \leqslant \mu\,(|\nu_0|+|\nu_1|+\psi\chi s).$$

Так как $\psi \leqslant m\overline{\psi}$ (m — постоянная, не зависящая от δ), то $\lambda d_{\overline{\omega}^k_P} \geqslant d_{\omega^k_P} \geqslant d\omega_P$ для кусков ω_P второго класса. Утверждение доказано полностью.

Теперь оценим $d_{\overline{\omega}^k_P}$. Пусть $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ — две произвольные точки из $\overline{\omega}^k_P$. Проведем через них сечение плоскостью, параллельной оси z. Пусть $\overline{d}(\overline{X},\ \overline{Y})$ — расстояние от точки $\overline{Y}$ до опорной пря-

мой к $\bar{\gamma}$ в точке $\bar{X}$ в направлении оси z и $\bar{d}_{\bar{\omega}_P^k}$ — верхняя грань таких величин. Очевидно, $d_{\bar{\omega}_P^k} \geqslant d_{\bar{\omega}_P^k}$. Поэтому достаточно оценить $\bar{d}_{\bar{\omega}_P^k}$.

Определим дискретную толщину $d^*_{\bar{\omega}_P^s}$ куска $\bar{\omega}_P^s$ равенством $d^*_{\bar{\omega}_P^s} = \sup \bar{d}(\bar{X}, \bar{Y})$ при условии, что $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ принадлежат $\bar{\omega}_P^s$ и проектируются в вершины квадратов квадриляжа плоскости xy.

Пусть l — большое, но фиксированное число. Покажем, что $d^*_{\bar{\omega}_P^{kl}} \geqslant \lambda' \bar{d}_{\bar{\omega}_P^k}$, где λ' — постоянная, не зависящая ни от δ, ни от P.

Проведем из точки P плоскости xy под равными углами $2(2t+1)$ полупрямых. Занумеруем полученные при этом $2(2t+1)$ углов в порядке их следования.

Определим теперь на куске $\bar{\omega}_P^{kl}$ множество M следующими условиями:

1) множеству M принадлежит одна точка $\bar{X}$ куска $\bar{\omega}_P^k$, для которой существует точка $\bar{Y}$ на этом же куске такая, что $\bar{d}(\bar{X}, \bar{Y}) \geqslant \frac{1}{2} \bar{d}_{\bar{\omega}_P^k}$;

2) множеству M принадлежат все те точки на границе куска $\bar{\omega}_P^{kl}$, которые проектируются в вершины квадратов квадриляжа плоскости xy, расположенные в четных углах построенного выше разбиения плоскости xy.

Образуем выпуклую оболочку множества точек M. Это будет выпуклый многогранник. Обозначим Q ту его часть, которая обращена к плоскости xy. Единственной вершиной многогранника Q может быть только точка $\bar{X}$. Пусть $\bar{Y}'$ — точка многогранника Q, лежащая над $\bar{Y}$. Очевидно, $\bar{d}_{\bar{F}}(\bar{X}, \bar{Y}) \leqslant \bar{d}_Q(\bar{X}, \bar{Y}')$. Далее, если A и B — две точки из M, и плоская кривая, их соединяющая, проходит внутри куска $\bar{\omega}_P^k$, то $d^*_{\bar{F}}(A, B) \geqslant d^*_Q(A, B)$.

Многогранник Q можно развернуть на многогранный угол V в точке $\bar{X}$. При этом, если числа k, l и t подчинены неравенству $k \ll t \ll l$, то часть многогранника Q, на которую проектируется кусок $\bar{\omega}_P^k$, остается на месте. При переходе от многогранника Q к многогранному углу V будем иметь

$$\bar{d}_Q(\bar{X}, \bar{Y}') = \bar{d}_V(\bar{X}, \bar{Y}'), \quad d^*_Q(A', B') \geqslant d^*_V(A'', B''),$$

где A'' и B'' — точки угла V, лежащие под точками A' и B'. На угле V, очевидно, можно указать пару точек A' и B' из числа

допустимых, для которых будет $\bar{d}_V(\bar{X}, \bar{Y}') \leqslant \lambda'' d^*_V(A'', B'')$. Отсюда следует, что при $k \ll l$ можно указать постоянную λ', не зависящую от δ и P, такую, что $d^*_{\bar{\omega}_P kl} \geqslant \lambda' d_{\bar{\omega}_P k}$.

Оценим теперь $\sum\limits_P d^*_{\bar{\omega}_P kl}$. Имеем

$$\sum_P d^*_{\bar{\omega}_P kl} \leqslant \sum_{(\bar{X}, \bar{Y})} d^*(\bar{X}, \bar{Y}),$$

где суммирование распространяется на все пары точек $\bar{X}$ и $\bar{Y}$, которые проектируются в вершины квадратов плоскости xy, причем расстояние между этими вершинами меньше $2kl\delta$. Для оценки суммы, стоящей справа, заметим, что если точки $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots, \bar{X}_n$ лежат в одной вертикальной плоскости (плоскости, параллельной оси z), то $\sum d^*(\bar{X}_k, \bar{X}_j) < c\delta$, причем можно считать, что c не зависит от δ. Отсюда следует, что при фиксированных k и l сумма $\sum\limits_{(\bar{X}, \bar{Y})} d^*(\bar{X}, \bar{Y})$ ограничена постоянной, не зависящей от δ. Но это значит, что $\sum\limits_P \omega_P$ также ограничена некоторой постоянной, не зависящей от δ.

Оценим теперь меру множества тех плоскостей, для которых условия существенного пересечения с поверхностью Ω не выполняются. Мы будем говорить, что эти плоскости «касаются» поверхности. Мера множества этих плоскостей $\psi(\Omega)$ не превосходит суммы мер для отдельных кусков, т. е. $\sum \psi(\omega_P)$. Если куски достаточно малы, то площадь сферического изображения каждого из них можно считать меньше ε (при этом конические точки не учитываются). Но если площадь сферического изображения куска ω_P меньше ε, то мера множества «касающихся» его плоскостей меньше εd_{ω_P}. И так как сумма толщин кусков d_{ω_P} ограничена постоянной, не зависящей от δ, то мера множества плоскостей, «касающихся» поверхности Ω, равна нулю.

Итак, *почти все плоскости, которые имеют общие точки с поверхностью Ω, существенно пересекают ее.*

Пусть α — плоскость, пересекающая поверхность Ω, X — произвольная точка, общая для этой поверхности и плоскости α, причем выполняются следующие условия:

1. Если одна из точек X_0 на F_0 или X_1 на F_1, соответствующих точке X, например X_0, ребристая, а другая (X_1) гладкая, то направление на Ω в точке X, соответствующее направлению ребра в точке X_0, не лежит в плоскости α.

2. Если обе точки X_0 и X_1 ребристые, причем направления ребер соответствуют по изометрии, то направление на Ω в

точке X, соответствующее направлению ребер поверхностей F_0 и F_1 в точках X_0 и X_1, не лежит в плоскости α.

Мы скажем, что плоскость α *пересекает* ребра поверхности Ω.

Покажем, что *почти все плоскости α, пересекающие поверхность Ω, пересекают ребра этой поверхности.*

Определим множество G_0 на поверхности F_0 следующим образом. Точку X_0 отнесем к множеству G_0, если выполняется одно из условий:

1) точка X_0 коническая;

2) точка X_0 ребристая, причем соответствующая ей по изометрии точка на F_1 тоже ребристая и направления ребер не соответствуют по изометрии.

Очевидно, множество G_0 не более чем счетно, так как таково соответствующее ему множество на смешанной поверхности $\bar{F}$.

Множество на поверхности F_1, соответствующее по изометрии G_0, обозначим G_1.

Покроем множество G_0 открытыми геодезическими кружками с общей суммой диаметров меньше ε. Полученное покрытие обозначим G_0^ε. Соответствующее по изометрии покрытие множества G_1 на F_1 обозначим G_1^ε. Пусть G^ε — множество на поверхности Ω, соответствующее множествам G_0^ε и G_1^ε.

Очевидно, мера множества плоскостей, содержащих хотя бы одну точку множества G^ε, сколь угодно мала, если достаточно мало ε.

Определим теперь множество E_0^ϑ на поверхности F_0. Точку X_0 поверхности F_0 отнесем множеству E_0^ϑ, если эта точка не принадлежит G_0^ε и либо сама является ребристой точкой с углом излома в этой точке не меньше ϑ, либо соответствующая ей по изометрии точка на F_1 ребристая с углом излома в ней не меньше ϑ. Соответствующее по изометрии множество точек на F_1 обозначим E_1^ϑ. Очевидно, E_0^ϑ и E_1^ϑ — замкнутые множества.

Разобьем плоскость xy на маленькие квадраты со стороной δ и спроектируем эти квадраты на поверхность F_0 прямыми, параллельными оси z. Соответствующие квадратам плоскости xy множества на поверхности F_0 для удобства также будем называть квадратами и будем их обозначать ω_0, а соответствующие по изометрии множества на F_1 будем обозначать ω_1.

Если диаметры квадратов ω_0 малы, т. е. если мало δ, то направления ребер в точках множества E_0^ϑ, принадлежащих одному такому квадрату, образуют между собой сколь угодно малые углы. Действительно, если допустить противное, то легко прийти к существованию конических точек на поверхности F_0, не принадлежащих множеству G_0, что невозможно.

Если диаметры квадратов ω_0 малы, то углы, образуемые направлениями ребер в точках множества E_0^{ϑ}, принадлежащих квадрату ω_0, и направлениями, соответствующими направлениям ребер квадрата ω_1, тоже сколь угодно малы. В противном случае на поверхности $\bar{F}$ были бы конические точки, которым соответствовали бы точки на F_0, не принадлежащие G_0.

Аналогичные заключения надо сделать и относительно направлений ребер поверхности F_1 в точках множества E_1^{ϑ}, принадлежащих одному квадрату ω_1.

Обозначим Σ_0 совокупность квадратов ω_0, содержащих точки множества E_0^{ϑ}. Совокупность соответствующих по изометрии квадратов ω_1 на F_1 обозначим Σ_1.

Пусть n — число квадратов в совокупности Σ_0. Покажем, что *число $n\delta$ ограничено постоянной $c(\vartheta)$, не зависящей от δ*. Для этого напомним определение интеграла средней кривизны для общей выпуклой поверхности.

Если выпуклая поверхность F регулярна, то интегралом средней кривизны множества M на поверхности называется величина

$$H(M) = \int\limits_M \frac{1}{2}(k_1 + k_2)\,dM,$$

где k_1 и k_2 — главные кривизны поверхности. Этой величине можно дать и другое определение. Именно, отложим на внешних нормалях поверхности в точках множества M отрезки длины h. Концы этих отрезков образуют на поверхности F_h, параллельной к данной, некоторое множество M_h. Пусть S_0 — площадь множества M на F, а S_h — площадь множества M_h на F_h. Тогда

$$H(M) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{2}\,\frac{S_h - S_0}{h}.$$

Это определение $H(M)$ имеет смысл и для общих выпуклых поверхностей.

Для краткости будем называть интеграл средней кривизны просто средней кривизной множества. Отметим некоторые свойства средней кривизны.

1. Средняя кривизна является аддитивной функцией множеств на выпуклой поверхности, она определена для всех замкнутых, открытых и вообще борелевских множеств.

2. Средняя кривизна замкнутой выпуклой поверхности с диаметром d не превосходит $2\pi d$.

3. Если деформировать выпуклую поверхность, сохраняя ее границу, так, чтобы точки поверхности двигались внутрь тела, на границе которого находится поверхность, и чтобы при этом

выпуклость поверхности не нарушалась, то средняя кривизна поверхности не увеличивается.

4. Пусть F — коническая выпуклая поверхность, d — расстояние вершины конуса до ближайшей точки границы F, φ — наибольший угол, образуемый внешними нормалями опорных плоскостей в вершине конуса. Тогда средняя кривизна поверхности F не меньше $c\varphi d$, где c — постоянная, не зависящая от поверхности.

Пусть ω_0 — квадрат из совокупности Σ_0, содержащий ребристую точку X_0 поверхности F_0 с углом излома не меньше ϑ. Обозначим ω_0' «в три раза больший» квадрат, т. е. квадрат, состоящий из ω_0 и восьми смежных с ним квадратов. Удалим квадрат ω_0' из поверхности F_0 и построим выпуклую оболочку оставшейся части поверхности и точки X_0. Пусть ω_0'' — та часть полученной поверхности, которая соответствует квадрату ω_0'. Средняя кривизна поверхности ω_0'' не больше средней кривизны квадрата ω_0'. Если развернуть поверхность ω_0'' на касательный конус в точке X_0, то при этом ее средняя кривизна не увеличится, а средняя кривизна этого конуса (он может быть и двугранным углом) не меньше $c'\delta\vartheta$, где c' можно считать не зависящим от δ.

Пусть n_0 — число тех квадратов из Σ_0, которые содержат ребристые точки с изломом не меньше ϑ, а $H(F_0)$ — средняя кривизна поверхности F_0. Тогда, очевидно, $c'n_0\delta\vartheta \leqslant 9H(F_0)$. Аналогично, если n_1 — число квадратов из Σ_1, которые содержат ребристые точки поверхности F_1 с изломом не меньше ϑ и $H(F_1)$ — средняя кривизна этой поверхности, то $c'n_1\delta\vartheta \leqslant 9H(F_1)$. Так как $n \leqslant n_0 + n_1$, то

$$c'n\delta\vartheta \leqslant 9\,(H\,(F_0) + H\,(F_1))$$

и, следовательно, $n\delta$ ограничено постоянной, не зависящей от δ. Утверждение доказано полностью.

Пусть β — плоскость, пересекающая поверхность Ω, и в этой плоскости лежит по крайней мере одна точка X поверхности Ω, которой соответствует на F_0 точка X_0 множества E_0^{ϑ}, а на F_1 — точка X_1 множества E_1^{ϑ}. По крайней мере одна из этих точек, например X_0, ребристая с углом излома не меньше ϑ. Пусть направление на поверхности Ω в точке X, соответствующее направлению ребра в точке X_0 на F_0, лежит в плоскости β. Покажем, что *мера множества плоскостей* β *равна нулю.*

Обозначим ω куски поверхности Ω, соответствующие квадратам ω_0 поверхности F_0 из совокупности Σ_0. Оценим меру плоскостей β для отдельного куска ω. Из свойств направлений ребер в квадратах ω_0 и ω_1 на поверхностях F_0 и F_1, которые были

отмечены выше, следует, что направления на куске ω, через которые должны проходить плоскости β, образуют между собой сколь угодно малые углы, если достаточно малы квадраты ω_0, или, что то же, если достаточно мало δ. Так как, кроме того, диаметры кусков ω меньше $\lambda\delta$ (λ — постоянная, не зависящая от δ), то мера множества плоскостей β для одного куска меньше $\varepsilon'(\delta)\delta$, где $\varepsilon'(\delta)$ стремится к нулю вместе с δ. Отсюда следует, что мера множества плоскостей β для всей поверхности Ω меньше $\varepsilon'(\delta)n\delta$. И так как $n\delta$ ограничено, то мера множества плоскостей β равна нулю.

Так как мера множества плоскостей β при каждом $\vartheta>0$ равна нулю, а мера множества плоскостей, пересекающихся с множеством G^ε, сколь угодно мала, если мало ε, то почти все плоскости, пересекающие поверхность Ω, пересекают ребра этой поверхности.

Основное утверждение доказано полностью.

Пусть для поверхности Ω и плоскости xy выполняются следующие два условия:

1) плоскость xy существенно пересекает поверхность Ω и пересекает ее ребра;

2) край поверхности Ω находится над плоскостью xy.

Пусть M — множество точек поверхности Ω, лежащих в плоскости xy, M_0, M_1 и M_1^* — соответствующие множества на поверхностях F_0, F_1 и F_1^*. Покажем, что множества M_0 и M_1 состоят из нормальных равноотстоящих от плоскости xy кривых (§ 4).

Обозначим $r_0(Y)$ радиус-вектор точки Y поверхности F_0, $r_1(Y)$, $r_1^*(Y)$ — радиус-векторы соответствующих по изометрии точек поверхностей F_1 и F_1^* — зеркального изображения поверхности F_1 в плоскости xy.

В окрестности произвольной точки X_0 множества M_0 для вектор-функций $r_0(Y)$, $r_1(Y)$, $r_1^*(Y)$ имеют место следующие удобные представления (§ 2 гл. II):

$$r_0(Y) = r_0 + \tau_0(Y)\,s(Y) + \nu_0(Y),$$
$$r_1(Y) = r_1 + \tau_1(Y)\,s(Y) + \nu_1(Y),$$
$$r_1^*(Y) = r_1^* + \tau_1^*(Y)\,s(Y) + \nu_1^*(Y).$$

Векторы $\tau_0(Y)$, $\tau_1(Y)$ и $\tau_1^*(Y)$ лежат на гранях касательных конусов поверхности F_0 в точке X_0 и поверхностей F_1, F_1^* в соответствующих точках X_1 и X_1^*.

Если точка Y принадлежит M_0, то вектор $r_0(Y)+r_1^*(Y)$ лежит в плоскости xy. Поэтому при достаточно малом $s(Y)$ вектор $\tau_0(Y)+\tau_1^*(Y)$ образует с этой плоскостью сколь угодно

малый угол. Принимая во внимание, что плоскость xy существенно пересекает поверхность Ω и пересекает направление ребра этой поверхности в точке X, соответствующей X_0, если хотя бы одна из точек X_0 или X_1 ребристая, мы делаем вывод, что на поверхности F_0 в точке X_0 существуют два направления τ_0' и τ_0'', таких, что:

1) направления на Ω, соответствующие направлениям τ_0' и τ_0'', лежат в плоскости xy;

2) направления τ_0' и τ_0'', а также соответствующие им направления на F_1 лежат в различных гранях касательных двугранных углов поверхностей F_0 и F_1 в точках X_0 и X_1 соответственно, если эти точки ребристые;

3) если точка Y множества M_0 достаточно близка к X_0, т. е. если достаточно мало $s(Y)$, то вектор $\tau_0(Y)$ образует сколь угодно малый угол с одним из векторов τ_0' или τ_0''.

Проведем на поверхности F_0 из точки X_0 кратчайшие a, b, c, d так, чтобы выполнялись следующие условия:

1. Полукасательные к кратчайшим a и b в точке X_0 образуют малые углы с направлением τ_0', причем это направление находится между полукасательными, а сами полукасательные лежат на той же грани касательного двугранного угла поверхности F_0 в точке X_0 (если эта точка ребристая), что и направление τ_0';

2. Полукасательные к кратчайшим c и d в точке X_0 образуют малые углы с направлением τ_0'', причем это направление находится между полукасательными, а полукасательные лежат на той же грани касательного двугранного угла, что и направление τ_0'';

3. Кратчайшие на поверхности F_1, соответствующие a, b, c, d, по отношению к направлениям, соответствующим τ_0' и τ_0'', обладают свойствами 1 и 2.

Очевидно, если точка Y множества M_0 достаточно близка к X_0, то она находится либо между кратчайшими a и b, либо между кратчайшими c и d.

Пусть точка Y поверхности F_0, оставаясь между кратчайшими a и b, неограниченно приближается к X_0. Тогда опорная плоскость поверхности F_0 в точке Y сходится к той грани двугранного угла в точке X_0, на которой лежит направление τ_0'. Если же точка Y, приближаясь к X_0, находится между кратчайшими c и d, то опорная плоскость в ней сходится к грани угла, содержащей направление τ_0''. Аналогичное заключение можно сделать для поверхности F_1, соответствующих кратчайших и соответствующих направлений.

Проведем дугу геодезической окружности k на поверхности F_0 между кратчайшими a и b с концами A и B на этих кратчайших. Если радиус окружности достаточно мал, то она (дуга) в каждой точке Z имеет полукасательную $t_0(Z)$. Точки поверхности Ω, соответствующие точкам A и B, при достаточно малом радиусе окружности k расположены по разные стороны плоскости xy. Поэтому на окружности k найдется по крайней мере одна точка Z_0 такая, что соответствующая ей точка на поверхности Ω будет лежать в плоскости xy. Но нетрудно убедиться, что точка Z_0 только одна, если учесть, что полукасательная $t_0(Z)$ при малом радиусе окружности k образует сколь угодно малые углы с гранью касательного угла поверхности F_0 в точке X_0, содержащей направление t_0', а с направлением τ_0' — угол, близкий к $\pi/2$. Полукасательная $t_1(Z)$ окружности k_1, соответствующей k на F_1, обладает аналогичными свойствами. Отсюда мы делаем вывод, что часть множества M_0, расположенная в достаточно малой окрестности точки X_0 между кратчайшими a и b, представляет собой простую дугу. То же заключение надо сделать и относительно части множества M_0, расположенной между кратчайшими c и d.

Теперь очевидно, что все множество M_0 составлено из конечного числа замкнутых простых кривых. Не ограничивая общности, можно считать, что множество M_0 представляет собой одну замкнутую кривую.

Кривая M_0 имеет в каждой точке правую и левую полукасательные, причем правая полукасательная непрерывна справа, а левая полукасательная непрерывна слева.

То, что кривая M_0 имеет в каждой точке правую и левую полукасательные, нами по существу доказано. В точке X_0 кривой M_0 эти полукасательные суть τ_0' и τ_0''. Докажем вторую часть утверждения. Пусть для определенности τ_0' — правая полукасательная кривой M_0 в точке X_0. Возьмем на кривой M_0 справа от X_0 точку Y. Пусть $\tilde{\tau}_0(Y)$ — единичный вектор правой полукасательной в этой точке, $\tilde{\tau}_1^*(Y)$ — единичный вектор полукасательной кривой M_1^* на F_1^* в соответствующей точке. Мы хотим доказать, что $\tilde{\tau}_0(Y) \to \tau_0'$, когда Y приближается к X_0, оставаясь справа от X_0. Допустим, это неверно. Тогда существует последовательность точек Y_k, сходящаяся к X_0, такая, что $\tilde{\tau}_0(Y_k) \to \tilde{\tau}_0 \neq \tau_0'$, $\tilde{\tau}_1^*(Y_k) \to \tilde{\tau}_1^*$. Соединим точки Y_k и X_0 кратчайшей γ_0. Пусть $\tau_0(Y_k)$ — единичный вектор полукасательной этой кратчайшей в точке Y_k, и $\bar{\tau}_1^*(Y_k)$ — единичный вектор полукасательной, соответствующей кратчайшей на F_1^* в соответствующей точке. При $k \to \infty$ углы, образуемые векторами

$\tilde{\tau}_0(Y_k)$ и $\overline{\tau}_0(Y_k)$, $\tilde{\tau}_1^*(Y_k)$ и $\overline{\tau}_1^*(Y_k)$, стремятся к одному и тому же пределу, большему $\pi/2$. Углы, образуемые векторами $\overline{\tau}_0(Y_k)$ и $\tau_0'^*$, $\overline{\tau}_1^*(Y_k)$ и $\tau_1'^*$, сходятся к π. Отсюда мы заключаем, что предельные векторы $\tilde{\tau}_0$ и $\tilde{\tau}_1^*$ образуют с векторами τ_0' и $\tau_1'^*$ одинаковые углы. И так как они расположены в тех же гранях двугранных касательных углов, что и векторы τ_0' и $\tau_1'^*$, то вектор $\tilde{\tau}_0+\tilde{\tau}_1^*$ не может быть параллелен плоскости xy. Но это противоречит тому, что для каждой точки Y_k вектор $\tilde{\tau}_0(Y_k)+\tilde{\tau}_1^*(Y_k)$ параллелен плоскости xy. Непрерывность правой полукасательной кривой M_0 справа доказана. Непрерывность левой полукасательной доказывается аналогично. Из непрерывности справа правой полукасательной следует спрямляемость.

Итак, кривые M_0 и M_1 на поверхностях F_0 и F_1 спрямляемы, имеют правые и левые полукасательные, непрерывные справа и соответственно слева.

Теперь мы покажем, что кривые M_0 и M_1 ограниченной вариации поворота. Очевидно, достаточно показать, что у каждой точки кривой имеется правая и левая полуокрестности ограниченной вариации поворота. Обозначим m_0 достаточно малую правую полуокрестность точки X_0. Пусть m_1 и m_1^* — соответствующие кривые на поверхностях F_1 и F_1^*.

Если отрезок m_0 кривой M_0 достаточно мал, то правые (левые) полукасательные в любых двух точках этой кривой образуют малые углы, опорные плоскости к поверхности F_0 в любых двух точках кривой m_0 тоже образуют малые углы. Это замечание относится также к кривым m_1 и m_1^* на поверхностях F_1 и F_1^*.

Обозначим $\overline{m}_0$, $\overline{m}_1$ и $\overline{m}_1^*$ проекции m_0, m_1 и m_1^* на плоскость xy. Изометрическое соответствие поверхностей F_0, F_1 и F_1^* естественным образом порождает соответствие точек кривых $\overline{m}_0$, $\overline{m}_1$ и $\overline{m}_1^*$ с сохранением длин дуг.

Отобразим поверхность F_1^* в какой-нибудь плоскости σ, перпендикулярной плоскости xy. Полученную поверхность обозначим F_2, кривую на ней, соответствующую m_1^*, и ее проекцию на плоскость xy обозначим m_2 и $\overline{m}_2$. Поверхность F_2 получается из поверхности F_1 поворотом около некоторой прямой, лежащей в плоскости xy, на угол, равный π.

Построим смешанную кривую $\overline{m}={}^1/_2\,(\overline{m}_0+\overline{m}_2)$. Покажем, что кривая $\overline{m}$ выпуклая, если отрезок m_0 кривой достаточно мал, а плоскость σ выбрана подходящим образом. Именно, плоскость

σ надо брать так, чтобы полукасательные кривой m_0 образовали с плоскостью σ достаточно малые углы.

Сначала покажем, что кривая $\overline{m}$ локально выпукла. Пусть $\overline{Y}$ — произвольная точка кривой $\overline{m}$, Y_0 — соответствующая точка кривой m_0. Обозначим $V_0(Y_0)$ касательный двугранный угол в точке Y_0 поверхности F_0, $V_2(Y_0)$ — касательный двугранный угол в соответствующей точке поверхности F_2. Построим смешанный двугранный угол $V(Y_0)=\frac{1}{2}(V_0(Y_0)+V_2(Y_0))$. Ребро угла $V(Y_0)$ существенно пересекает плоскость xy. Проведем плоскость β через ребро угла $V(Y_0)$ так, чтобы она не разделяла граней угла (если точка Y_0 на F_0 и соответствующая точка на F_2 гладкие, то плоскость β просто совпадает с $V(Y_0)$). Плоскость β является локально опорной плоскостью кривой $\overline{m}$ в точке $\overline{Y}$, причем точки кривой $\overline{m}$, близкие к $\overline{Y}$, расположены в том из полупространств, определяемых плоскостью β, где лежит угол $V(Y_0)$. Действительно, радиус-вектор точки кривой $\overline{m}$, соответствующей точке Y кривой m_0, можно представить в виде

$$r_0(Y_0)+r_2(Y_0)+s(Y)(\tau_0(Y)+\tau_2(Y))+\nu_0(Y)+\nu_2(Y).$$

Точка, радиус-вектор которой равен

$$r(Y)=r_0(Y_0)+r_2(Y_0)+s(Y)(\tau_0(Y)+\tau_2(Y)),$$

лежит на двугранном угле $V(Y_0)$. Из этой точки откладывается вектор $\nu_0(Y)+\nu_2(Y)$. Покажем, что каждый из векторов $\nu_0(Y)$ и $\nu_2(Y)$, будучи отложен из точки $P(Y)$, направлен внутрь угла $V(Y_0)$. Возьмем на одной грани угла $V_0(Y_0)$ два взаимно перпендикулярных вектора e_1 и e_2. Пусть $e_3=e_1\times e_2$ — единичный вектор внутренней нормали к этой грани. Векторам e_1 и e_2 по изометрии на одной из граней угла $V_2(Y_0)$ соответствуют векторы e_1' и e_2'. Вектор $e_1'\times e_2'=e_3'$ будет единичным вектором внутренней нормали к этой грани угла $V_2(Y_0)$. Плоскость векторов e_1+e_1' и e_2+e_2' является плоскостью одной из граней угла $V(Y_0)$. Доказать, что векторы $\nu_0(Y)$ и $\nu_2(Y)$ направлены внутрь угла $V(Y_0)$, это значит доказать, что смешанные векторные произведения

$$\left(e_1+e_1',\ e_2+e_2',\ \frac{\nu_0(Y)}{|\nu_0(Y)|}\right),\quad \left(e_1+e_1',\ e_2+e_2',\ \frac{\nu_2(Y)}{|\nu_2(Y)|}\right)$$

неотрицательны, на какой бы грани угла $V_0(Y_0)$ ни были взяты векторы e_1 и e_2. Предполагается, что векторы $\nu_0(Y)$ и $\nu_2(Y)$ не равны нулю. Если какой-нибудь вектор равен нулю, то условно можно считать его направленным внутрь угла $V(Y_0)$.

Покажем сначала, что $(e_1+e_1',\ e_2+e_2',\ e_3)>0$. Положим

$$f=(e_1+e_1',\ e_2+e_2',\ e_3+e_3'),\quad g=(e_1+e_1',\ e_2+e_2',\ e_3-e_3').$$

Пусть α_{ij} — i-я координата вектора e'_j в базисе e_1, e_2, e_3. Тогда

$$f = \begin{vmatrix} 1+\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & 1+\alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 1+\alpha_{33} \end{vmatrix} = |E+\alpha|,$$

где E — единичная, а α — ортогональная матрица. Как известно, существует невырожденная матрица C такая, что

$$C^{-1}\alpha C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$f = |C^{-1}(E+\alpha)C| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\cos\vartheta & \sin\vartheta \\ 0 & -\sin\vartheta & 1+\cos\vartheta \end{vmatrix} = 4(1+\cos\vartheta) \geqslant 0.$$

Величина f не может быть нулем, так как иначе грань угла $V_0(Y_0)$ можно было бы совместить с соответствующей гранью угла $V_2(Y_0)$ соответствующими направлениями после поворота этой грани как целого на угол π, что невозможно. Итак, f существенно положительно.

Аналогичным способом можно показать, что $g=0$. Поэтому

$$(e_1+e'_1,\ e_2+e'_2,\ e_3) = f+g > 0.$$

Когда точка Y_0 приближается к X_0, направление вектора $\nu_0(Y_0)$ сходится к направлению внутренней нормали к той грани угла $V_0(X_0)$, в которой лежит вектор τ'_0 (так мы обозначим единичный вектор полукасательной кривой m_0 в точке X_0). И так как можно считать, что

$$(e_1+e'_1,\ e_2+e'_2,\ e_3) > c_0 > 0,$$

то для Y_0, близких к X_0, и Y, близких к Y_0,

$$\left(e_1+e'_1,\ e_2+e'_2,\ \frac{\nu_0(Y)}{|\nu_0(Y)|}\right) > 0.$$

Аналогично показывается, что

$$\left(e_1+e'_1,\ e_2+e'_2,\ \frac{\nu_2(Y)}{|\nu_2(Y)|}\right) > 0.$$

Итак, плоскость β является локально опорной для кривой $\overline{m}$ в точке $\overline{Y}$. Прямая пересечения плоскости β с плоскостью xy является локально опорной прямой кривой $\overline{m}$ в точке $\overline{Y}$. Из локальной выпуклости кривой $\overline{m}$ и расположения кривой

относительно локально опорных прямых легко следует, что кривая $\bar{m}$ просто выпуклая.

Пусть s — дуга вдоль кривой $\bar{m}_0$, $\bar{r}_0(s)$ — радиус-вектор точки кривой $\bar{m}_0$, соответствующей дуге s, $\bar{r}_2(s)$ — радиус-вектор соответствующей точки кривой $\bar{m}_2$. Так как кривая $\bar{m}$ выпуклая, то вектор-функция

$$\varphi_\sigma(s) = \frac{\bar{r}_0^+(s) + \bar{r}_2^+(s)}{\left|\bar{r}_0^+(s) + \bar{r}_2^+(s)\right|} \qquad (*)$$

ограниченной вариации (индекс σ указывает на то, что поверхность F_2 получена зеркальным отображением поверхности F_1^* в плоскости σ).

Возьмем две различные плоскости σ. Тогда будем иметь две вектор-функции φ_{σ_1} и φ_{σ_2}. Из двух векторных равенств вида (*) для σ_1 и σ_2 можно регулярно выразить компоненты векторов $\bar{r}_0^+$ и $\bar{r}_2^+$ через компоненты векторов φ_{σ_1} и φ_{σ_2}. Отсюда следует, что компоненты векторов $\bar{r}_0^+$ и $\bar{r}_2^+$, а следовательно, и сами векторы суть ограниченной вариации. Но это значит, что кривые $\bar{m}_0$ и $\bar{m}_2$ ограниченной вариации поворота.

Ограниченность вариации поворота кривых $\bar{m}_0$ и $\bar{m}_2$ влечет за собой ограниченность вариации поворота кривых m_0, m_2 и m_1 (§ 1), а это, как было указано выше, обеспечивает ограниченность вариации поворота кривых M_0 и M_1.

То, что полукасательные к кривым M_0 и M_1 не совпадают с направлением касательных двугранных углов поверхностей F_0 и F_1 в соответствующих точках, было отмечено выше. То, что углы, образуемые гранями касательных двугранных углов поверхности F_0 в точках кривой M_0 с плоскостью xy, всюду больше или всюду меньше углов, образуемых соответствующими гранями касательных двугранных углов поверхности F_1 с плоскостью xy, очевидным образом следует из того, что плоскость xy существенно пересекает поверхность Ω.

Таким образом, кривые M_0 и M_1 на поверхностях F_0 и F_1 суть нормальные равноотстоящие кривые.

§ 6. Однозначная определенность замкнутых выпуклых поверхностей

Мы подготовили весь необходимый материал для доказательства основной теоремы настоящей главы об однозначной определенности замкнутых выпуклых поверхностей.

Теорема 1. *Замкнутые изометричные выпуклые поверхности равны.*

Доказательство. Пусть F_0 — замкнутая выпуклая поверхность и F_1 — выпуклая поверхность, изометричная F_0 (вырождение выпуклой поверхности в дважды покрытую выпуклую область плоскости не исключается). Мы хотим доказать равенство поверхностей F_0 и F_1. Во-первых, заметим, что если каждая из поверхностей F_0 и F_1 вырождается в дважды покрытую область плоскости, то утверждение теоремы достаточно очевидно. Действительно, легко видеть, что границы плоских выпуклых областей F_0 и F_1 соответствуют по изометрии, а следовательно, соответствующие их участки имеют одинаковые длины и повороты. Отсюда следует, что границы выпуклых областей F_0 и F_1 равны, следовательно, равны и сами области.

Таким образом, если поверхности F_0 и F_1 не равны, то по крайней мере одна из этих поверхностей, например F_0, не вырождается.

Как показано в § 2, существует замкнутая выпуклая поверхность F_1', изометричная F_0, сколь угодно близкая к F_0, но не равная F_0. Пусть $r_0(X)$ — радиус-вектор произвольной точки X поверхности F_0, а $r_1(X)$ — радиус-вектор соответствующей по изометрии точки поверхности F_1'.

Уравнение $r=\lambda r_0(X)+(1-\lambda)r_1(X)$ при λ, близком к $1/2$, задает замкнутую выпуклую поверхность F_λ, и отображение поверхности F_0 на F_λ, при котором точке $r_0(X)$ поверхности F_0 сопоставляется точка $r_\lambda(X)=\lambda r_0(X)+(1-\lambda)r_1(X)$ поверхности F_λ, есть гомеоморфизм (§ 3).

Для удобства $r_\lambda(X)$ при $\lambda=\frac{1}{2}$ будем обозначать через $\bar{r}(X)$, а поверхность F_λ через $\bar{F}$.

Опишем около поверхности $\bar{F}$ сферу минимального радиуса. Пусть $\bar{r}(X_0)$ — точка поверхности, лежащая на сфере, α_0 — касательная плоскость к сфере в этой точке, а следовательно, опорная плоскость к поверхности $\bar{F}$. Введем в пространстве прямоугольные декартовы координаты, приняв точку $\bar{r}(X_0)$ за начало координат, плоскость α_0 за плоскость xy и положительную полуось z направим в то из полупространств, определяемых плоскостью α_0, где расположена поверхность $\bar{F}$.

Не ограничивая общности, можно считать, что

$$r_0(X_0)=r_1(X_0)=\bar{r}(X_0)=0.$$

Покажем, что равенство $|r_0(X)|=|r_1(X)|$ не может выполняться тождественно. Действительно, проведем через две произвольные точки X и Y поверхности F_0 сечение плоскостью, проходящей через начало координат. В сечении получим плоскую выпуклую кривую, отрезок которой между точками X и Y, не содержащий начало координат, обозначим γ. Кривой γ на

поверхности F_1' соответствует кивая γ' с концами X' и Y'', соответствующими по изометрии X и Y.

Развернем проектирующий кривую γ' из начала координат конус на плоскость. При этом кривая γ' перейдет в плоскую кривую $\overline{\gamma}'$, равную γ. Так как расстояние между концами кривой $\overline{\gamma}'$ не меньше расстояния между концами кривой γ', то пространственное расстояние между точками X и Y поверхности F_0 не меньше пространственного расстояния между соответствующими по изометрии точками X' и Y' поверхности F_1'.

Поменяв ролями поверхности F_0 и F_1', приходим к обратному заключению. Отсюда следует, что пространственные расстояния между соответствующими по изометрии точками поверхностей F_0 и F_1' равны, а значит, равны и поверхности. Мы пришли к противоречию.

Итак, равенство $|r_0(X)| = |r_1(X)|$ не может выполняться тождественно.

Пусть G_0 — связная компонента множества тех точек на поверхности F_0, где $|r_0(X)| \neq |r_1(X)|$. Не ограничивая общности, можно считать, что в G_0 имеем $|r_0(X|) > |r_1(X)|$. Определим в области G_0 вектор-функцию $r(X)$ равенством

$$r(X) = \frac{r_0(X) + r_1(X)}{r_0^2(X) - r_1^2(X)}.$$

Пусть $\overline{G}$ — область на поверхности $\overline{F}$, соответствующая области G_0 на F_0, а Φ — поверхность, заданная уравнением

$$r = r(X)$$

в области G_0. Поверхность Φ однозначно проектируется на область $\overline{G}$ поверхности $\overline{F}$ лучами, идущими из начала координат.

Покажем, что если точка X области G_0 неограниченно приближается к границе области, то точка $r(X)$ поверхности Φ неограниченно удаляется от плоскости xy.

Действительно, пусть Y_0 — точка границы области G_0, к которой точка X приближается. Если точка Y_0 отлична от X_0, наше утверждение очевидно, так как тогда $r_0^2(X) - r_1^2(X) \to 0$, $X \to Y_0$, а $\overline{z}(X) = z_0(X) + z_1(X)$ стремится к положительному пределу.

Допустим теперь, что Y_0 совпадает с X_0. Как показано в § 2 гл. II, вектор-функции $r_0(X)$ и $r_1(X)$ в окрестности точки X_0 допускают следующие представления:

$$r_0(X) = s(X)\tau_0(X) + \varepsilon_0(X)s(X),$$
$$r_1(X) = s(X)\tau_1(X) + \varepsilon_1(X)s(X),$$

где $s(X)$ — расстояние между точками X_0 и X на поверхности F_0, $\tau_0(X)$ — единичный вектор полукасательной к кратчайшей на

поверхности F_0, соединяющей точки X_0 и X в точке X_0, $\tau_1(X)$ — единичный вектор полукасательной к соответствующей по изометрии кратчайшей на поверхности F_1' в точке, соответствующей X_0, $\varepsilon_0(X)$ и $\varepsilon_1(X)$ — векторы, стремящиеся к нулевому вектору при $X \to X_0$.

При достаточной близости поверхности F_1' к F_0 векторы $r_0(X)$ и $r_1(X)$ образуют друг с другом угол меньше $\vartheta_0 < \pi$. Поэтому для X, достаточно близких к X_0, $|r_0(X)+r_1(X)|>c_1 s(X)$, где c_1 — постоянная больше нуля. Отсюда, принимая во внимание способ выбора точки X_0, заключаем, что $z_0(X)+z_1(X) > c_2 s^2(X)$. Что же касается разности $r_0^2(X)-r_1^2(X)$, то она равна $s^2(X)\varepsilon(X)$, где $\varepsilon(X)\to 0$, когда $X \to 0$. Таким образом, расстояние точки $r(X)$ от плоскости xy больше $c_2/\varepsilon(X)$ и, следовательно, неограниченно растет, когда $X \to X_0$.

Рассечем поверхность Φ плоскостью $z=h>0$. Часть $\overline{\Phi}$ поверхности Φ, расположенная ниже $z=h$, т. е. в полупространстве $z \leqslant h$, конечна.

Возьмем достаточно пологий параболоид P:

$$z=k(x^2+y^2),$$

такой, чтобы поверхность $\overline{\Phi}$ была внутри параболоида, и будем его прижимать аффинно к плоскости $z=h$, смещая его точки параллельно оси z к плоскости $z=h$ пропорционально их первоначальным расстояниям от этой плоскости. В какой-то момент параболоид упрется в некоторую точку поверхности $\overline{\Phi}$, радиус-вектор которой обозначим $r(Y_0)$.

Пусть $\bar{n}$ — единичный вектор внутренней нормали к касательной плоскости параболоида в точке $r(Y_0)$. Так как поверхность F_1' достаточно близка к F_0, то для X, близких к Y_0,

$$|r(X)-r(Y_0)|>c_3 s(X),$$

где $s(X)$ — расстояние между точками X и Y_0 на F_0, а c_3 — положительная постоянная. Поэтому

$$(r(X)-r(Y_0))\,\bar{n} > c_4 s^2(X), \tag{*}$$

c_4 — постоянная больше нуля.

Положим для краткости $r_0(Y_0)=a_0$, $r_1(Y_0)=a_1$, $2r(Y_0)=a$. Тогда $r_0(X)=a_0+\bar{r}_0$, $r_1(X)=a_1+\bar{r}_1$ и

$$r(X)-r(Y_0)=\frac{a_0+a_1+\bar{r}_0+\bar{r}_1}{(a_0+\bar{r}_0)^2-(a_1+\bar{r}_1)^2}-\frac{a_0+a_1}{a_0^2-a_1^2}=$$

$$=\frac{(\bar{r}_0+\bar{r}_1)\left(a_0^2-a_1^2\right)-2\left(a_0+a_1\right)\left(a_0\bar{r}_0-a_1\bar{r}_1\right)}{\left(a_0^2-a_1^2\right)\left(a_0^2-a_1^2+2\left(a_0\bar{r}_0-a_1\bar{r}_1\right)\right)}+\varepsilon s^2(X).$$

Отсюда, принимая во внимание неравенство (*), получаем

$$(\bar r_0 + \bar r_1 - a(a_0\bar r_0 - a_1\bar r_1))\,\bar n > cs^2(X),$$

или

$$-\bar r_0(-\bar n + a_0(a\bar n)) + \bar r_1(\bar n + a_1(a\bar n)) > cs^2(X).$$

Положим

$$-\bar n + a_0(a\bar n) = A_0, \quad \bar n + a_1(a\bar n) = A_1.$$

Тогда

$$-A_0\bar r_0 + A_1\bar r_1 > cs^2(X)$$

(c — положительная постоянная).

Покажем, что вектор a не лежит на поверхности $\bar F$ (т. е. он проходит внутри нее) и что скалярное произведение $(a\bar n)$ больше нуля. Действительно, параболоид P был взят достаточно пологим по условию. Поэтому нормаль $\bar n$ образует достаточно малый угол с полуосью $z>0$, а вектор a направлен в одну из точек поверхности Φ, которая конечна и находится на положительном расстоянии от плоскости xy, следовательно, угол, образуемый этим вектором с полуосью $z>0$, не может быть сколь угодно близок к $\pi/2$. Отсюда следует, что скалярное произведение $(a\bar n)$ мы можем считать положительным. То, что вектор a не может лежать на поверхности $\bar F$, тоже ясно, ибо тогда отрезку a на $\bar F$ соответствуют также прямолинейные отрезки на F_0 и F_1' и, следовательно, $r_0^2(Y_0) - r_1^2(Y_0) = 0$, что невозможно.

Возьмем теперь вместо поверхностей F_0 и F_1' смешанные поверхности F_λ и F_μ $(\mu = 1 - \lambda)$ и построим для них $\bar F_\lambda$ и Φ_λ, подобно тому как с помощью поверхностей F_0 и F_1' были построены поверхности $\bar F$ и Φ. Легко видеть, что поверхность $\bar F_\lambda$ совпадает с $\bar F$, а поверхность Φ_λ получается из Φ преобразованием подобия относительно начала координат с коэффициентом подобия $\frac{1}{(\lambda-\mu)^2}$. Поэтому в окрестности точки Y_0 будем иметь

$$-A_\lambda \bar r_\lambda + A_\mu \bar r_\mu > c_\lambda s_\lambda^2(X), \tag{**}$$

где

$$A_\lambda = -\bar n + (\lambda a_0 + \mu a_1)\frac{(a\bar n)}{(\lambda-\mu)^2},$$

$$A_\mu = \bar n + (\mu a_0 + \lambda a_1)\frac{(a\bar n)}{(\lambda-\mu)^2}.$$

При $\lambda \to \frac{1}{2}$ направления векторов A_λ и A_μ сходятся к направлению вектора a. Поэтому при достаточной близости λ к $\frac{1}{2}$

векторы $-A_\lambda$ и $-A_\mu$, будучи отложены из точек $r_\lambda(Y_0)$ и $r_\mu(Y_0)$, проходят внутри касательных конусов поверхностей F_λ и F_μ в этих точках, так как таким свойством обладает вектор a по отношению к касательному конусу поверхности $\bar{F}$ в точке $\bar{r}(X_0)$, как это было отмечено выше.

Перенесем поверхность F_μ параллельно себе так, чтобы ее точка $r_\mu(Y_0)$ совпала с точкой $r_\lambda(Y_0)$ поверхности F_λ, а затем повернем ее около оси, проходящей через эту точку, чтобы вектор A_μ совпал с A_λ. Поверхность F_μ после переноса и поворота обозначим F'_μ. Введем в пространстве новые прямоугольные координаты, приняв точку $r_\lambda(Y_0)$ за начало координат, а направление вектора A_λ — за направление отрицательной полуоси z.

Пусть G есть ε-окрестность точки Y_0 на поверхности F_0. Обозначим области на поверхностях F_λ и F'_μ, соответствующие G, через $\bar{F}_\lambda$ и $\bar{F}'_\mu$.

Если λ достаточно близко к $1/2$, а ε мало, то смешанная поверхность $\frac{1}{2}(\bar{F}_\lambda + \bar{F}'_\mu)$ выпукла, однозначно проектируется на плоскость xy и обращена выпуклостью в сторону $z<0$.

Рассмотрим поверхность Φ', заданную для $X \in G$ уравнением

$$r = \tilde{r}(X) = r_\lambda(X) + r'^*_\mu(X),$$

где $r'^*_\mu(X)$ — зеркальное изображение вектора $r'_\mu(X)$ в плоскости xy. Точка $\tilde{r}(Y_0)$ этой поверхности лежит в плоскости xy, остальные точки поверхности — в полупространстве $z>0$. Второе утверждение следует из неравенства (**), так как $|A_\lambda| = |A_\mu|$ (проверяется непосредственно).

В § 5 было показано, что почти все плоскости α, имеющие общие точки с поверхностью Φ', существенно пересекают эту поверхность и пересекают ее ребра. Возьмем плоскость α так, чтобы она образовала достаточно малый угол с плоскостью xy и не пересекала границу поверхности Φ'.

Отобразим поверхность F'^*, заданную уравнением $r = r'^*_\mu(X)$, в плоскости α. Полученную при этом поверхность обозначим F'^{**}_μ. Если плоскость α образует достаточно малый угол с плоскостью xy, то поверхности F_λ и F'^{**}_μ находятся в каноническом расположении относительно плоскости α.

Плоскость α пересекает поверхность $\frac{1}{2}(F_\lambda + F'^*_\mu)$ по замкнутой кривой c (или нескольким замкнутым кривым). Соответствующие кривые c_λ и c'^{**}_μ на поверхностях F_λ и F'^{**}_μ будут замкнутыми нормальными равноотстоящими от плоскости α

кривыми. Но в § 4 доказано, что на изометричных выпуклых поверхностях в каноническом расположении не может быть замкнутых нормальных равноотстоящих кривых.

Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

С помощью теоремы 1 легко доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть F_1 — выпуклая поверхность с полной кривизной 4π, ограниченная контурами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ с ограниченными вариациями поворота. Тогда каждая выпуклая поверхность F_2, изометричная F_1, равна F_1.*

Доказательство. Построим выпуклую оболочку F_1' поверхности F_1. Поверхность F_1 является областью на замкнутой поверхности F_1'. Так как кривизна этой области равна 4π, то на оставшейся части поверхности F_1' кривизна равна нулю. Отсюда следует, что эта часть состоит из локально изометричных плоскости областей G_k, ограниченных кривыми γ_k. Аналогичное строение имеет поверхность F_2' — выпуклая оболочка поверхности F_2.

Так как кривизна поверхности F_1' вдоль кривой γ_k равна нулю, то поворот этой кривой со стороны области G_k отличается лишь знаком от ее поворота со стороны области F_1 (сумма поворотов равна кривизне поверхности вдоль кривой, § 8 гл. I). Аналогичное заключение надо сделать и относительно соответствующей области G_k' на поверхности F_2'. Ввиду изометрии поверхностей F_1 и F_2 повороты кривых γ_k и γ_k', ограничивающих области G_k и G_k', на соответствующих по изометрии участках равны. Отсюда следует, что изометрия в областях F_1 и F_2 может быть продолжена внутрь областей G_k и G_k', т. е. на замкнутые поверхности F_1' и F_2'. Изометрия поверхностей F_1' и F_2' влечет за собой их равенство. Так как области F_1 и F_2 на поверхностях F_1' F_2' соответствуют по изометрии, то они равны. Теорема доказана.

Выпуклые поверхности, неизгибаемость которых устанавливается теоремой 2, получаются из замкнутых выпуклых поверхностей при удалении областей с нулевой кривизной. Естественно, возникает вопрос, что можно сказать об изгибаемости таких поверхностей при удалении областей с положительной кривизной. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема А. С. Лейбина [44].

Теорема 3. *Выпуклая поверхность F, которая получается из замкнутой выпуклой поверхности удалением области положительной кривизны, изгибаема, т. е. существуют изометричные F и не равные ей поверхности.*

Доказательство. Пусть F' — замкнутая выпуклая поверхность, из которой поверхность F получается путем удаления области G с положительной кривизной. Построим выпуклую оболочку Φ поверхности F. Она состоит из поверхности F и некоторой развертывающейся поверхности $\bar{F}$. Пусть $\bar{F}$ не является плоской областью. Очевидно, найдется точка S — внутри поверхности F', но вне Φ, из которой не вся область $\bar{F}$ поверхности Φ видна снаружи. Построим коническую поверхность V', проектирующую поверхность Φ из точки S. Поверхность V' опирается на поверхность $\bar{F}$ по некоторой образующей g с концами на границе поверхности F, причем плоский треугольник $\triangle$ с основанием g и вершиной S принадлежит V', но не принадлежит $\bar{F}$. Пусть A — внутренняя точка отрезка g и O — точка треугольника $\triangle$, близкая к A. Построим выпуклую оболочку Φ' точки O и поверхности F. Она состоит из поверхности F и некоторой изометричной конусу поверхности V с конической точкой O. Отрезок g принадлежит этой поверхности.

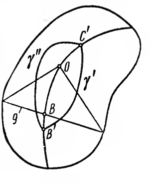

Рис. 27.

Проведем из вершины O на поверхности V геодезическую γ_1, перпендикулярную отрезку g. Пусть B — точка пересечения этой геодезической с отрезком g и B' — близкая к B точка геодезической за отрезком g. Проведем из точки O геодезическую γ_2, делящую вместе с γ_1 полный угол в точке O пополам. Пусть C' — близкая к O точка геодезической γ_2. Точки B' и C' соединяются на поверхности V двумя кратчайшими γ' и γ'' (рис. 27). Удалим область, ограниченную кратчайшими, и отождествим точки геодезических γ' и γ'', отвечающие одинаковым дугам, отсчитываемым от точки B'. По теореме о склеивании существует замкнутая поверхность с разрезом вдоль некоторой кривой, изометричная поверхности Φ' с вырезом вдоль контура $\gamma'+\gamma''$. Область на этой поверхности $\bar{F}$, изометричная F, не равна F, так как расстояние между концами прямолинейного отрезка g при переходе от F к $\bar{F}$ заведомо уменьшается.

Пусть теперь область $\bar{F}$ является плоской областью. Проведем из внутренней точки области $\bar{F}$ перпендикуляр к ней до пересечения с поверхностью F' в точке O, не принадлежащей F. Построим выпуклую оболочку Φ' поверхности F и точки O. Она состоит из поверхности F и конической поверхности V с вершиной O. Возьмем гладкую точку B на границе поверхности F (речь идет о гладкой точке границы). Так как край поверхности V имеет неотрицательный поворот, то на нем найдется

точка C, которая соединяется с B двумя кратчайшими на V. Удалим область на поверхности V, ограниченную этими кратчайшими, и отождествим кратчайшие. Применяя теорему о склеивании, получим замкнутую выпуклую поверхность, содержащую область, изометричную поверхности F, но не равную F. Действительно, точка B на построенной поверхности является заведомо конической. Никакие образующие касательного конуса в этой точке не могут составлять угол π. А на исходной поверхности F полукасательные к краю в точке B образуют угол π. Теорема доказана.

С помощью теоремы 1 мы докажем сейчас две теоремы о возможности одновременного приближения изометричных общих выпуклых поверхностей изометричными выпуклыми многогранниками и изометричными аналитическими выпуклыми поверхностями с положительной гауссовой кривизной. Эти теоремы позволяют в ряде случаев сводить доказательство однозначной определенности общих выпуклых поверхностей к доказательству соответствующих теорем для выпуклых многогранников и аналитических выпуклых поверхностей.

Теорема 4. *Пусть F_1 и F_2 — конечные изометричные выпуклые поверхности, G_1 и G_2 — соответствующие по изометрии области на них, замыкания которых не содержат точек границ поверхностей. Тогда, каково бы ни было положительное ε, существуют изометричные выпуклые многогранники P_1 и P_2 и гомеоморфизмы f_1 и f_2 поверхностей F_1 и F_2 на эти многогранники, удовлетворяющие следующим условиям.*

1. *Если X_1 и X_2 — соответствующие по изометрии точки областей G_1 и G_2, то $f(X_1)$ и $f(X_2)$ — точки, соответствующие по изометрии многогранников.*

2. *Расстояния между точками X_1 и $f(X_1)$, X_2 и $f(X_2)$ не превосходят ε.*

Доказательство. Так как поверхности F_1 и F_2 конечны, то их можно рассматривать как области на замкнутых выпуклых поверхностях F_1' и F_2'.

Подвергнем поверхности F_1' и F_2' достаточно мелкой триангуляции. При этом можно считать, что в областях G_1 и G_2 этих поверхностей триангуляция соответствует по изометрии поверхностей F_1 и F_2. Построим теперь многогранные метрики, заменяя каждый треугольник T триангуляции плоским треугольником с теми же сторонами. По теореме А. Д. Александрова эти многогранные метрики реализуются замкнутыми выпуклыми многогранниками P_1 и P_2. Установим гомеоморфизмы f_1 и f_2 поверхностей F_1' и F_2' на многогранники P_1 и P_2, удовлетворяющие следующим условиям:

1. Если точка A поверхности F_i' принадлежит треугольнику T, то соответствующая при гомеоморфизме f точка $f_i(A)$ на многограннике P_i принадлежит соответствующему треугольнику T^0.

2. Если точки A_1 и A_2 в областях G_1 и G_2 соответствуют по изометрии, то и точки $f_1(A_1)$, $f_2(A_2)$ на многогранниках P_1, P_2 также соответствуют по изометрии.

Очевидно, построение гомеоморфизмов f_1 и f_2 не представляет труда. Ввиду условия 1 метрика многогранника P_i сходится к метрике поверхности F_i, когда стороны треугольников T триангуляции неограниченно убывают. Отсюда по теореме 1 заключаем о сходимости многогранников P_i к поверхности, равной F_i'. Не ограничивая общности, можно считать, что многогранники P_i сходятся к самой поверхности F_i'. При достаточной близости многогранника P_i к поверхности F_i' условие 2 теоремы, очевидно, выполняется. Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть F_1 и F_2 — конечные изометричные выпуклые поверхности, G_1 и G_2 — соответствующие по изометрии области на них, замыкания которых не содержат точек границ поверхностей. Тогда, каково бы ни было положительное ε, существуют изометричные аналитические поверхности Φ_1 и Φ_2 с положительной гауссовой кривизной и гомеоморфизмы f_1 и f_2 поверхностей F_1 и F_2 на поверхности Φ_1 и Φ_2, удовлетворяющие следующим условиям.*

1. *Если X_1 и X_2 — соответствующие по изометрии точки областей G_1 и G_2, то $f(X_1)$ и $f(X_2)$ — точки, поверхностей Φ_1 и Φ_2, соответствующие по изометрии.*

2. *Расстояния между точками X_1 и $f_1(X_1)$, X_2 и $f_2(X_2)$ меньше ε.*

Доказательство. Пусть P_1 и P_2 — изометричные выпуклые многогранники, существование которых утверждается теоремой 4. Они представляют собой области на замкнутых выпуклых многогранниках P_1' и P_2' (см. доказательство теоремы 4). Не ограничивая общности, можно считать, что кривизны многогранников P_1' и P_2' в вершинах триангуляции T положительны. Этого всегда можно добиться малой деформацией метрики многогранников P_1' и P_2'.

Заменим каждый плоский треугольник триангуляции многогранников P_1' и P_2' сферическим треугольником с теми же сторонами и кривизной $1/R$. При достаточно большом R получаемые при этом метрики будут выпуклыми, а их реализации — выпуклые поверхности Φ_1' и Φ_2' — будут удовлетворять условиям 1, 2 теоремы. Метрики поверхностей Φ_1' и Φ_2' всюду, кроме вершин триангуляции, локально изометричны сфере

радиуса R. Вырежем ε'-окрестиость каждой вершиины триаигуляции иа поверхностях Φ_1' и Φ_2' и «вклеим» в получеииый вырез сферический сегмеит с той же полной кривизиой, что и вырезаниая окрестность. Полученные при этом метрики реализуются выпуклыми поверхиостями Φ_1'' и Φ_2'', так же удовлетворяющими условиям 1, 2.

Накоиец, сгладим метрику поверхиостей Φ_1'' и Φ_2'' так, чтобы она была аиалитической в областях, соответствующих G_1 и G_2, имела положительиую гауссову кривизиу, и гладко примыкала к метрике оставшейся части поверхиостей. Выпуклые поверхиости Φ_1 и Φ_2, реализующие эти метрики, при достаточиой близости метрик к метрике поверхиостей Φ_1'' и Φ_2'' в областях, соответствующих G_1 и G_2, удовлетворяют условиям 1, 2 и являются аналитическими в этих областях (теорема § 10 гл. II). Теорема доказаиа.

§ 7. Однозначная определенность выпуклых поверхностей с краем. Принцип максимума

С помощью теоремы 1 § 6 мы докажем сейчас прииции максимума для общих изометричиых выпуклых поверхиостей (теоремы 1, 3). Основиые теоремы об одиозиачиой определеиности выпуклых поверхностей с краем (теоремы 2, 4) являются простым следствием этого прииципа.

Т е о р е м а 1. *Пусть F_1 и F_2 — две изометричные выпуклые поверхности, однозначно проектирующиеся на плоскость xy и обращенные выпуклостью в одну сторону, например в сторону $z<0$. Пусть $z_1(X)$ — координата z точки X поверхности F_1 и $z_2(X)$ — координата z соответствующей по изометрии точки поверхности F_2.*

Тогда функция

$$\Delta(X) = z_1(X) - z_2(X)$$

достигает максимума и минимума на границе поверхностей.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Теорему 1 мы докажем сиачала для выпуклых изометричных миогограииииков. Пусть M — миожество точек миогограиииика F_1, где фуикция $\Delta(X)$ достигает минимума. Если теорема неверна, то миожество M ие содержит точек граиицы поверхиости F_1. В каждой точке миожества M при диффереицироваиии по дуге любой кратчайшей, исходящей из этой точки, $\Delta' \geqslant 0$. Покажем, что миожеству M прииадлежит вершииа миогограиииика F_1, причем для иекоторых иаправлеиий из этой вершиины имеет место строгое иеравеиство $\Delta'>0$. Действительио, на граиице миожества M могут быть только вершиины многогранника F_1, его ребра или отрезки, соответ-

ствующие по изометрии ребрам многогранника F_2. Ввиду такого строения границы множества M ей принадлежит по крайней мере одна вершина X_0 многогранника F_1. В этой вершине и выполняется для некоторых направлений (идущих наружу M) указанное неравенство $\Delta'>0$. Пусть X_0' — соответствующая по изометрии вершина многогранника F_2. Покажем, что неравенство $\Delta'>0$ в вершине X_0 противоречит изометрии многогранных углов V_1 и V_2 многогранников с вершинами X_0 и X_0'. В связи с этим рассмотрим некоторые свойства выпуклых ломаных на сфере.

Пусть на сфере имеем две выпуклые ломаные a и b, звездно расположенные относительно точки O и обращенные выпуклостью от этой точки. Пусть соответствующие звенья ломаных $A_{k-1}A_k$ и $B_{k-1}B_k$ равны, а расстояния вершин ломаных от точки O удовлетворяют условиям

$$OA_k \geqslant OB_k, \qquad (*)$$

причем хотя бы для одной вершины имеет место строгое неравенство ($OA_k > OB_k$). Тогда угол α меньше угла β (рис. 28).

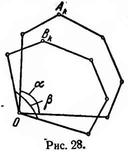

Рис. 28.

Действительно, в совокупности ломаных a, удовлетворяющих условиям (*), найдется такая, для которой угол α максимален. Утверждаем, что для этой ломаной $OA_k = OB_k$ для всех k и, следовательно, $\alpha=\beta$. В самом деле, если $OA_k > OB_k$ и угол при вершине A_k ломаной a не равен π, то угол α можно увеличить, изменив надлежащим образом расстояние OA_k. Таким образом, у экстремальной ломаной a во всех вершинах A_k, для которых $OA_k > OB_k$, угол должен быть равен π.

Пусть A' и A'' — две существенные вершины ломаной, между которыми находится вершина A_k, удовлетворяющая условию $OA_k > OB_k$. В вершинах A' и A'', очевидно, имеют место равенства $OA' = OB'$, $OA'' = OB''$. Подвергнем ломаную b следующему преобразованию. Сохраняя длины звеньев, будем приближать одну из ее существенных вершин к точке O, не изменяя расстояний от O других вершин, до тех пор, пока угол при этой вершине не станет равным π. Затем то же сделаем с другой вершиной и т. д. На каждом этапе такой деформации ломаной b расстояние OB_k либо не изменяется, либо уменьшается. Когда ломаная b выпрямится в дугу большого круга, мы будем иметь равенство $OA_k = OB_k$. Но это невозможно, так как для исходной ломаной было $OA_k > OB_k$, а в процессе деформации ломаной расстояние OB_k не увеличивалось. Итак, для

экстремальной ломаной должно быть равенство $OA_k = OB_k$ во всех вершинах. Следовательно, для любых ломаных a, b угол $\alpha \leqslant \beta$, и равенство имеет место только в том случае, когда $OA_k = OB_k$ для всех вершин. При этом, очевидно, ломаные конгруэнтны.

Пусть теперь имеем две замкнутые ломаные a и b. Пусть для некоторой точки O, расположенной внутри областей, ограниченных ломаными, выполняются неравенства $OA_k \geqslant OB_k$ для всех вершин A_k. Тогда, если соответствующие звенья ломаных $A_{k-1}A_k$, $B_{k-1}B_k$ равны, то $OA_k = OB_k$ и, следовательно, ломаные конгруэнтны. Действительно, пусть A' и A'' — две вершины ломаной a. Они разбивают ломаную на две части a' и a''. Пусть α' и α'' — соответствующие им углы. Точки B' и B'', соответствующие A' и A'', разбивают ломаную b на части b' и b''; соответствующие им углы обозначим β' и β''. Так как $\alpha' + \alpha'' = 2\pi$, $\beta' + \beta'' = 2\pi$, то либо $\alpha' \geqslant \beta'$, либо $\alpha'' \geqslant \beta''$. Допустим, что $\alpha' \geqslant \beta'$. Тогда по доказанному для всех вершин ломаной a' имеет место равенство $OA_k = OB_k$, и, следовательно, $\alpha' = \beta'$. Отсюда заключаем, что $\alpha'' = \beta''$, и для ломаной a'' тоже имеет место равенство $OA_k = OB_k$. Утверждение доказано.

Обратимся теперь к многогранным углам V_1 и V_2 рассматриваемых многогранников. Совместим вершины этих углов с центром единичной сферы и обозначим a и b замкнутые ломаные, которые они определяют в пересечении со сферой. Пусть для определенности углы V_1 и V_2 обращены выпуклостью в сторону $z<0$. Обозначим через O точку сферы, в которой она пересекается с положительной полуосью z. Ввиду условия минимума для функции $\Delta(X)$ направления на угле V_1, исходящие из его вершины, образуют с полуосью $z>0$ углы не меньше тех, что составляют та же полуось и соответствующие направления из угла V_2. Применяя полученный выше результат относительно замкнутых ломаных, заключаем о равенстве ломаных a, b, а следовательно, и многогранных углов V_1, V_2. Таким образом, соответствующие по изометрии направления на углах V_1 и V_2 образуют с полуосью $z>0$ равные углы. Отсюда следует, что по всем направлениям из точки X_0 производная $\Delta'(X_0) = 0$. Мы пришли к противоречию, так как для некоторых направлений из точки X_0 имеет место строгое неравенство $\Delta' > 0$. Теорема 1 для случая многогранников доказана.

Пусть теперь F_1 и F_2 — общие выпуклые поверхности. Если множество M, где достигается минимум функции $\Delta(X)$, не содержит точек границы поверхности F_1, то существует область G_1 на этой поверхности, содержащая M, замыкание которой также не содержит точек границы F_1. Пусть G_2 — соответствующая по изометрии область на поверхности F_2.

По теореме 4 § 6 существуют сколь угодно близкие к поверхностям F_1 и F_2 изометричные многогранники P_1 и P_2. Так как множество M лежит строго внутри области G_1, то при достаточной близости многогранников P_1 и P_2 к поверхностям F_1 и F_2, рассматриваемая для них функция $\Delta(X)$ достигает минимума на некотором множестве $\bar{M}$ многогранника P_1, не содержащем точек границы. А это противоречит теореме 1 в применении к многогранникам P_1 и P_2. Теорема доказана полностью.

Как следствие теоремы 1 получается следующая теорема об однозначной определенности выпуклых поверхностей с краем.

Теорема 2. *Пусть F_1 и F_2 — изометричные выпуклые поверхности, однозначно проектирующиеся на плоскость xy и обращенные выпуклостью в одну сторону, например, в сторону $z<0$. Пусть $z_1(X)$ — координата z точки X поверхности F_1, а $z_2(X)$ — координата z соответствующей по изометрии точки поверхности F_2.*

Тогда, если вдоль границ поверхностей $z_1(X)=z_2(X)$, то поверхности равны. В частности, изометричные выпуклые шапки равны.

Доказательство. Так как максимум и минимум разности $z_1(X)-z_2(X)$ достигается на границе поверхностей, а там эта разность равна нулю, то $z_1(X)-z_2(X)\equiv 0$ (для всех X). Пусть X_1 и X_2 — две произвольные точки поверхности F_1. Проведем сечение поверхности F_1 плоскостью, перпендикулярной плоскости xy. Кривую в этом сечении, соединяющую точки X_1 и X_2, обозначим γ. Пусть X_1' и X_2' — точки поверхности F_2, соответствующие по изометрии X_1 и X_2, а γ' — соединяющая их кривая, соответствующая γ. Если цилиндр Z', проектирующий кривую γ' на плоскость xy, развернуть на плоскость, то ввиду равенства $z_1\equiv z_2$, кривая γ' на этом цилиндре переходит в кривую, конгруэнтную γ. Так как при таком разворачивании цилиндра Z' расстояние между концами кривой γ' не уменьшается, то пространственное расстояние между точками X_1 и X_2 не меньше пространственного расстояния между точками X_1' и X_2'. Поменяв ролями поверхности F_1 и F_2, приходим к обратному заключению. Именно, пространственное расстояние между точками X_1' и X_2' не меньше пространственного расстояния между точками X_1 и X_2. Отсюда следует равенство пространственных расстояний для соответствующих по изометрии пар точек поверхностей F_1 и F_2, а следовательно, и равенство самих поверхностей. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть F_1 и F_2 — изометричные выпуклые поверхности, расположенные в полупространстве $z>0$ звездно относительно начала координат O и обращенные выпуклостью в одну сторону, т. е. видимые из точки O либо изнутри, либо*

снаружи. Пусть X — произвольная точка поверхности F_1, $z_1(X)$ — ее координата z и $\rho_1(X)$ — расстояние от точки O. Пусть $z_2(X)$ и $\rho_2(X)$ — координата z и расстояние от точки O соответствующей по изометрии точки поверхности F_2.

Тогда положительный максимум и отрицательный минимум функции

$$\delta(X)=\frac{\rho_1^2(X)-\rho_2^2(X)}{z_1(X)+z_2(X)}$$

достигается на границе поверхностей.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай аналитических поверхностей F_1 и F_2 с положительной гауссовой кривизной. Допустим, теорема неверна, и пусть M — множество тех точек X, для которых функция $\delta(X)$ достигает положительного максимума. Множество M замкнутое и отделено от границы поверхности F_1. Пусть X_1 — точка этого множества и X_2 — соответствующая по изометрии точка поверхности F_2. Не ограничивая общности, можно считать поверхности F_1 и F_2 одинаково ориентированными. В противном случае одну из поверхностей можно зеркально отразить в плоскости xz. Пусть $r_1(X)$ — вектор произвольной точки X поверхности F_1 и $r_2(X)$ — вектор соответствующей по изометрии точки поверхности F_2. Не ограничивая общности, можно считать, что вектор-функция

$$r=\frac{r_1(X)+r_2(X)}{r_1^2(X)-r_2^2(X)}$$

для X, близких к X_1, задает некоторую аналитическую поверхность Φ. Необходимое для этого условие $dr\neq 0$ всегда может быть удовлетворено сколь угодно малым поворотом одной из поверхностей около оси z.

Покажем, что поверхность Φ в окрестности точки $r(X_1)$ имеет неположительную гауссову кривизну. Пусть X_0 — точка поверхности F_1, близкая к X_1. Соединим точку X с точкой X_0 кратчайшей γ. Пусть $s(X)$ — длина кратчайшей, $\tau(X)$ — единичный касательный вектор кратчайшей в точке X_0, n_1 — единичный вектор внутренней нормали поверхности в точке X_0, $k_1(X)$ — нормальная кривизна поверхности в точке X_0 в направлении кратчайшей γ. Тогда вектор-функция $r_1(X)$ представима в виде

$$r_1(X)=r_1(X_0)+\tau_1(X)\,s(X)+\frac{k_1(X)}{2}\,s^2(X)\,n_1+s^2(X)\,\varepsilon(X),$$

где $\varepsilon(X)$ мало вместе с $s(X)$. Воспроизводя на поверхности F_2 соответствующее по изометрии построение, получим представление для вектор-функции $r_2(X)$

$$r_2(X)=r_2(X_0)+\tau_2(X)\,s(X)+\frac{k_2(X)}{2}\,s^2(X)\,n_2+s^2(X)\,\varepsilon_2(X).$$

Исходя из этих представлений для вектор-функций $r_1(X)$ и $r_2(X)$, находим

$$r(X)-r(X_0)=\alpha(X)s+\beta(X)s^2+\gamma(X)+s^2\varepsilon,$$

где α, β и γ имеют следующие значения:

$$\alpha(X)=\lambda(\tau_1+\tau_2-a(a_1\tau_1-a_2\tau_2)),$$
$$\beta(X)=-2\lambda(a_1\tau_1-a_2\tau_2)\alpha(X),$$
$$\gamma(X)=\frac{\lambda}{2}(k_1n_1+k_2n_2-a(a_1n_1k_1-a_2n_2k_2)),$$
$$a_1=r_1(X_0),\quad a_2=r_2(X_0),\quad a=2r(X_0),\quad \lambda=\frac{1}{a_1^2-a_2^2}.$$

Пусть n — нормаль поверхности Φ в точке $r(X_0)$. Имеем

$$(r(X)-r(X_0))n=\frac{\lambda s^2}{2}(-A_1k_1+A_2k_2)+\varepsilon' s^2,$$

где

$$A_1=-n+(an)a_1,\quad A_2=n+(an)a_2,$$

а ε' мало вместе с s. Как показано в § 5, $A_1=A_2\neq 0$. Поэтому

$$(r(X)-r(X_0))n=\lambda' s^2(k_1-k_2)+\varepsilon' s^2.$$

Ввиду изометрии поверхностей F_1 и F_2 и положительности гауссовой кривизны разность k_1-k_2 при обходе точки X около точки X_0 либо равна нулю тождественно, либо меняет знак. В первом случае гауссова кривизна поверхности Φ в точке $r(X_0)$ равна нулю, а во втором отрицательна. Заметим, что если в точке X_0 имеем $k_1(X)\equiv k_2(X)$, то точка X_0 поверхности F_1 и соответствующая по изометрии точка поверхности F_2 являются точками конгруэнтности. Это значит, что при совмещении этих точек и соответствующих по изометрии направлений в них поверхности F_1 и F_2 будут находиться в соприкосновении второго порядка.

Рассмотрим теперь строение множества M тех точек X, для которых функция $\delta(X)$ достигает максимума. Прежде всего, оно не может содержать внутренних точек. Действительно, если X_1 — внутренняя точка множества M, то у нее есть окрестность, где $\delta(X)=c=\text{const}$. Ввиду аналитичности функции δ тогда $\delta(X)\equiv c$ на всей поверхности F_1. Следовательно, максимум δ достигается на границе F_1, вопреки предположению.

Покажем теперь, что множество M не может содержать изолированных точек. Допустим, X_1 такая точка. В окрестности точки $r(X_1)$ поверхность Φ располагается по одну сторону касательной плоскости $z=\frac{1}{c}$, где $c=\max\delta(X)$, причем точка $r(X_1)$

является единственной точкой из этой окрестности, лежащей в плоскости $z=\frac{1}{c}$. Отсюда следует, что найдутся сколь угодно близкие к $r(X_1)$ эллиптические точки поверхности Φ. Но это невозможно, так как поверхность Φ имеет неположительную кривизну. Итак, множество M не содержит изолированных точек.

Так как рассматриваемые поверхности F_1 и F_2 аналитические, и множество M не содержит ни изолированных, ни внутренних точек, то оно состоит из дуг аналитических кривых. Пусть γ_1 — такая кривая и γ_2 — соответствующая по изометрии кривая на поверхности F_2. По доказанному кривые γ_1 и γ_2 состоят из точек конгруэнтности поверхностей F_1 и F_2, следовательно, являются конгруэнтными кривыми. Если поверхности F_1 и F_2 совместить кривыми γ_1 и γ_2, то при этом совместятся и касательные плоскости вдоль этих кривых. По теореме Коши — Ковалевской в применении к уравнению Дарбу при указанном совмещении кривых γ_1 и γ_2 совместятся также некоторые окрестности этих кривых на поверхностях F_1 и F_2. Это означает, что окрестность кривой $r(\gamma_1)$ на поверхности Φ состоит сплошь из точек уплощения, и, следовательно, содержит кусок плоскости. Таким образом, мы приходим к заключению о существовании внутренних точек у множества M, что уже исключено. Аналогично рассматривается случай отрицательного минимума функции $\delta(X)$. Итак, для аналитических поверхностей с положительной гауссовой кривизной теорема 3 доказана.

Теперь с помощью теоремы 5 § 6 мы распространим этот результат на случай общих выпуклых поверхностей. Итак, пусть F_1 и F_2 — общие выпуклые поверхности, удовлетворяющие условиям теоремы 3. Допустим, теорема неверна и положительный максимум функции $\delta(X)$ достигается на множестве M, не содержащем точек границы. Так как M — замкнутое множество, то существует область G_1 на поверхности F_1, содержащая множество M, причем замыкание G_1 также не содержит точек границы поверхности F_1. Пусть G_2 — соответствующая по изометрии область на поверхности F_2. По теореме 5 § 6 существуют изометричные аналитические поверхности Φ_1 и Φ_2, сколь угодно близкие к поверхностям F_1 и F_2 в областях G_1 и G_2. При достаточной близости поверхностей Φ_1 и Φ_2 к F_1 и F_2 соответственно функция $\delta(X)$ для этих поверхностей также достигает максимума на некотором множестве $\bar{M}$, не содержащем точек границы поверхности Φ_1. Но это противоречит теореме 3 в применении к поверхностям Φ_1 и Φ_2, для которых она уже доказана. Теорема доказана полностью.

Как следствие теоремы 3 получается следующая теорема А. Д. Александрова и Е. П. Сенькина [18].

Теорема 4. *Пусть F_1 и F_2 — изометричные выпуклые поверхности, расположенные в полупространстве $z>0$ звездно относительно начала координат O и обращенные выпуклостью в одну сторону, т. е. видимые из точки O либо внутри, либо снаружи.*

Тогда, если соответствующие по изометрии точки границ поверхностей F_1 и F_2 находятся на одинаковом расстоянии от точки O, то поверхности равны.

Доказательство. Пусть X — произвольная точка поверхности F_1, $z_1(X)$ — ее координата z и $\rho_1(X)$ — расстояние от точки O. Пусть $z_2(X)$ и $\rho_2(X)$ — координата z и расстояние от точки O соответствующей по изометрии точки поверхности F_2. По условию теоремы функция

$$\delta(X) = \frac{\rho_1^2(X) - \rho_2^2(X)}{z_1(X) + z_2(X)}$$

на границе поверхности F_1 равна нулю. В силу теоремы 3 эта функция равна нулю тождественно на поверхности F_1, т. е. $\rho_1(X) \equiv \rho_2(X)$.

Возьмем две произвольные точки X_1 и Y_1 на поверхности F_1 и рассечем поверхность F_1 плоскостью, проходящей через точки X_1, Y_1 и O. Отрезок полученной кривой, соединяющий точки X_1 и Y_1, обозначим через γ_1. Пусть γ_2 — соответствующая по изометрии кривая на поверхности F_2 и X_2, Y_2 — ее контуры. Построим конус V, проектирующий кривую γ_2 из точки O. Развернем конус V на плоскость. Тогда ввиду условия $\rho_1(X) \equiv \rho_2(X)$ кривая γ_2 перейдет в кривую, конгруэнтную γ_1. Так как при этом разворачивании расстояние между концами X_2 и Y_2 кривой γ_2 может только увеличиваться, то пространственное расстояние между точками X_1 и Y_1 поверхности F_1 не меньше пространственного расстояния между соответствующими точками X_2 и Y_2 поверхности F_2. Поменяв ролями поверхности F_1 и F_2, приходим к обратному заключению. Именно, расстояние между точками X_2 и Y_2 не меньше расстояния между точками X_1 и Y_1. Отсюда заключаем, что пространственные расстояния между соответствующими парами точек поверхностей F_1 и F_2 равны. Следовательно, поверхности равны. Теорема доказана.

§ 8. Однозначная определенность бесконечных выпуклых поверхностей с полной кривизной 2π

Теорема. *Бесконечные изометричные выпуклые поверхности с полной кривизной 2π равны.*

Доказательству этой теоремы мы предпошлем ряд лемм. Пусть F — бесконечная выпуклая поверхность с полной кривизной 2π, и O — точка на ней. Проведем из точки O полупрямую t внутрь тела, ограниченного поверхностью F. Примем точку O

за начало декартовой системы координат xyz, а полупрямую t — за положительную ось z. Всюду далее мы будем предполагать такое расположение поверхности относительно плоскости xy.

Лемма 1. *Пусть $s(X)$ — расстояние точки X поверхности F от точки O на поверхности и $\vartheta(X)$ — угол, который образует опорная плоскость поверхности в точке X с плоскостью xy. Тогда при $s(X)\to\infty$ угол $\vartheta(X)\to\pi/2$.*

Доказательство. Допустим, утверждение неверно. Тогда существует последовательность точек X_k на поверхности F такая, что $s(X_k)\to\infty$, а $\vartheta(X_k)<\frac{\pi}{2}-\varepsilon$, где ε — некоторое положительное число. Прямолинейный отрезок OX_k образует с плоскостью xy угол меньше $\pi/2-\varepsilon$ при каждом k. Выберем из отрезков OX_k сходящуюся подпоследовательность. Предел этой подпоследовательности есть полупрямая t', исходящая из точки O и принадлежащая телу, ограниченному поверхностью. Она образует с осью z угол не меньше ε. Отсюда следует, что предельный конус поверхности содержит две различные полупрямые: полуось $z>0$ и полупрямую t'. Так как эти полупрямые образуют угол не меньше ε, то кривизна предельного конуса не больше $2\pi-2\varepsilon$. Следовательно, кривизна поверхности, будучи равна кривизне предельного конуса, меньше 2π. Мы пришли к противоречию. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $\alpha(z)$ — плоскость, параллельная плоскости xy и проведенная на расстоянии z от нее; $\gamma(z)$ — кривая, по которой плоскость $\alpha(z)$ пересекает поверхность F, и $l(z)$ — длина этой кривой. Тогда при $z\to\infty$ отношение $l(z)/z\to 0$.*

Доказательство. Допустим, утверждение неверно. Тогда существует последовательность плоскостей $\alpha(z_k)$ такая, что $z_k\to\infty$, но $l(z_k)/z_k>\varepsilon$, где ε — некоторое положительное число. Кривая $\gamma(z_k)$ выпуклая. Поэтому на ней найдется точка X_k, которая удалена от оси z на расстояние не меньше $l(z)/2\pi$. Угол ϑ_k, образуемый отрезком OX_k с полуосью $z>0$, удовлетворяет неравенству $\operatorname{tg}\vartheta>\varepsilon/2\pi$. Отсюда, рассуждая, как и в доказательстве леммы 1, заключаем, что поверхность F имеет кривизну, меньшую 2π, и таким образом приходим к противоречию.

Лемма 3. *Пусть $\gamma(X)$ — кратчайшая, соединяющая точку X поверхности F с точкой O, $\vartheta(X)$ — угол, образуемый полукасательной к кратчайшей $\gamma(X)$ в точке X с плоскостью xy. Тогда при $s(X)\to\infty$ угол $\vartheta(X)\to\pi/2$.*

Доказательство. Допустим, утверждение неверно. Тогда существует последовательность точек X_k на поверхности такая, что $s(X_k)\to\infty$, но $\vartheta(X_k)<\frac{\pi}{2}-\varepsilon$, где ε — некоторое положительное число. Проведем опорную плоскость $\bar{\alpha}$ поверхности F, параллельную плоскости xy. Пусть $z(X)$ — расстояние точ-

ки X поверхности от плоскости $\overline{\alpha}$, $\delta(X)$ — расстояние между проекциями точек X и O на плоскость $\overline{\alpha}$. Ломаная c, соединяющая точки X и O, составленная из перпендикуляров, опущенных из точек X и O на плоскость $\overline{\alpha}$, и прямолинейного отрезка, соединяющего их основания, расположена вне тела, ограниченного поверхностью F. По теореме Буземана (гл. II, § 1) длина этой ломаной не меньше $s(X)$. Отсюда следует, что $z(X_k)+\delta(X_k)\to\infty$ при $k\to\infty$. Так как $\delta(X_k)/z(X_k)\to 0$ (лемма 2), то $z(X_k)\to\infty$.

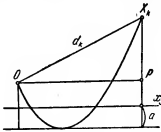

Рис. 29.

Обозначим $\overline{\gamma}(X_k)$ кривую, по которой пересекает плоскость $z=\text{const}$, проходящая через точку X_k, поверхность F. Пусть $l(X_k)$ — длина этой кривой. Развернем цилиндр, проектирующий кратчайшую $\gamma(X_k)$, на плоскость. Согласно теореме Либермана (гл. II, § 1) кривая $\gamma(X_k)$ переходит при этом в выпуклую кривую (рис. 29). Оценим длину d_k гипотенузы треугольника OPX_k. Во-первых, очевидно, $d_k<s(X_k)$. Далее $s(X_k)<z(O)+\delta(X_k)+z(X_k)+2a$, $\delta(X_k)<l(X_k)$, так как кривая $\overline{\gamma}(X_k)$ охватывает ось z. Поэтому

$$\sin\vartheta_k>\frac{z(X_k)-z(O)}{s(X_k)}>\frac{z(X_k)-z(O)}{z(X_k)+\delta(X_k)+z(O)+2a}.$$

При $k\to\infty$ правая часть неравенства стремится к единице. Следовательно, $\vartheta_k\to\pi/2$, вопреки предположению. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть F_1 и F_2 — две бесконечные изометричные выпуклые поверхности, расположенные над плоскостью xy, обращенные выпуклостью к этой плоскости в том смысле, что внешние нормали к их опорным плоскостям образуют с полуосью $z<0$ углы $\leqslant\pi/2$. Пусть $\alpha(z)$ — плоскость, параллельная плоскости xy, проведенная на расстоянии z от нее, $\overline{\gamma}_1(z)$ — кривая пересечения этой плоскости с поверхностью F_1 и $\overline{\gamma}_2(z)$ — соответствующая по изометрии кривая на поверхности F_2. Тогда при достаточно большом z кривая $\overline{\gamma}_2(z)$ проектируется на плоскость xy в выпуклую кривую.*

Доказательство. Согласно лемме 1 при достаточно большом z углы, образуемые плоскостью xy и опорными плоскостями поверхностей F_1 и F_2 вдоль $\overline{\gamma}_1(z)$ и $\overline{\gamma}_2(z)$, больше $\pi/2-\varepsilon$. Пусть O_1 и O_2 — две фиксированные, соответствующие по изометрии точки поверхностей F_1 и F_2, X_1 и X_2 — произвольные, соответствующие по изометрии точки кривых $\overline{\gamma}_1(z)$ и $\overline{\gamma}_2(z)$, $\gamma_1(X_1)$ и $\gamma_2(X_2)$ — соответствующие по изометрии кратчайшие,

соедиияющие точки X_1 и X_2 с точками O_1 и O_2 соответственно. По лемме 3 углы, образуемые полукасательными к кратчайшим $\gamma_1(X_1)$ и $\gamma_2(X_2)$ в точках X_1 и X_2 с плоскостью xy, больше $\pi/2 - -\varepsilon$, если достаточио велико z. Отсюда следует, что при достаточно большом z углы, образуемые полукасательными кривой $\overline{\gamma}_2(z)$ с плоскостью xy, меньше 2ε.

Выберем теперь z настолько большим, чтобы углы, образуемые плоскостью xy и опорными плоскостями поверхиости F_2 вдоль кривой $\gamma_2(z)$, были больше $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$, а полукасательные к кривой $\gamma_2(z)$ с той же плоскостью xy образовали углы меньше ε, где ε — малое положительиое число. Покажем, что при достаточио малом ε кривая $\tilde{\gamma}_2(z)$ — проекция кривой $\overline{\gamma}_2(z)$ на плоскость xy — ограничивает выпуклую область $\tilde{\sigma}_2(z)$. Допустим, область $\tilde{\sigma}_2(z)$ не выпуклая. Построим выпуклую оболочку $\tilde{b}$ области $\tilde{\sigma}_2(z)$. Пусть $\tilde{c}$ — граница выпуклой области $\tilde{b}$. Так как $\tilde{\gamma}_2(z)$ — простая замкнутая кривая, а $\tilde{b} \not\equiv \tilde{\sigma}_2(z)$, то на кривой $\tilde{c}$ найдется точка, ие принадлежащая $\tilde{\gamma}_2(z)$. Эта точка приiадлежит прямолинейному отрезку t кривой $\tilde{c}$, коицы которого принадлежат $\tilde{\gamma}_2(z)$ (рис. 30). Обозиачим через m соответствующий этому прямолииейному отрезку участок кривой $\tilde{\gamma}_2(z)$. Замкиутая кривая, составлеииая из m и t, ограиичивает область G, лежащую вне $\tilde{\sigma}_2(z)$.

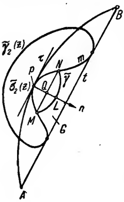

Рис. 30.

Отметим иа продолжеиии отрезка t по разиые его стороиы две достаточио удалеииые точки A и B. Проведем через эти точки окружиость максимальиого радиуса, содержащую область и такую, чтобы ее центр и область G лежали по разные стороны от прямой, содержащей t. Такая окружность упирается в кривую m в иекоторой точке P. Пусть τ — опорная прямая к кривой m в этой точке, а n — нормаль к ней, идущая внутрь области G. Проведем через точку Q иормали n, близкую к P, прямую τ_Q, параллельную τ, и обозначим M и N ближайшие к Q точки пересечения ее с кривой m. Соединим точки кривой $\overline{\gamma}_2(z)$, которые проектируются в точки M и N, кратчайшей $\overline{\gamma}$ в области, ограниченной кривой $\overline{\gamma}_2(z)$ иа поверхиости F_2. Это возможио, так как упомянутая область виутрение выпукла. Примеиим к кратчайшей $\overline{\gamma}$ теорему Либермаиа, взяв в качестве направления проектирования направлеиие иормали n. Так как

концы кратчайшей $\bar{\gamma}$ проектируются на плоскость xy в точки M и N, то проекция $\tilde{\gamma}$ геодезической $\bar{\gamma}$ на плоскость xy будет лежать с одной стороны от прямой τ_Q, именно с той стороны, куда направлена нормаль n. Тем более она будет с одной стороны от прямой τ. Если точка Q достаточно близка к P, то длина кривой $\tilde{\gamma}$ будет сколь угодно малой. Поэтому точка L пересечения кривой $\tilde{\gamma}$ с нормалью n будет также сколь угодно близка к P. Но все точки полупрямой n, близкие к P, лежат в области G, т. е. вне $\tilde{\sigma}_2(z)$. Мы пришли к противоречию, ибо кривая $\tilde{\gamma}$ должна проходить в $\tilde{\sigma}_2(z)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Рассмотрим сначала случай регулярных дважды дифференцируемых поверхностей. Итак, пусть F — дважды дифференцируемая бесконечная выпуклая поверхность с полной кривизной 2π и F' — изометричная ей выпуклая поверхность. Расположим поверхности F и F' так, чтобы в начале координат O совпали две соответствующие по изометрии точки поверхностей F и F' и чтобы положительная полуось z проходила внутри каждой из поверхностей.

Возьмем достаточно большое h и проведем плоскость $z=h$. Эта плоскость пересекает поверхность F по кривой γ, ограничивающей шапку G на поверхности F. Соответствующие по изометрии кривую и область на поверхности F' обозначим γ' и G'. Как показано выше (леммы 1, 2, 4), при достаточно большом h для кривых γ и γ' выполняются следующие условия:

1. Касательные плоскости F вдоль кривой γ и касательные плоскости поверхности F' вдоль кривой γ' образуют с осью z сколь угодно малые углы.

2. Касательные кривой γ' образуют с плоскостью xy сколь угодно малые углы.

3. Область G' проектируется на плоскость xy в выпуклую область.

Введем на поверхности F какую-нибудь координатную сеть u, v и перенесем ее по изометрии на поверхность F'. В силу изометрии поверхностей F и F' коэффициенты e, f, g первых квадратичных форм поверхностей F и F' совпадают. Пусть l, m, n и l', m', n' — коэффициенты вторых квадратичных форм. Обозначим λ, μ, ν и λ', μ', ν' — коэффициенты вторых квадратичных форм, деленные на дискриминант $\sqrt{eg-f^2}$ первой квадратичной формы. Тогда имеет место следующая формула:

$$\iint\limits_G \begin{vmatrix} \lambda-\lambda', & \mu-\mu', \\ \mu-\mu', & \nu-\nu', \end{vmatrix} n\, d\sigma =$$

$$= \int\limits_\gamma \{[(\mu'-\mu) r_u - (\lambda'-\lambda) r_v]\, du + [(\nu'-\nu) r_u - (\mu'-\mu) r_v]\, dv\}, \qquad (*)$$

где n — нормаль к поверхности F, а r — вектор точки этой поверхности. Эта формула получается аналогично тому, как выводится формула Герглотца для изометричных поверхностей в работе Н. В. Ефимова [33].

Умножим скалярно равенство (*) на единичный вектор e, имеющий направление отрицательной полуоси z, и оценим правую часть полученного равенства. Очевидно, она инвариантна относительно выбора координатной сети u, v. Если же в качестве координатной сети взять полугеодезическую сеть, построенную на базе γ, то правая часть равенства принимает вид

$$\int_{\gamma} (K - K')(e\xi)\, ds, \tag{**}$$

где K' и K — нормальные кривизны поверхностей F' и F вдоль кривых γ и γ'; ξ — единичный касательный вектор поверхности F, перпендикулярный касательной γ и направленный в сторону G; ds — элемент дуги кривой γ.

Величина интеграла (**), естественно, зависит от плоскости $z=h$, отрезающей шапку G. Покажем, что если h достаточно велико, то величина каждого из двух интегралов

$$\int_{\gamma} K(e\xi)\, ds \quad \text{и} \quad \int_{\gamma'} K'(e\xi)\, ds$$

сколь угодно близка к 2π, а следовательно, их разность (**) сколь угодно мала.

Обозначим α угол, образуемый нормальной плоскостью поверхности F', проведенной через касательную к кривой γ', и соприкасающейся плоскостью этой кривой, β — угол, образуемый касательной плоскостью F' и касательной плоскостью к цилиндру Z', проектирующему кривую γ' на плоскость xy; ϑ — угол, образуемый касательной кривой γ' с плоскостью xy.

Геодезическая кривизна кривой γ' равна $k' \operatorname{tg} \alpha$. По теореме Гаусса — Бонне в применении к области G' на поверхности F'

$$\omega_{G'} + \int_{\gamma'} k' \operatorname{tg} \alpha\, ds = 2\pi,$$

где $\omega_{G'}$ — интегральная кривизна области G'.

Нормальная кривизна цилиндра Z' в направлении, перпендикулярном к его образующим, равна $k' \cos(\alpha - \beta)/\cos\alpha \cos\vartheta$. Поэтому

$$\int_{\gamma'} \frac{k' \cos(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cos\vartheta} \cos\vartheta\, ds = 2\pi.$$

Отсюда

$$\int_{\gamma'} k' \cos\beta\, ds + \int_{\gamma'} k' \operatorname{tg} \alpha \sin\beta\, ds = 2\pi.$$

При достаточно большом h углы β сколь угодно малы, и так как $k' \operatorname{tg}\alpha \geqslant 0$ и

$$\int_{\gamma} k' \operatorname{tg} \alpha\, ds \leqslant 2\pi,$$

то при достаточно большом h

$$\int_{\gamma} k' \cos\beta\, ds$$

сколь угодно мало отличается от 2π. Наконец, так как при достаточно большом h величины $\cos\beta$ и $(e\xi)$ близки к единице, то значение интеграла

$$\int_{\gamma'} (e\xi)\, k'\, ds$$

также сколь угодно близко к 2π. Аналогично при достаточно большом h устанавливается близость к 2π интеграла

$$\int_{\gamma} (e\xi)\, |k|\, ds.$$

Так как оба рассмотренных интеграла при достаточно большом h сколь угодно близки к 2π, то их разность (**) сколь угодно близка к нулю. Это позволяет из формулы (*), переходя к пределу при $h \to \infty$, получить следующее соотношение:

$$\iint_F \begin{vmatrix} \lambda - \lambda' & \mu - \mu' \\ \mu - \mu' & \nu - \nu' \end{vmatrix} (ne)\, d\sigma = 0. \qquad (***)$$

Ввиду изометрии поверхностей F, F' и неотрицательности гауссовой кривизны $\lambda\nu - \mu^2 = \lambda'\nu' - \mu'^2 \geqslant 0$. Отсюда, как известно, следует, что

$$\begin{vmatrix} \lambda - \lambda' & \mu - \mu' \\ \mu - \mu' & \nu - \nu' \end{vmatrix} \leqslant 0.$$

Так как $(ne) \geqslant 0$ всюду на поверхности F, то подынтегральное выражение в формуле (***) сохраняет знак. Отсюда

$$\begin{vmatrix} \lambda - \lambda' & \mu - \mu' \\ \mu - \mu' & \nu - \nu' \end{vmatrix} (ne) = 0.$$

Пусть в точке X поверхности F гауссова кривизна положительна. При этом точка X эллиптическая, и, следовательно, ее

сферический образ является внутренней точкой. Поэтому $(ne) > 0$. Таким образом, в точке X

$$\begin{vmatrix} \lambda-\lambda' & \mu-\mu' \\ \mu-\mu' & \nu-\nu' \end{vmatrix} = 0.$$

Так как в этой точке $\lambda\nu-\mu^2 > 0$, то $\lambda=\lambda'$, $\mu=\mu'$, $\gamma=\nu'$. Итак, в соответствующих по изометрии точках с положительной гауссовой кривизной совпадают не только первые, но и вторые квадратичные формы поверхностей F и F'. Отсюда заключаем, что соответствующие по изометрии области поверхностей F и F' с положительной гауссовой кривизной конгруэнтны.

Пусть H — связная компонента множества тех точек поверхности F, где гауссова кривизна положительна, и H' — соответствующая по изометрии область на поверхности F'. Совместим поверхности F и F' областями H и H'. Возможность такого совмещения доказана выше. Касательные плоскости вдоль границ областей H и H' огибают развертывающиеся поверхности. Эти поверхности содержат области нулевой кривизны поверхностей F и F', прилегающие к H и H' соответственно. Отсюда следует, что совмещением областей H и H' достигается совмещение смежных областей L и L' нулевой кривизны. Если K и K' — области положительной кривизны, примыкающие к областям L и L', то и они, будучи совмещены на участке общей границы с L и L', тоже оказываются совмещенными. Таким способом последовательное рассмотрение областей положительной и нулевой кривизны приводит в конце концов к заключению о совмещении поверхностей F и F' в целом. Теорема для случая регулярных поверхностей доказана.

Перенесение полученного результата на случай общих выпуклых поверхностей довольно сложно, поэтому мы ограничимся лишь изложением идеи доказательства. Итак, пусть теперь F и F' — общие выпуклые поверхности.

Построим последовательность аналитических поверхностей F_n, сходящуюся к F, и установим какой-нибудь гомеоморфизм F_n и F, обеспечивающий сходимость внутренних метрик F_n к F (если, например, F не вырождается, то в качестве такого гомеоморфизма можно взять проектирование F на F_n из какой-нибудь точки, расположенной внутри F).

Пусть h и H — два числа, из которых первое достаточно велико, а второе гораздо больше первого ($h \ll H$). Отрежем от поверхностей F и F' плоскостью $z=H$ шапки Φ и Φ'. Им соответствуют на поверхности F_n в силу изометрии поверхностей F, F' и гомеоморфизма F на F_n некоторые области. Построим выпуклые оболочки этих областей на F_n и обозначим их $\overline{\Phi}_n$ и $\overline{\Phi}'_n$. (Под выпуклой оболочкой множества M на выпуклой по-

верхности понимают минимальную выпуклую область, содержащую это множество.) Как известно, существуют аналитические шапки Φ_n и Φ_n', изометричные $\bar{\Phi}_n$ и $\bar{\Phi}_n'$ (§ 10 гл. II). Из однозначной определенности выпуклых шапок (теорема 2 § 7) следует, что при $n \to \infty$ поверхности Φ_n и Φ_n' сходятся к поверхностям, равным Φ и Φ' соответственно. Не ограничивая общности, можно считать, что $\Phi_n \to \Phi$, а $\Phi_n' \to \Phi'$.

Отрежем от поверхности Φ_n плоскостью $z=h$ шапку ω_n и обозначим через ω_n' область на Φ_n' соответствующую по изометрии ω_n. Введем для поверхностей ω_n и ω_n' выражение

$$\Omega = \iint\limits_{\omega_n} \begin{vmatrix} \lambda - \lambda' & \mu - \mu' \\ \mu - \mu' & \nu - \nu' \end{vmatrix} (\bar{n}e)\, d\sigma.$$

Подобно тому как в доказательстве теоремы для регулярных поверхностей (см. выше), устанавливается, что при достаточно больших h, H и n выражение Ω сколь угодно мало.

Предположим теперь для простоты изложения, что поверхности F и F' гладкие и существенно выпуклые. Возьмем произвольную точку X_0 на поверхности F и назовем расположение поверхностей F и F' нормальным, если с точкой X_0 совпадает соответствующая по изометрии точка X_0' поверхности F' и совпадают соответствующие по изометрии направления в этих точках (поверхности предполагаются одинаково ориентированными), а общая касательная плоскость поверхностей в точке $X_0 \equiv X_0'$ является плоскостью xy.

Пусть поверхности F и F' находятся в расположении, близком к нормальному. Обозначим через $r(X)$ вектор произвольной точки X поверхности F; $r'(X)$ — вектор соответствующей по изометрии точки поверхности F'; $r_n(X)$ и $r_n'(X)$ — векторы соответствующих точек поверхностей F_n и F_n'. Рассмотрим две поверхности S и S_n, заданные в окрестности точки X_0 векторными уравнениями $\bar{r} = r(X) + r'^*(\bar{X})$, $r = r_n(X) + r_n'^*(X)$, где $r'^*(X)$ и $r_n'^*(X)$ — зеркальные изображения векторов $r'(X)$ и $r_n'(X)$ в плоскости xy. Первая из этих поверхностей гладкая, а вторая аналитическая и имеет всюду неположительную гауссову кривизну (см. доказательство теоремы § 6 гл. II). Абсолютная кривизна поверхности S_n оценивается величиной Ω, и так как последняя сколь угодно мала при больших h и n, то абсолютная кривая S_n при этом также сколь угодно мала.

Возьмем теперь замкнутый контур γ на поверхности S. Пусть $\bar{\gamma}$ — его сферическое изображение, γ_n — соответствующий контур на S_n и $\bar{\gamma}_n$ — его сферическое изображение. Допустим, что

контур $\bar{\gamma}$ охватывает какую-нибудь точку P единичной сферы. Очевидно, при достаточно большом n контур $\bar{\gamma}_n$ также охватывает точку P. Если d — расстояние точки P от $\bar{\gamma}$, то расстояние P от $\bar{\gamma}_n$ при достаточно большом n больше $d/2$. Отсюда следует, что абсолютная кривизна S_n больше площади геодезического круга радиуса $d/2$. Но это невозможно, так как абсолютная кривизна поверхности S_n при достаточно больших h и n сколь угодно мала. Таким образом, контур $\bar{\gamma}$ не может охватывать никакой точки P.

Отсюда следует, что поверхность S развертывающаяся и имеет обычное для развертывающихся поверхностей строение с прямолинейными образующими и стационарной касательной плоскостью вдоль каждой образующей (теорема 1 § 4 гл. IX). Прямолинейной образующей поверхности S соответствуют на поверхностях F и F' конгруэнтные кривые. Из наличия семейства конгруэнтных кривых на изометричных F и F' легко заключаем о конгруэнтности самих поверхностей. Доказательство теоремы в случае общих выпуклых поверхностей без предположения гладкости и строгой выпуклости ведется в том же плане, но гораздо сложнее в деталях.

§ 9. Однозначная определенность бесконечных выпуклых поверхностей с полной кривизной, меньшей 2π

Из теоремы С. П. Оловянишникова (см. § 11 гл. I) о реализации полной метрики бесконечной выпуклой поверхностью, в частности, следует возможность нетривиальных изометрических преобразований (изгибаний) бесконечных выпуклых поверхностей с полной кривизной, меньшей 2π. Именно, имеет место следующая теорема.

Пусть F — бесконечная выпуклая поверхность с полной кривизной $\omega<2\pi$, γ — луч на F. Тогда, если K — произвольная выпуклая коническая поверхность с той же кривизной в вершине, что и F, а t — любая ее образующая, то найдется выпуклая поверхность F^*, изометричная F, одинаково с ней ориентированная и такая, что K будет предельным конусом для F^*, а t — предельной образующей для луча γ^*, где γ^* — образ γ на F^*.

В связи с этой теоремой, естественно, возникает вопрос, в какой мере бесконечная выпуклая поверхность определяется ее метрикой, предельным конусом и предельной образующей для заданного на ней луча. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть F_1 и F_2 — бесконечные, полные, выпуклые, изометричные, с полной кривизной $\omega<2\pi$, одинаково ориен-*

тированные поверхности, имеющие общий предельный конус K, и образующая t этого конуса является предельной образующей для двух соответствующих по изометрии лучей γ_1 и γ_2 поверхностей F_1 и F_2.

Тогда поверхности F_1 и F_2 равны и параллельно расположены, т. е. могут быть совмещены параллельным переносом. Короче: бесконечная выпуклая поверхность с полной кривизной, меньшей 2π, определяется однозначно ее метрикой, ориентацией, предельным конусом и предельной образующей какого-нибудь луча на ней.

Мы ограничимся доказательством этой теоремы для случая гладких поверхностей и гладкого конуса.

Пусть O — вершина конуса K. Построим минимальный круговой конус $\overline{K}$ с вершиной O, содержащий K. Ось построенного так кругового конуса проходит существенно внутри конуса K. Совместим поверхности F_1 и F_2 начальными точками лучей γ_1 и γ_2 с вершиной O конусов K, $\overline{K}$ и отнесем их к прямоугольным декартовым координатам, приняв точку O за начало координат, ось конуса $\overline{K}$ — за ось z, плоскость, ей перпендикулярную, проходящую через точку O, — за плоскость xy; за полупространство $z>0$ примем то из полупространств, определяемых плоскостью xy, в котором лежит конус $\overline{K}$.

Пусть бесконечная выпуклая поверхность F имеет конус K в качестве предельного конуса. Обозначим $s(X)$ расстояние произвольной точки X поверхности F от начала координат O по поверхности, $\rho(X)$ — расстояние между точками X и O в пространстве, $h(X)$ — расстояние точки X от плоскости xy.

Лемма 1. *При $s(X)\to\infty$ величины $h(X)$, $\rho(X)\to\infty$,*

$$\rho(X)/s(X)\to 1,\quad 0<c_1<h(x)/\rho(X)<c_2<1,$$

причем c_1 и c_2 не зависят от X.

Доказательство. Во-первых, покажем, что $h(X)\to\infty$, когда $s(X)\to\infty$. В самом деле, если бы это было неверно, то существовала бы последовательность точек X_k такая, что $s(X_k)\to\infty$, а $h(X_k)<h_0$. Но тогда последовательность точек X_k расположена на шапке, которую отрезает от поверхности F плоскость $z=h_0$. Если d — диаметр основания этой шапки, а h_1 — ее высота, то расстояние между любыми двумя точками шапки, в частности расстояние $s(X_k)$ между точками O и X_k, не больше $d+2h_0$ и, следовательно, ограничено. Мы пришли к противоречию. Итак, $h(X)\to\infty$ при $s(X)\to\infty$. То, что $\rho(X)\to\infty$ при $s(X)\to\infty$, следует из того, что $h(X)\to\infty$ и очевидного неравенства $h(X)<\rho(X)$.

Покажем теперь, что при достаточно большом $s(X)$ можно указать постоянные $c_1>0$ и $c_2<1$ такие, что выполняется

неравенство $c_1 < h(X)/\rho(X) < c_2$. Для этого построим два конуса вращения $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ с вершиной O и осью вращения z так, чтобы конус $\varkappa_1$ содержался внутри конуса K, а конус $\varkappa_2$ охватывал конус $\bar{K}$. Все точки X поверхности F, достаточно удаленные от начала координат O, находятся в области между конусами $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$. Для таких точек поверхности, очевидно, выполняется неравенство $c_1 < h(X)/\rho(X) < c_2$, где $c_1 > 0$ и $c_2 < 1$ — постоянные, зависящие только от углов раствора конусов $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$.

Покажем, что $\rho(X)/s(X) \to 1$ при $s(X) \to \infty$. Для этого сместим отрезок OX в направлении оси z в сторону $z<0$ на расстояние $\lambda h(X)$ $(\lambda > 0)$. Прямолинейные отрезки, которые при этом смещении описывают точки X и O, и отрезок XO в смещенном положении образуют ломаную, соединяющую точки X и O поверхности F (рис. 31). Так как при $n \to \infty$ поверхности $F_n = \frac{1}{n} F$ сходятся к конусу K, то при сколь угодно малом, но фиксированном λ построенная нами ломаная будет расположена вне тела, ограниченного поверхностью F, если только достаточно велико $s(X)$. Применяя к этой ломаной теорему Буземана, приходим к неравенству $s(X) < \rho(X) + 2\lambda h(X)$.

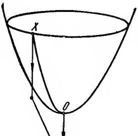

Рис. 31.

Присоединяя к нему очевидное неравенство $\rho(X) \leqslant s(X)$, путем простых преобразований находим $1 > \rho(X)/s(X) > \frac{1}{1+2\lambda c_2}$ при достаточно большом $s(X)$. Но это и выражает собой то, что $\rho(X)/s(X) \to 1$ при $s(X) \to \infty$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть $r(s)$ — вектор точки луча γ, соответствующей дуге s, τ_0 — единичный вектор предельной образующей луча γ. Тогда при $s \to \infty$ отношение $(r(s) - s\tau_0)/s \to 0$.*

Доказательство. Обозначим $\tau(s) = r'(s)$ единичный касательный вектор луча γ в точке, соответствующей дуге s. Тогда по теореме Оловянишникова $\tau(s) \to \tau_0$ при $s \to \infty$. Далее

$$r(s) = \int_0^s \tau(s)\,ds = \int_0^s \tau_0\,ds + \int_0^s (\tau - \tau_0)\,ds = s\tau_0 + s\varepsilon(s),$$

причем $\varepsilon(s) \to 0$, когда $s \to \infty$, так как $\tau(s) \to \tau_0$ при $s \to \infty$. Отсюда получаем $(r(s) - s\tau_0)/s \to 0$ при $s \to \infty$. Лемма 2 доказана.

Параллельным сдвигом совместим поверхности F_1 и F_2 начальными точками лучей γ_1 и γ_2 и введем прямоугольные декар-

товы координаты описанным выше способом. Обозначим $r_1(X)$ вектор произвольной точки X поверхности F_1, $r_2(X)$ — вектор соответствующей по изометрии точки поверхности F_2.

Лемма 3. *Пусть F_1 и F_2 — выпуклые поверхности, удовлетворяющие условиям теоремы 1. Тогда* $(r_1(X) - r_2(X))/s(X) \to 0$, *если* $s(X) \to \infty$.

Доказательство. Если точка X удаляется в бесконечность вдоль луча γ_1, заключение леммы непосредственно следует из леммы 2. Допустим, в общем случае утверждение не верно. Тогда существуют положительное число ε и последовательность точек X_k такие, что $s(X_k) \to \infty$, а

$$|r_1(X_k) - r_2(X_k)| > \varepsilon s(X_k).$$

Проведем через точку X_k плоскость, параллельную плоскости xy. Она пересечет луч γ_1 в точке Y_k. Обозначим Δ_k треугольник на поверхностн F_1, образуемый кратчайшими OX_k, X_kY_k и OY_k. Пусть Δ'_k — треугольник на поверхности F_2, соответствующий по изометрии Δ_k; O, X'_k, Y'_k — вершины этого треугольника.

Подвергнем поверхности F_1 и F_2 преобразованию подобия с центром гомотетни O и коэффициентом подобия $1/s(Y_k)$. Полученные при этом поверхности обозначим F_1^k и F_2^k, треугольники на них, соответствующне Δ_k и Δ'_k, обозначим $\overline{\Delta}_k$ и $\overline{\Delta}'_k$; вершины этих треугольников — O, $\overline{X}_k$, $\overline{Y}_k$ и соответственно O, $\overline{X}'_k$, $\overline{Y}'_k$. При $k \to \infty$ обе последовательности F_1^k и F_2^k сходятся к предельному конусу K поверхностей F_1 и F_2. Не ограничивая общности, можно считать, что последовательности треугольников $\overline{\Delta}_k$ и $\overline{\Delta}'_k$ сходятся. Ибо, если это не так, можно выделить подпоследовательности поверхностей F_1^k и F_2^k с общими номерами, обладающие этим свойством.

В силу леммы 2 последовательностн вершин $\overline{Y}_k$ и $\overline{Y}'_k$ при $k \to \infty$ сходятся к точке $\overline{Y}$ предельной образующей лучей γ_1 и γ_2, находящейся на единичном расстоянии от начала координат O; последовательности вершин $\overline{X}_k$ и $\overline{X}'_k$ сходятся к точкам $\overline{X}$ и $\overline{X}'$ предельного конуса K; последовательности треугольников $\overline{\Delta}_k$ и $\overline{\Delta}'_k$ сходятся к треугольникам $\overline{\Delta}$ и $\overline{\Delta}'$ с вершинами O, $\overline{X}$, $\overline{Y}$ и соответственно O, $\overline{X}'$, $\overline{Y}'$.

Треугольники $\overline{\Delta}$ и $\overline{\Delta}'$ имеют соответственно равные стороны, равные нулю кривизны, и поэтому равны. Так как $|r_1(X_k) - r_2(X_k)| > \varepsilon s(X_k)$, то вершины $\overline{X}$ и $\overline{X}'$ не могут совпадать. Но треугольники $\overline{\Delta}$ и $\overline{\Delta}'$ имеют общую сторону OY и, следовательно, в смысле внутренней геометрни конуса K расположены симметрично относительно предельной образующей лучей γ_1 и γ_2. Это

же противоречит тому, что поверхности F_1 и F_2 одинаково ориентированы. Если треугольник $\overline{\Delta}$ вырождается в отрезок, точка $\overline{X}$ лежит на образующей $O\overline{Y}$, точка $\overline{X}'$, одинаково с $\overline{X}$ удаленная от $\overline{Y}$ и O, на конусе K должна совпадать с $\overline{X}$, а это противоречит предположению. Лемма 3 доказана полностью.

Лемма 4. *Углы между соответствующими по изометрии направлениями на поверхностях F_1 и F_2 в точках X и X', соответствующих по изометрии, сколь угодно малы, если $s(X)$ достаточно велико.*

Доказательство. Допустим, утверждение неверно. Тогда существуют последовательности соответствующих по изометрии точек X_n и X_n' на поверхностях F_1 и F_2 и соответствующих по изометрии направлений на этих поверхностях в точках X_n и X_n' такие, что $s(X_n) \to \infty$, а угол ϑ между направлениями больше $\varepsilon > 0$.

Соединим точку X_n кратчайшей γ_n на F_1 с началом координат O и обозначим t_n полукасательную к γ_n в точке X_n. Пусть при $n \to \infty$ направление OX_n сходится к направлению образующей t предельного конуса K. Тогда $t_n \to t$. Покажем это.

Обозначим F_n поверхность, получаемую из F преобразованием подобия относительно точки O с коэффициентом подобия $1/s(X_n)$. Пусть $\overline{X}_n$ — точка, а $\overline{\gamma}_n$ — кратчайшая на этой поверхности, соответствующие точке X_n и кратчайшей γ_n на F_1. При $n \to \infty$ последовательность точек $\overline{X}_n$ сходится к некоторой точке A на образующей t предельного конуса K; последовательность кратчайших $\overline{\gamma}_n$ сходится к отрезку OA образующей t. Из теоремы 9 § 1 гл. II следует, что полукасательные к кратчайшим $\overline{\gamma}_n$ в точках $\overline{X}_n$ при $n \to \infty$ сходятся к направлению отрезка OA. В силу подобия полукасательные $\overline{t}_n$ сходятся к тому же пределу.

Так как направления отрезков OX_n' сходятся к направлению той же образующей t предельного конуса, то по доказанному в точках X_n и X_n' при достаточно большом n найдутся два направления, образующие сколь угодно малый угол — это направления полукасательных к кратчайшей γ_n в точке X_n и соответствующей по изометрии кратчайшей γ_n' на поверхности F_2 в точке X_n'.

Ввиду гладкости предельного конуса K сходимость направлений OX_n и OX_n' к направлению образующей t влечет за собой сходимость внешних нормалей поверхностей F_1 и F_2 в точках X_n и X_n' к внешней нормали конуса K вдоль образующей t. Близость нормалей и двух соответствующих по изометрии направлений в точках X_n и X_n' влечет за собой близость осталь-

ных соответствующих направлений. Мы пришли к противоречию. Лемма 4 доказана.

Пусть F_1 и F_2 — бесконечные выпуклые поверхности, удовлетворяющие условиям теоремы 1. Вводим в рассмотрение вектор-функцию $r(X)$, заданную на поверхности F_1 равенством

$$r(X) = r_1(X) + r_2^*(X),$$

где $r_1(X)$ — радиус-вектор точки X поверхности F_1, $r_2^*(X)$ — радиус-вектор соответствующей по изометрии точки поверхности F_2^* — зеркального изображения поверхности F_2 в плоскости xy. Обозначим $z(X)$ — расстояние точки $r(X)$ от плоскости xy, $d(X)$ — расстояние ее проекции от начала координат O.

Лемма 5. *При* $s(X) \to \infty$ *отношение* $z(X)/d(X) \to 0$.

Доказательство. Пусть $h_1(X)$, $\rho_1(X)$ и c_2 имеют смысл обозначений леммы 1, $d_1(X)$ — расстояние проекции точки X на плоскость xy от начала координат. Во-первых, заметим, что

$$d(X) > 2d_1(X) - |r_1(X) - r_2(X)|,$$
$$z(X) < |r_1(X) - r_2(X)|, \quad d_1(X) > \rho_1(X) - h_1(X).$$

Далее, согласно лемме 1, если $s(X)$ достаточно велико, то

$$h_1(X)/\rho_1(X) < c_2 < 1,$$

а в силу леммы 2

$$|r_1(X) - r_2(X)| < \varepsilon(X) s(X),$$

причем $\varepsilon(X) \to 0$, когда $s(X) \to \infty$.

Отсюда получаем

$$\frac{z(X)}{d(X)} < \frac{\varepsilon(X)}{2(1-c_2)\frac{\rho_1(X)}{s(X)} - \varepsilon(X)}.$$

Так как $\varepsilon(X) \to 0$, а $\rho_1(X)/s(X) \to 1$ при $s(X) \to \infty$, отсюда следует, что $z(X)/d(X) \to 0$ при $s(X) \to \infty$. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Пусть G_0 — область точек на поверхности F_1, для которых $s(X) > s_0$. Вектор-функция $\bar{r}(X)$, заданная в области G_0 равенством $\bar{r}(X) = r_1(X) + r_2(X)$, при достаточно большом s_0 задает двумерное многообразие $\bar{r}(G_0)$, однозначно проектирующееся на плоскость xy.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что если при как угодно больших s_0 множество $\bar{r}(G_0)$ не является многообразием или является многообразием, не однозначно проектирующимся на плоскость xy, то существует последовательность пар точек X_k и Y_k, $X_k \neq Y_k$, на поверхности, удаляющихся в бесконечность, причем точки $\bar{r}(X_k)$ и $\bar{r}(Y_k)$ проектируются в одну и ту же точку плоскости xy. Покажем, что это невозможно. Из последовательности пар точек X_k и Y_k можно выбрать бесконечную подпоследовательность так, чтобы для всех пар точек этой

подпоследовательности было либо $s(X_k) \leqslant s(Y_k)$, либо $s(X_k) \geqslant s(Y_k)$. Пусть, например, выполняется первое неравенство для всех пар точек исходной последовательности, что, очевидно, не ограничивает общности.

Построим, так же как в лемме 3, последовательности поверхностей $F_1^k = \frac{1}{s(Y_k)} F_1$ и $F_2^k = \frac{1}{s(Y_k)} F_2$. Обе эти последовательности сходятся к предельному конусу K поверхностей F_1 и F_2. Не ограничивая общности, можно считать, что последовательности точек $\overline{X}_k$, $\overline{Y}_k$ и $\overline{X}'_k$, $\overline{Y}'_k$, соответствующие X_k и Y_k в силу изометрии и подобия на поверхностях F_1^k и F_2^k, сходятся. Пусть $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{X}'$, $\overline{Y}'$ — предельные точки этих последовательностей. В силу леммы 3 $\overline{X} = \overline{X}'$, $\overline{Y} = \overline{Y}'$. Далее, так как при каждом k точки $\bar{r}(X_k)$ и $\bar{r}(Y_k)$ лежат на одной вертикальной прямой (параллельной оси z), то $\overline{X} = \overline{Y}$. Заметим, кроме того, что $\overline{Y}$ находится на единичном расстоянии от вершины конуса K, а следовательно, является гладкой его точкой.

Принимая во внимание специальный выбор осей координат, заключаем, что существует число $\delta > 0$ такое, что проекция любого единичного отрезка, касающегося поверхности в любой ее точке, больше δ. Соединим точки $\overline{X}_k$ и $\overline{Y}_k$ поверхности F_1^k кратчайшей $\bar{\gamma}_k$, а точки $\overline{X}'_k$ и $\overline{Y}'_k$ на поверхности F_2^k соответствующей по изометрии кратчайшей $\bar{\gamma}'_k$. Пусть $\bar{\tau}'_k$ и $\bar{\tau}'_k$— единичные касательные векторы кратчайших $\tilde{\bar{\gamma}}_k$ и $\tilde{\bar{\gamma}}'_k$ в соответствующих по изометрии точках. Обозначая $\tilde{\bar{r}}_{1k}$ и $\tilde{\bar{r}}_{2k}$ векторы соответствующих по изометрии точек поверхностей F_1^k и F_2^k, будем иметь:

$$\tilde{\bar{r}}_{1k}(\overline{Y}_k) - \tilde{\bar{r}}_{1k}(\overline{X}_k) = \int\limits_{\bar{\gamma}_k} \bar{\tau}_k \, ds, \quad \tilde{\bar{r}}_{2k}(\overline{Y}_k) - \tilde{\bar{r}}_{2k}(\overline{X}_k) = \int\limits_{\bar{\gamma}'_k} \bar{\tau}'_k \, ds.$$

Так как точки $\bar{r}(X_k)$ и $\bar{r}(Y_k)$ лежат на одной вертикальной прямой, то проекция вектора

$$\overline{m}_k = (\tilde{\bar{r}}_{1k}(Y_k) + \tilde{\bar{r}}_{2k}(Y_k)) - (\tilde{\bar{r}}_{1k}(X_k) - \tilde{\bar{r}}_{2k}(Y_k)) = \int\limits_{\bar{\gamma}_k} \bar{\tau}_k \, ds + \int\limits_{\bar{\gamma}'_k} \bar{\tau}' \, ds$$

на плоскость xy должна быть равна нулю при каждом k. Однако это невозможно при достаточно большом k. Действительно,

$$\overline{m}_k = (\bar{\tau}_k(\overline{X}_k) + \bar{\tau}'_k(\overline{X}_k)) \bar{s}_k + \int\limits_{\bar{\gamma}_k} (\bar{\tau}_k - \bar{\tau}_k(\overline{X}_k)) \, ds + \int\limits_{\bar{\gamma}'_k} (\bar{\tau}'_k - \bar{\tau}'_k(\overline{X}_k)) \, ds,$$

где $\bar{\tau}_k(X_k)$ и $\bar{\tau}'_k(X_k)$ — единичные касательные векторы кратчайших $\bar{\gamma}_k$ и $\bar{\gamma}'_k$ в точках $\bar{X}_k$ и $\bar{X}'_k$ соответственно, $\bar{s}_k$ — длина кратчайшей $\bar{\gamma}_k$. При достаточно большом k в силу леммы 4

$$|\bar{\tau}_k(\bar{X}_k) - \bar{\tau}'_k(\bar{X}_k)| < \delta/3;$$

в силу теоремы § 1 гл. II

$$|\bar{\tau}_k - \bar{\tau}_k(\bar{X}_k)| < \delta/3 \quad \text{и} \quad |\bar{\tau}'_k - \bar{\tau}'_k(\bar{X}_k)| < \delta/3.$$

Представляя теперь вектор $\bar{m}_k$ в виде

$$\bar{m}_k = 2\bar{\tau}_k(\bar{X}_k)\bar{s}_k + (\bar{\tau}'_k(\bar{X}_k) - \bar{\tau}_k(\bar{X}_k))s_k + \\ + \int\limits_{\bar{\gamma}_k} (\bar{\tau}_k - \bar{\tau}_k(\bar{X}_k))\,ds + \int\limits_{\bar{\gamma}'_k} (\bar{\tau}'_k - \bar{\tau}'_k(\bar{X}_k))\,ds$$

и принимая во внимание, что вектор $2\tau_k(\bar{X}_k)$ проектируется на плоскость xy в отрезок длины не меньше 2δ, заключаем, что проекция вектора $\bar{m}_k$ на эту же плоскость есть отрезок длины, большей $\delta\bar{s}_k$. Мы пришли к противоречию, так как по предположению вектор $\bar{m}_k$ перпендикулярен плоскости xy. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Пусть G_0 — область на поверхности F_1, определяемая леммой 6. Тогда вектор-функция $r(X)$, заданная в области G_0 равенством $r(X) = r_1(X) + r_2{}^*(X)$, задает гладкое двумерное многообразие F_0, однозначно проектирующееся на плоскость xy. Касательные плоскости многообразия образуют с плоскостью xy равномерно малый угол, если достаточно велико число s_0. Многообразие F_0 не является частью плоскости, как бы ни было велико s_0, если поверхности F_1 и F_2 не равны.*

Доказательство. То, что F_0 является многообразием, однозначно проектирующимся на плоскость xy, следует из леммы 6. Многообразие F_0 является гладким, так как поверхности F_1 и F_2 являются гладкими. Касательные плоскости многообразия F_0 образуют с плоскостью xy малые углы, потому что соответствующие по изометрии направления на поверхности F_1 в области G_0 и на поверхности F_2 в соответствующей области G'_0 близки, а с плоскостью xy образуют углы меньше $\pi/2$. Докажем, что многообразие F_0 не является частью плоскости.

Допустим, что многообразие F_0 является плоскостью, следовательно, плоскостью, параллельной плоскости xy. Тогда соответствующим сдвигом одной из поверхностей в направлении оси z можно добиться того, что при достаточно большом $s(X)$ z-координаты соответствующих точек поверхностей F_1 и F_2 будут удовлетворять условию $z_1(X) = z_2(X)$. А отсюда по теореме 2 § 7 следует равенство поверхностей F_1 и F_2. Лемма 7 доказана.

Доказательство теоремы 1. Проведем плоскость π, достаточно удаленную от начала координат O и перпендикулярную плоскости xy. Она пересекает многообразие F_0 по гладкой уходящей в бесконечность в обе стороны кривой γ. Эта кривая однозначно проектируется на плоскость xy, а ее касательные образуют равномерно малые углы с плоскостью xy. В силу леммы 7 можно считать, что γ не является прямой. Действительно, если каждая достаточно удаленная плоскость, перпендикулярная плоскости xy, пересекает многообразие F_0 по прямой, а следовательно, по прямой, параллельной плоскости xy (лемма 5), то многообразие F_0 при достаточно большом s_0 является частью горизонтальной плоскости, что противоречит лемме 7. Отметим на кривой γ точку P, которая проектируется в ближайшую к началу координат точку плоскости xy. Из леммы 5 следует, что в плоскости π можно провести прямую g через точку P, образующую сколь угодно малый, отличный от нуля угол с плоскостью xy, пересекающую кривую γ не меньше чем в двух точках и нигде не касающуюся этой кривой. Проведем через прямую g плоскость σ, не перпендикулярную плоскости xy. Если на поверхности F_1 существует конечная связная область G такая, что каждая точка $r(X)$, когда $X \in G$, лежит с одной стороны плоскости σ, и лежит в плоскости σ, когда X принадлежит границе области G, мы скажем, что плоскость σ отрезает горбушку.

Покажем, что многообразие F_0 не допускает отрезания горбушек. Действительно, изометричные выпуклые поверхности F_1 и F_2 в любой заданной конечной области допускают одновременное приближение изометричными аналитическими поверхностями F_1' и F_2' с положительной гауссовой кривизной (теорема 4 § 6). Многообразие F_0', построенное для поверхностей F_1' и F_2' так же, как и многообразие F_0, тоже допускает отрезание горбушки, если поверхности F_1' и F_2' достаточно близки к F_1 и F_2. Однако, как мы сейчас покажем, многообразие F_0' имеет неположительную кривизну, и, следовательно, не допускает отрезания горбушек.

Вектор-функция $r_1'(X)$, задающая поверхность F_1', допускает следующее представление в окрестности точки X_0:

$$r_1'(X) = r_1'(X_0) + \tau_1' s' + \frac{k_1 n_1}{2} s'^2 + \varepsilon_1 s'^2,$$

где s' — длина кратчайшей γ_1', соединяющей точку X и X_0, τ_1' — единичный касательный вектор к этой кратчайшей в точке X_0, n_1 — единичный вектор нормали поверхности в точке X_0, k_1 — нормальная кривизна поверхности F_0' в точке X_0 в направлении τ_1',

а ε_1 мало вместе с s'. Вектор-функция $r_2'(X)$, задающая поверхность F_2', допускает аналогичное представление. Отсюда для вектор-функции $r'(X)$, задающей многообразие F_0', получаем

$$r'(X) - r'(X_0) = (\tau_1' + \tau_2'^*) s' + \frac{1}{2} s'^2 (k_1 n_1 + k_2 n_2^*) + \varepsilon s'^2.$$

Обозначим через n единичный вектор нормали к многообразию F_0'. Тогда

$$(r'(X) - r'(X_0))\, n = \frac{s'^2}{2} (k_1 n_1 n + k_2 n_2^* n) + \bar{\varepsilon} s'^2.$$

Как показано в § 6 гл. II, $n_1 n = -n_2^* n \neq 0$. Отсюда

$$(r'(X) - r'(X_0))\, n = c s'^2 (k_1 - k_2) + \bar{\varepsilon} s'^2.$$

Ввиду изометрии поверхностей F_1' и F_2' разность $k_1 - k_2$ либо меняет знак при обходе точки X около точки X_0, либо тождественно равна нулю. Следовательно, многообразие F_0' имеет неположительную гауссову кривизну. Невозможность отрезания горбушек от многообразия F_0 доказана.

Пусть $\bar{A}_1$ и $\bar{B}_1$ — две рядом стоящие точки пересечения прямой g с кривой γ, которая получается в сечении многообразия F_0 плоскостью π. Отметим какую-нибудь точку $\bar{C}$ на кривой γ между $\bar{A}_1$ и $\bar{B}_1$. Пусть эта точка лежит, например, ниже прямой g, а следовательно, ниже плоскости σ, как бы эта плоскость ни была проведена через прямую g. Отметим далее на кривой γ точки $\bar{A}$ и $\bar{B}$, близкие $\bar{A}_1$ и $\bar{B}_1$ соответственно и лежащие над прямой g, а значит, и над плоскостью σ. Пусть A, B, C — точки на поверхности F_1 такие, что $r(A) = \bar{A}$, $r(B) = \bar{B}$, $r(C) = \bar{C}$. Обозначим G_A, G_B, G_C максимальные связные области на поверхности F_1, содержащие точки A, B, C соответственно, такие, что каждое из множеств $r(G_A)$, $r(G_B)$, $r(G_C)$ располагается по одну сторону плоскости σ. Каждая из областей G_A, G_B, G_C бесконечна, ибо в противном случае плоскость σ отрезала бы горбушку, что невозможно.

Если G_A и G_B имеют общую точку, то они совпадают. Покажем, что существует плоскость σ, проходящая через прямую g, такая, что множества G_A и G_B не имеют общих точек. Допустим обратное, т. е. что, какова бы ни была плоскость σ, проходящая через прямую g, множества G_A и G_B совпадают и, следовательно, точки A и B можно соединить кривой $\varkappa$ на поверхности F_1, образ которой $r(\varkappa)$ лежит над плоскостью σ. Если $\varkappa_1$ — другая кривая, обладающая этим свойством, то ее можно непрерывно перевести в кривую $\varkappa$, не выходя за пределы области $G_A \equiv G_B$. В самом деле, в противном случае замкнутая

кривая $\varkappa+\varkappa_1$ (или ее часть) ограничивала бы некоторую конечную область G. Ее образ $r(G)$ разбивался бы плоскостью σ так, что образ края оказался бы по одну сторону этой плоскости. Это значило бы, что плоскость σ отрезает горбушку, но это невозможно.

Можно считать, что кривая $\varkappa$ расположена в ограниченной части поверхности F_1 при любом положении плоскости σ. Действительно, для плоскостей σ, образующих с плоскостью π малые углы, это ясно. Допустим, что существует последовательность плоскостей σ_k, для которых точки A и B можно соединить кривыми $\varkappa_k$, причем кривые $\varkappa_k$ нельзя провести в ограниченной части поверхности F_1 (ограниченной для всех k одновременно). Из последовательности плоскостей σ_k можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Пусть ее предел — плоскость σ_0. Очевидно, $\sigma_0\neq\pi$. В случае плоскости σ_0 точки A и B можно соединить кривой $\varkappa_0$, которая лежит в конечной части поверхности F_1 по предположению, так как $G_A\equiv G_B$ для любой плоскости σ. Если k велико, плоскость σ_k близка σ_0; кривая $r(\varkappa_0)$ расположена над плоскостью σ_0, а поэтому также над плоскостью σ_k при достаточной близости последней к σ_0. Мы пришли к противоречию. Итак, если при любом положении плоскости σ область $G_A\equiv G_B$, то можно считать, что кривая $\varkappa$, соединяющая точки A и B на F, образ которой $r(\varkappa)$ находится над плоскостью σ, расположена в ограниченной части поверхности F_1 (ограниченной для всех σ одновременно).

Удалим из поверхности F_1 точку C; полученную при этом область на поверхности F_1 обозначим $\bar F_1$. Очевидно, области G_A и G_B принадлежат $\bar F_1$. Кривая $\varkappa$, расположенная в области $G_A\equiv G_B$, проходит в области $\bar F_1$. Мы показали, что если точки A и B соединены двумя путями в области $G_A\equiv G_B$, то эти пути гомотопны в ней. Поэтому они гомотопны и в $\bar F_1$. Поставим в соответствие каждой плоскости σ, проходящей через прямую g, путь $\varkappa_\sigma$, соединяющий точки A и B в $G_A\equiv G_B$ и расположенный в конечной части поверхности F_1, существование которой нами доказано. В области $\bar F_1$ не все пути $\varkappa_\sigma$ гомотопны. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим две плоскости σ_1 и σ_2, которые получаются из плоскости π поворотом около прямой g в одну и другую сторону на малые углы. Соответствующие им пути $\varkappa_{\sigma_1}$ и $\varkappa_{\sigma_2}$ не гомотопны. Отсюда следует, что существует плоскость σ такая, что найдутся плоскости σ', как угодно близкие σ (т. е. образующие с ней сколь угодно малые углы), для которых пути $\varkappa_{\sigma'}$ не гомотопны $\varkappa_\sigma$ в области $\bar F_1$. Но тогда контур $\varkappa_{\sigma'}+\varkappa_\sigma$ охватывает точку C, и в силу равномерной ограниченности контуров $\varkappa_\sigma$ и $\varkappa_{\sigma'}$ и малости угла, образуемого плоскостями σ и σ', параллельным сдвигом плоскости σ можно добиться того, что контур $\varkappa_{\sigma'}+\varkappa_\sigma$ будет весь над плоскостью σ,

а точка $\bar{C}=r(C)$ будет под этой плоскостью. Но это значит, что построенная так плоскость отрезает горбушку. Мы пришли к противоречию. Итак, существует плоскость σ, проходящая через прямую g, такая, что множества G_A и G_B не имеют общих точек.

Прямая g по условию не параллельна плоскости xy, поэтому, двигаясь вдоль нее в одном из направлений, мы неограниченно удаляемся от плоскости xy в сторону $z<0$. В силу леммы 5 некоторая полупрямая g_1 прямой g находится под многообразием F_0. Повернем эту полупрямую около начальной ее точки в плоскости σ на малый угол в обе стороны, так, чтобы описанный полупрямой g_1 угол V_1 в плоскости σ был весь под многообразием F_0. Обозначим $\bar{V}_1$ прообраз множества точек многообразия F_0, на поверхности F_1, лежащих над углом V_1. В силу леммы 5 некоторая полупрямая g_2 прямой g находится над многообразием F_0. Повернув эту полупрямую на малые углы в обе стороны, получим угол V_2 в плоскости σ, лежащий над многообразием F_0. Так как множество $\bar{V}_1$ связно, пересечение его с одним из множеств G_A или G_B пусто. Пусть, например, $\bar{V}_1 \cap G_A=0$. При этом образ $r(G_A)$ области G_A расположен над областью $\bar{\sigma}$ плоскости σ, которая получается из σ удалением углов V_1 и V_2. Так как область G_A бесконечна, то $r(G_A)$ тоже бесконечна. Проведем достаточно удаленную от начала координат плоскость π', параллельную плоскости π и пересекающую $r(G_A)$. Пересечение $r(G_A)$ с плоскостью π' есть либо одна кривая, лежащая над плоскостью σ, концами упирающаяся в эту плоскость, либо несколько или даже бесконечно много таких кривых. Обозначим через $\tilde{\gamma}$ одну из таких кривых. К кривой $\tilde{\gamma}$ в некоторой точке P можно провести касательную, параллельную прямой g. В точке P касательная плоскость многообразия F_0 образует с плоскостью xy угол не меньший, чем угол, образуемый прямой g с плоскостью xy. Но это невозможно в силу леммы 6, если плоскость π' достаточно удалена от начала координат. Итак, допустив, что поверхности F_1 и F_2 не равны, мы пришли к противоречию. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть для поверхностей F_1 и F_2 выполняются все условия теоремы 1, кроме равенства предельных конусов, которые теперь будем предполагать гладкими, но различными. Тогда существует непрерывное изгибание поверхности F_1 в поверхность F_2.*

Доказательство. Очевидно, достаточно показать, что каждую из поверхностей F_1 и F_2 можно изогнуть в поверхность с круговым предельным конусом. Построим такое изгибание, например, для поверхности F_1. Введем прямоугольные декартовы координаты так, чтобы начало O было в вершине

конуса K_1 — предельного конуса поверхностн V_1, положнтельная полуось z проходнла внутри конуса K_1, весь конус был в полупространстве $z>0$. Проведем плоскость $z=1$. Она пересечет конус K_1 по выпуклой крнвой $\varkappa_1$. Построим *параллельную* ей кривую на расстояннн λ от нее, а затем эту кривую уменьшим подобно так, чтобы конус с вершиной O, проведенный через эту кривую, имел ту же кривизну, что н K_1. Обозначнм этот конус $K_{1\lambda}$. Отметнм на каждом конусе $K_{1\lambda}$ образующую, которая получается в сечении конуса $K_{1\lambda}$ полуплоскостью, выходящей из оси z н содержащей предельную образующую луча γ_1. Так отмеченную образующую на конусе $K_{1\lambda}$ обозначим $t_{1\lambda}$.

По теореме Оловяннншннкова существует поверхность $F_{1\lambda}$, изометрнчная F_1, однинаково с ней орнентированная, имеющая конус $K_{1\lambda}$ в качестве предельного конуса, его образующую $t_{1\lambda}$ как предельную образующую луча $\gamma_{1\lambda}$, соответствующего по нзометрин γ_1, точку O как начальную точку луча $\gamma_{1\lambda}$.

В снлу теоремы 1 поверхность $F_{1\lambda}$ изменяется непрерывно при непрерывном измененни λ н переходит от поверхности F_1 к поверхностн с круговым предельным конусом. Теорема 2 доказана.

Глава IV

Бесконечно малые изгибания выпуклых поверхностей

Бесконечно малым изгибанием называется такая бесконечно малая деформация поверхности, при которой длины кривых на поверхности стационарны. Поле скоростей деформации называется изгибающим полем. Изгибающее поле называется тривиальным, если оно является полем скоростей движения поверхности как твердого тела. Если поверхность не допускает иных бесконечно малых изгибаний, кроме тривиальных, то она называется *жесткой*. Проблема бесконечно малых изгибаний для выпуклых поверхностей включает:

1. Доказательство существования бесконечно малых изгибаний при заданной деформации края.

2. Доказательство единственности изгибающих полей, в частности доказательство теорем о жесткости поверхностей.

3. Доказательство регулярности изгибающих полей регулярных поверхностей.

Проблема бесконечно малых изгибаний интересовала многих известных геометров. В частности, Бляшке [22] доказал, что замкнутая регулярная выпуклая поверхность с положительной гауссовой кривизной не допускает иных регулярных бесконечно малых изгибаний, кроме тривиальных.

В связи с общей задачей построения теории нерегулярных выпуклых поверхностей естественно возникла проблема бесконечно малых изгибаний для таких поверхностей. Первая относящаяся сюда работа принадлежит А. Д. Александрову [12], который нашел необходимые и достаточные условия того, чтобы заданное на общей выпуклой поверхности векторное поле было изгибающим.

Отправляясь от этого результата, автор решил в достаточно полном объеме проблему бесконечно малых изгибаний общих выпуклых поверхностей [61]. В частности, им доказаны общие теоремы о существовании бесконечно малых изгибаний при заданной деформации края поверхности. Доказаны соответствующие теоремы единственности для изгибающих полей (в частности, теоремы о жесткости). Установлена степень регулярности изгибающего поля в зависимости от регулярности поверхности. Изложение всех этих результатов содержится в настоящей главе.

Полное решение проблемы о жесткости общих выпуклых поверхностей позволяет дать новое решение проблемы однозначной определенности. Такое решение для случая замкнутых выпуклых поверхностей намечено в конце главы.

§ 1. Изгибающие поля общих выпуклых поверхностей

В этом параграфе хорошо известное понятие бесконечно малого изгибания для регулярных поверхностей мы распространим, следуя А. Д. Александрову, на общие выпуклые поверхности и докажем теорему А. Д. Александрова, полностью характеризующую изгибающие поля на таких поверхностях.

Пусть F — регулярная поверхность и

$$r=r(u,\ v)\qquad (r_u\times r_v\neq 0)$$

— какая-нибудь ее гладкая параметризация. Пусть $\tau(u,\ v)$ — гладкое векторное поле на этой поверхности ($\tau(u,\ v)$ имеет непрерывные производные по $u,\ v$). Рассмотрим деформацию поверхности F, при которой она к моменту t переходит в поверхность F_t, задаваемую уравнением

$$r=r(u,\ v)+t\tau(u,\ v).$$

Этим уравнением действительно задается некоторая поверхность при достаточно малом t, так как $r_u\times r_v\neq 0$.

Возьмем на поверхности F какую-нибудь гладкую кривую γ. Если принять в качестве параметра вдоль этой кривой ее дугу s, то на поверхности она задается уравнениями

$$u=u(s),\qquad v=v(s)\qquad \left(u'^2+v'^2\neq 0\right),$$

а в пространстве — уравнением

$$r=r(u(s),\ v(s))\qquad \left(r_s'^2=1\right).$$

При указанной деформации поверхности F она переходит в гладкую кривую γ_t поверхности F_t, задаваемую уравнением

$$r=r(u(s),\ v(s))+t\tau(u(s),\ v(s)).$$

Обозначим $l_\gamma(t)$ длину этой кривой. По известной формуле она имеет следующее выражение:

$$l_\gamma(t)=\int\limits_0^{l_\gamma}\left(1+2tr'\tau'+t^2\tau'^2\right)^{1/2}ds.$$

Очевидно, при $t=0$ для любой гладкой кривой γ функция $l_\gamma(t)$

дифференцируема и

$$\frac{dl_\gamma(t)}{dt} = \int_0^{l_\gamma} r'\tau'\, ds.$$

Вышеизложенное позволяет определить *бесконечно малое изгибание* как такую деформацию рассматриваемого вида, при которой длины всех кривых γ на поверхности F в начальный момент деформации стационарны, т. е. для любой кривой γ при $t=0$

$$\frac{dl_\gamma(t)}{dt} = 0.$$

Векторное поле τ, определяющее указанным образом бесконечно малое изгибание поверхности, называется *изгибающим полем.*

Выведем условие, при котором заданное на поверхности векторное поле $\tau(u, v)$ будет изгибающим. По определению, в случае изгибающего поля $dl_\gamma(t)/dt=0$ при $t=0$ для любой гладкой кривой γ. Так как любой отрезок кривой γ тоже является гладкой кривой, то это значит, что при интегрировании по кривой до любого s

$$\int_0^{s} r'\tau'\, ds = 0.$$

А это значит, что вдоль кривой γ должно быть $r'\tau'=0$, или, что то же,

$$(r_u\tau_u)u'^2 + (r_u\tau_v + r_v\tau_u)u'v' + (r_v\tau_v)v'^2 = 0.$$

Так как гладкую кривую γ можно провести через любую точку (u, v) поверхности и в любом направлении $u' : v'$, то для изгибающего поля $\tau(u, v)$ на всей поверхности должны выполняться условия

$$r_u\tau_u = 0, \qquad r_u\tau_v + r_v\tau_u = 0, \qquad r_v\tau_v = 0. \qquad (*)$$

Обратное также верно. Именно, если для гладкого поля τ на гладкой поверхности F выполняются условия $(*)$, то оно является изгибающим. Для доказательства достаточно заметить, что подынтегральная функция $r'\tau'$ выражения $dl_\gamma(t)/dt$ обращается в нуль в силу условий $(*)$ и, следовательно, $dl_\gamma(t)/dt=0$ при $t=0$.

Теперь введенное нами понятие бесконечно малого изгибания для гладких поверхностей распространим на общие выпуклые поверхности. Но прежде чем к этому приступить, расширим несколько понятие кривой и поверхности. Под кривой будем понимать образ отрезка при непрерывном отображении

в пространство, а под поверхностью — непрерывный образ любого двумерного многообразня.

Как известно, кривая н поверхность, определяемые таким образом, могут быть очень далеки от привычных представлений о кривой и поверхностн. Например, крнвая может сплошь заполнять область пространства, а поверхность может вырождаться в крнвую.

Пусть $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — непрерывные функции, заданные на отрезке g: $a \leqslant t \leqslant b$. Тогда отображение отрезка g в пространство, при котором с его точкой (t) сопоставляется точка пространства с декартовыми координатамн $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, определяет кривую в смысле данного определения. И обратно, любая кривая аналитически может быть задана такими уравнениями. Систему равенств

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t)$$

мы будем называть уравненнямн кривой.

Мы будем говорить, что кривая γ_1, являющаяся образом отрезка g_1 при непрерывном отображении f_1, совпадает с кривой γ_2, являющейся образом отрезка g_2 при непрерывном отображении f_2, еслн существует топологическое соответствие между точками отрезков g_1 и g_2 такое, что образы соответствующих точек этих отрезков при отображениях f_1 и f_2 соответственно совпадают. Отсюда следует, что все параметризации кривой получаются из одной путем монотонного преобразования параметра.

Для крнвых мы вводим понятне спрямляемости и понятие длины крнвой. Пусть кривая γ является непрерывным образом отрезка g. Ломаную Γ мы будем называть *правильно вписанной* в крнвую γ, еслн ее последовательные вершины являются образамн точек отрезка g, следующнх от одного конца к другому. Очевндно, свойство ломаной быть правильно вписанной в кривую не завнсит от выбранной параметризации кривой. Кривую мы будем называть *спрямляемой*, еслн длины правильно вписанных в нее ломаных огранnчены в совокупности, и точную верхнюю грань длин этих ломаных будем называть длиной кривой.

Определим теперь понятне бесконечно малого изгибания общей выпуклой поверхностн. Итак, пусть F — выпуклая поверхность н τ — заданное на ней непрерывное векторное поле. Пусть x — пронзвольная точка поверхности, $r(x)$ — вектор этой точки и $\tau(x)$ — вектор заданного поля. Рассмотрим деформацию поверхности F, при которой она к моменту t переходит в поверхность F_t, заданную уравнением

$$r=r(x)+t\tau(x) \qquad (x \in F).$$

Пусть γ — пронзвольная спрямляемая кривая на поверхности F. При указанной деформацнн она переходит в некоторую

кривую γ_t на поверхности F_t. Пусть при достаточно малых значениях $|t|$ кривая γ_t также спрямляема. Обозначим l_γ длину кривой γ, и $l_\gamma(t)$ — длину кривой γ_t при достаточно малых $|t|$. Положим

$$l_\gamma(t)=l_\gamma+t\varepsilon_\gamma(t).$$

Описанную деформацию поверхности F в F_t мы будем называть *бесконечно малым изгибанием*, если для любой спрямляемой кривой γ величина $\varepsilon_\gamma(t)\to 0$ при $t\to 0$. Векторное поле τ мы будем называть *изгибающим полем*.

На первый взгляд может показаться, что исследоваиие бесконечно малых изгибаний общих выпуклых поверхиостей, определяемых указанным образом, — дело совершенно безнадежиое из-за общности поверхности и изгибающего поля, которое априори не подчиняются никаким условиям гладкости. В действительности это не так. А. Д. Александров [12] доказал, что изгибающее поле самой общей выпуклой поверхности удовлетворяет условию Липшица в любой компактной области на поверхности, причем выполняются почти всюду уравнения (*). Ввиду важности этой теоремы для дальнейшего изложения мы приведем здесь ее доказательство.

Прежде чем приступить к исследованию дифференциальиых свойств изгибающего поля, сделаем несколько замечаний, относящихся к выпуклым поверхностям и спрямляемым кривым на таких поверхностях.

Пусть F — выпуклая поверхность и K — тело, на границе которого она находится. Возьмем на поверхности произвольную точку P и точку Q внутри тела K. Тогда достаточно малая окрестность ω точки P поверхности F одиозначно проектируется в направлении PQ. И если ввести прямоугольные декартовы координаты x, y, z в простраистве, прииияв прямую PQ за ось z, то окрестность P поверхности F может быть задана уравнеиием

$$z=\varphi(x,\ y),$$

где $\varphi(x, y)$ — выпуклая функция.

Если окрестиость ω взять достаточно малой, то, очевидио, иайдется такое $\vartheta_0<\pi/2$, что все опорные плоскости F в точках ω будут образовывать с плоскостью xy углы меиьше ϑ_0. При таком выборе окрестности ω в каждой точке области $\bar{\omega}$ — проекции ω иа плоскость xy — производная φ, как известио, существующая в каждой точке по любому иаправлеиию, ограничеиа постоянной $k=\operatorname{tg}\vartheta_0$.

Пусть теперь γ — кривая, заданная уравиениями

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t)\qquad (a\leqslant t\leqslant b).$$

Как известно, для того чтобы кривая γ была спрямляемой, необходимо и достаточно, чтобы каждая из трех функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ была ограниченной вариации.

Пусть кривая γ лежит на выпуклой поверхности ω. Тогда, если она спрямляема, то ее проекция $\bar{\gamma}$ на плоскость xy, очевидно, спрямляема. Покажем, что и, обратно, спрямляемость $\bar{\gamma}$ влечет за собой спрямляемость γ.

Впишем в кривую γ произвольную ломаную Γ. Ее проекция $\bar{\Gamma}$ представляет собой ломаную, вписанную в $\bar{\gamma}$. Сопоставим длины соответствующих при проектировании звеньев δ и $\bar{\delta}$ этих ломаных. Пусть $\tilde{\delta}$ — длина выпуклой кривой на поверхности ω, которая проектируется в отрезок $\bar{\delta}$. Имеем очевидное неравенство $\bar{\delta} \leqslant \delta \leqslant \tilde{\delta}$. И так как

$$\tilde{\delta} = \int\limits_{(\bar{\delta})} \sqrt{1 + z_{\bar{\delta}}'^2}\, d\bar{\delta},$$

а $\left|z_{\bar{\delta}}'\right| \leqslant k$, то

$$\delta \leqslant \tilde{\delta} \leqslant \sqrt{1+k^2}\,\bar{\delta}.$$

Следовательно, длины ломаных Γ и $\bar{\Gamma}$ связаны неравенством

$$l_\Gamma \leqslant \sqrt{1+k^2}\, l_{\bar{\Gamma}}$$

и спрямляемость $\bar{\gamma}$ влечет за собой спрямляемость γ.

Пусть проекция $\bar{\omega}$ поверхности ω на плоскость xy является выпуклой областью. Пусть на поверхности ω задана функция $\psi(X)$ точки поверхности. Так как положение точки на поверхности вполне характеризуется ее координатами x и y, то можно считать также, что эта функция задана в области $\bar{\omega}$ плоскости xy. Утверждаем, что если функция $\psi(X)$ удовлетворяет условию Липшица на поверхности, то функция $\psi(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица в области $\bar{\omega}$ плоскости xy, и обратно.

Чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что для расстояния $\rho(X, Y)$ между любыми двумя точками X и Y на поверхности и расстояния $\rho(\bar{X}, \bar{Y})$ между их проекциями на плоскость xy имеют место неравенства

$$\rho(\bar{X}, \bar{Y}) \leqslant c_1\rho(X, Y), \quad \rho(X, Y) \leqslant c_2\rho(\bar{X}, \bar{Y}),$$

где постоянные c_1 и c_2 не зависят от выбора точек X и Y.

Усмотреть существование постоянных c_1 и c_2 нетрудно. Действительно, расстояние между точками X и Y на поверхности не меньше пространственного расстояния между этими точками, а это последнее не меньше расстояния между точками $\bar{X}$ и $\bar{Y}$.

Отсюда

$$\rho(\overline{X},\ \overline{Y}) \leqslant \rho(X,\ Y).$$

Далее, расстояние между точками X и Y на поверхности не больше длины выпуклой кривой, проектирующейся в отрезок $\overline{X}\overline{Y}$ плоскости xy. А она, как показывают предыдущие выкладки, не больше $\sqrt{1+k^2}\rho(\overline{X},\ \overline{Y})$. Следовательно,

$$\rho(X,\ Y) \leqslant \sqrt{1+k^2}\rho(\overline{X},\ \overline{Y}).$$

Утверждение доказано.

Обратимся теперь к изгибающему полю $\tau(X)$ на поверхности F. Мы рассмотрим его сначала в той малой окрестности ω точки P, которая была определена выше.

Возьмем в области $\overline{\omega}$ плоскости xy произвольную спрямляемую кривую $\overline{\gamma}$ и спроектируем ее прямыми, параллельными оси z, на поверхность ω. Полученная при этом кривая γ, как было показано, является спрямляемой. При бесконечно малом изгибании поверхности F, определяемом изгибающим полем τ, кривая γ перейдет в кривую γ_t. По условию, при достаточно малом $|t|$ эта кривая должна быть спрямляемой. Оказывается, уже из этого следует, что векторное поле τ должно удовлетворять условию Липшица вблизи точки P, а следовательно, и в любой компактной области на поверхности F. А. Д. Александров в упомянутой выше работе обосновал доказательство этого факта при помощи одной теоремы Лебега, относящейся к спрямляемым поверхностям. Приведем это доказательство полностью.

Составим уравнение кривой γ_t. Пусть поверхность ω задается уравнением

$$z=z(x,\ y), \qquad (x,\ y)\in\overline{\omega};$$

а

$$x=x(\alpha), \qquad y=y(\alpha) \qquad (0\leqslant\alpha\leqslant b)$$

— уравнения кривой $\overline{\gamma}$ и, наконец, $\xi(x,\ y)$, $\eta(x,\ y)$, $\zeta(x,\ y)$ — компоненты вектора τ по осям x, y и z. Легко видеть, что кривая γ_t задается уравнениями:

$$\begin{aligned} x &= x(\alpha)+t\xi(x(\alpha),\ y(\alpha)),\\ y &= y(\alpha)+t\eta(x(\alpha),\ y(\alpha)),\\ z &= z(x(\alpha),\ y(\alpha))+t\zeta(x(\alpha),\ y(\alpha)). \end{aligned}$$

Допустим, хотя бы одна из трех функций $\xi(x,\ y)$, $\eta(x,\ y)$, $\zeta(x,\ y)$ в сколь угодно малой окрестности точки $\overline{P}$ — проекции точки P на плоскость xy — не удовлетворяет условию Липшица. Пусть для определенности это будет функция ξ. Построим последовательность пар точек A_n, B_n внутри области $\overline{\omega}$ следующим образом. Из точки $\overline{P}$ описываем круг радиуса $1/n^3$ и внутри

этого круга берем две точки A_n и B_n таким образом, чтобы

$$|\xi(A_n)-\xi(B_n)|>n|A_nB_n|.$$

Существование таких точек гарантируется тем, что ξ по предположению не удовлетворяет условию Липшица ни в какой окрестности точки $\bar{P}$. Не ограничивая общности, можно считать, что круг единичного радиуса с центром $\bar{P}$ принадлежит $\bar{\omega}$ и, следовательно, все точки A_n, B_n принадлежат области $\bar{\omega}$.

Рассмотрим теперь внутри области $\bar{\omega}$ ломаную $\bar{\gamma}$

$$A_1B_1A_1B_1\ldots A_2B_2A_2B_2\ldots A_3B_3A_3B_3\ldots,$$

у которой звено A_nB_n при достаточно больших n повторяется m_n раз, причем m_n удовлетворяет неравенствам

$$\frac{1}{n^2}\leqslant m_n|A_nB_n|\leqslant\frac{2}{n^2}.$$

Из сходимости бесконечного ряда $\div 1/n^2$ следует, что ломаная $\bar{\gamma}$ спрямляема.

По доказанному ранее кривая γ на поверхности ω, которая проектируется в ломаную $\bar{\gamma}$ на плоскость xy, будет спрямляемой. И так как $\boldsymbol{\tau}$ — изгибающее поле, то функция

$$\lambda=x+t\xi$$

вдоль кривой $\bar{\gamma}$ при достаточно малом $|t|$ должна быть ограниченной вариации.

Из спрямляемости ломаной $\bar{\gamma}$ следует, что x вдоль кривой $\bar{\gamma}$ есть функция ограниченной вариации. Ограниченность вариации функций x и $x+t\xi$ вдоль кривой $\bar{\gamma}$ влечет за собой по известной теореме ограниченность вариации их разности $t\xi$, следовательно, ограниченность вариации ξ. Вместе с тем, как нетрудно убедиться с помощью простого подсчета, вариация ξ вдоль ломаной $\bar{\gamma}$ бесконечна.

Действительно, вариация функции ξ на каждом звене A_nB_n ломаной $\bar{\gamma}$ не меньше чем

$$|\xi(A_n)-\xi(B_n)|>n|A_nB_n|.$$

И так как число m_n звеньев A_nB_n удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{n^2}\leqslant m_n|A_nB_n|,$$

то вариация ξ на всех звеньях A_nB_n больше $1/n$. Из аддитивности вариации и расходимости бесконечного ряда $\div 1/n$ следует, что вариация ξ вдоль ломаной $\bar{\gamma}$ бесконечна. Мы пришли к противоречию и, таким образом, доказали, что изгибающее

поле τ удовлетворяет условию Липшица в достаточно малой окрестности произвольной точки P поверхности F.

Пусть теперь G — любая компактная область на поверхности F. Пусть $\overline{G}$ — ее замыкание. Каждая точка $P \subset \overline{G}$ имеет окрестность ω_P, в которой изгибающее поле удовлетворяет условию Липшица. Окрестности ω_P образуют покрытие $\overline{G}$. По известной теореме из совокупности окрестностей ω_P можно выделить конечное покрытие. Отсюда следует, что изгибающее поле τ удовлетворяет условию Липшица в $\overline{G}$, а следовательно, и в G.

Итак, *изгибающее поле общей выпуклой поверхности удовлетворяет условию Липшица в любой компактной области на поверхности.*

Возьмем достаточно малую окрестность ω произвольной точки P выпуклой поверхности F и введем систему прямоугольных декартовых координат x, y, z, как это было уже сделано выше. Выпуклая поверхность ω однозначно проектируется на плоскость xy и ее опорные плоскости образуют с плоскостью xy углы меньше $\vartheta_0 < \pi/2$. Можно считать, что для изгибающего поля τ поверхности F в области ω выполняется условие Липшица.

Обозначим γ кривую на поверхности ω, которая на плоскость xy проектируется прямолинейным отрезком $\overline{\gamma}$, параллельным оси x. При бесконечно малом изгибании, определяемом полем τ, к моменту t она перейдет в кривую γ_t:

$$r = r(x) + t\tau(x).$$

На отрезке $\overline{\gamma}$ каждая из функций $r(x)$ и $\tau(x)$ удовлетворяет условию Липшица. Следовательно, кривая γ_t спрямляема и ее длина $l_\gamma(t)$ находится по обычной формуле

$$l_\gamma(t) = \int\limits_{(\overline{\gamma})} |r'_x + t\tau'_x|\, dx.$$

Так как функции r и τ вдоль отрезка $\overline{\gamma}$ удовлетворяют условию Липшица, то производные r'_x и τ'_x всюду, где они существуют, ограничены некоторой постоянной c и, кроме того, $|r'_x| \geqslant 1$. Отсюда следует, что

$$|r'_x + t\tau'_x| = \left(r'^2_x + 2tr'_x\tau'_x + t^2\tau'^2_x\right)^{1/2} = |r'_x| + t\frac{r'_x\tau'_x}{|r'_x|} + t^2R,$$

где R ограничено некоторой постоянной, зависящей только от c.

Подставляя это выражение $|r'_x + t\tau'_x|$ в формулу для $l_\gamma(t)$, получим

$$l_\gamma(t) = l_\gamma + t\int\limits_{(\overline{\gamma})} \frac{r'_x\tau'_x}{|r'_x|}\, dx + O(t^2).$$

Отсюда с помощью принятого определения бесконечно малого изгибания заключаем, что

$$\int\limits_{(\bar{\gamma})} \frac{r'_x \tau'_x}{|r'_x|}\, dx = 0.$$

Так как это равенство имеет место не только для кривой γ, но и для любой ее части, то почти всюду на $\bar{\gamma}$ должно быть $r'_x \tau'_x = 0$. Наконец, так как кривая γ в силу произвола ее выбора может проектироваться на любую прямую $y = \text{const}$ плоскости xy, то равенство $r'_x \tau'_x = 0$ имеет место почти всюду в области $\bar{\omega}$.

Аналогично доказывается, что почти всюду в области $\bar{\omega}$ удовлетворяется уравнение

$$r'_y \tau'_y = 0.$$

Пусть теперь γ — плоская кривая на поверхности ω, которая проектируется в отрезок $\bar{\gamma}$ произвольной прямой $x - y = \text{const}$. Обозначим s длину, измеряемую вдоль отрезка $\bar{\gamma}$. Тогда, рассуждая подобно предыдущему, заключаем, что почти во всех точках отрезка $\bar{\gamma}$

$$r'_s \tau'_s = 0.$$

Ввиду произвола выбора кривой γ отсюда следует, что почти во всех точках области $\bar{\omega}$ в направлении $x - y = \text{const}$ имеем $r'_s \tau'_s = 0$.

По теореме Радемахера функция, удовлетворяющая условию Липшица, имеет почти всюду полный дифференциал. В точках существования полного дифференциала r и τ имеем

$$r'_s = r_x \frac{dx}{ds} + r_y \frac{dy}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(r_x + r_y),$$

$$\tau'_s = \tau_x \frac{dx}{ds} + \tau_y \frac{dy}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_x + \tau_y).$$

Поэтому в этих точках

$$r'_s \tau'_s = \frac{1}{2} r_x \tau_x + \frac{1}{2}(r_x \tau_y + r_{\imath} \tau_x) + \frac{1}{2}(r_y \tau_y).$$

И следовательно, почти всюду в $\bar{\omega}$ удовлетворяется уравнение

$$r_x \tau_x + (r_x \tau_y + r_y \tau_x) + r_y \tau_y = 0.$$

А так как по доказанному почти всюду $r_x \tau_x = 0$, $r_y \tau_y = 0$, то почти всюду

$$r_x \tau_y + r_y \tau_x = 0.$$

В точках существования полного дифференциала функций r и τ

$$dr\,d\tau=(r_x\tau_x)\,dx^2+(r_x\tau_y+r_y\tau_x)\,dx\,dy+(r_y\tau_y)\,dy^2.$$

Отсюда следует, что почти всюду в области $\bar{\omega}$ или, что то же самое, почти всюду на поверхности ω

$$dr\,d\tau=0.$$

Резюмируя вышеизложенное, заключаем: *изгибающее поле на общей выпуклой поверхности удовлетворяет условию Липшица в любой компактной области, и почти всюду*

$$dr\,d\tau=0.$$

Пусть теперь на выпуклой поверхности F задано некоторое векторное поле τ, удовлетворяющее условию Липшица в любой компактной области на поверхности, причем почти всюду $dr\,d\tau=0$. Покажем, что поле τ является изгибающим полем.

Для доказательства этого утверждения достаточно установить, что поле τ будет изгибающим в достаточно малой окрестности произвольно взятой точки поверхности. Действительно, пусть поле τ является изгибающим в достаточно малой окрестности ω_P произвольной точки P. Ввиду компактности кривой γ ее можно покрыть конечным числом окрестностей ω, в каждой из которых поле τ будет изгибающим. Кривую γ можно разбить на конечное число частей γ_k, каждая из которых целиком принадлежит одной окрестности ω.

Так как поле τ является изгибающим в ω, то для кривой γ_k, принадлежащей ω, будем иметь

$$l_{\gamma_k}(t)=l_{\gamma_k}+t\varepsilon_k,$$

где ε_k стремится к нулю при $t\to 0$. Суммируя эти равенства, получим

$$l_\gamma(t)=l_\gamma+t\varepsilon,$$

где $\varepsilon=\sum\varepsilon_k$ и, следовательно, стремится к нулю при $t\to 0$. Так как кривая γ была взята произвольно, то отсюда следует, что поле τ является изгибающим на всей поверхности.

Пусть теперь окрестность ω произвольной точки выбрана так, как в предыдущих рассмотрениях. Покажем, что поле τ в такой окрестности будет изгибающим.

Возьмем в окрестности ω произвольную кривую γ. Обозначим, как и ранее, $\bar{\gamma}$ ее проекцию на плоскость xy. Как показано в предыдущих рассмотрениях, длины кривых γ_t и γ связаны соотношением

$$l_\gamma(t)=l_\gamma+t\int\limits_{\bar{\gamma}}\frac{(r'\tau')}{|r'|}\,ds+t^2R,$$

где дифференцирование r и τ выполняется по дуге s кривой $\bar{\gamma}$, а R ограничено некоторой постоянной, по существу зависящей только от постоянных Липшица вектор-функций r и τ и длины кривой $\bar{\gamma}$.

Впишем в кривую γ ломаную Γ с достаточно малыми звеньями. Прямыми, параллельными оси z, она проектируется в ломаную $\bar{\Gamma}$ на плоскость xy и в кривую $\hat{\Gamma}$ на поверхность ω. Сколь угодно малым смещением вершин ломаной Γ можно добиться того, что на ломаной $\bar{\Gamma}$ будет почти всюду $r'\tau'=0$. Чтобы не усложнять построения, будем считать, что этим свойством обладает уже ломаная $\bar{\Gamma}$. Тогда, подобно предыдущему, имеем

$$l_{\tilde{\Gamma}}(t) = l_{\tilde{\Gamma}} + t^2\tilde{R}.$$

Здесь интеграл в правой части отсутствует из-за того, что $r'\tau'=0$ почти всюду на ломаной $\bar{\Gamma}$.

Как известно, $l_{\tilde{\Gamma}} \to l_{\gamma}$ при $\Gamma \to \gamma$. Поэтому, переходя к нижнему пределу в полученном соотношении и замечая, что нижний предел длин кривых, сходящихся к данной, не меньше длины предельной кривой, получаем

$$l_{\gamma}(t) \leqslant l_{\gamma} + t^2\tilde{R}^*,$$

где $\tilde{R}^*$ ограничено некоторой постоянной.

Сравнивая полученные два соотношения между $l_{\gamma}(t)$ и l_{γ}, заключаем, что

$$t \int\limits_{(\bar{\gamma})} \frac{(r'\tau')}{|r'|}\, ds + t^2 (R - \tilde{R}^*) \leqslant 0$$

при достаточно малых по абсолютной величине t. Ввиду ограниченности R и $\tilde{R}^*$ при $t \to 0$ отсюда следует, что

$$\int\limits_{(\bar{\gamma})} \frac{(r'\tau')}{|r'|}\, ds = 0$$

и, следовательно,

$$l_{\gamma}(t) = l_{\gamma} + t^2 R.$$

А это значит, что поле τ является изгибающим в окрестности ω. По доказанному отсюда следует, что оно будет изгибающим на всей поверхности F.

Содержание настоящего параграфа можно резюмировать следующей теоремой А. Д. Александрова.

Для того чтобы векторное поле τ на общей выпуклой поверхности F было изгибающим, необходимо и достаточно, чтобы в любой компактной области на F оно удовлетворяло условию Липшица и чтобы почти всюду было $dr\,d\tau=0$.

§ 2. Основная лемма об изгибающих полях выпуклых поверхностей

В этом параграфе будет сформулирован один из основных результатов настоящей главы. Мы назовем его основной леммой. Доказательство теорем о жесткости общих выпуклых поверхностей и доказательство регулярности изгибающих полей регулярных поверхностей в своей существенной части опираются на эту лемму. Доказательство основной леммы довольно сложно, если не делать никаких предположений о гладкости поверхности и изгибающего поля. В связи с этим в настоящем параграфе мы даем только описание доказательства; отдельные существенные детали доказательства находятся в §§ 3, 4 и 5, а собственно доказательство дано в § 6.

Пусть F — регулярная (трижды непрерывно дифференцируемая) выпуклая поверхность, не содержащая плоских областей, однозначно проектирующаяся на плоскость xy, и τ — ее регулярное (трижды непрерывно дифференцируемое) изгибающее поле. Как показано в § 1, поле τ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений:

$$r_x\tau_x=0, \qquad r_x\tau_y+r_y\tau_x=0, \qquad r_y\tau_y=0.$$

Если обозначить p и q первые производные функции $z(x, y)$, задающей поверхность F, ξ, η, ζ — составляющие поля τ по осям x, y и z соответственно, то эту систему уравнений можно переписать так:

$$\xi_x+p\zeta_x=0, \qquad \xi_y+p\zeta_y+\eta_x+q\zeta_x=0, \qquad \eta_y+q\zeta_y=0.$$

Из этой системы легко исключить ξ и η. Для этого достаточно продифференцировать первое уравнение дважды по y, прибавить к нему третье уравнение, продифференцировав его дважды по x, и вычесть второе уравнение, продифференцированное по x и y. При этом для составляющей ζ поля τ по оси z получается уравнение

$$r\zeta_{yy}-2s\zeta_{xy}+t\zeta_{xx}=0,$$

где r, s, t обозначают вторые производные функции $z(x, y)$.

Из этого уравнения следует важное заключение относительно кривизны поверхности Φ: $z=\zeta(x, y)$.

Эта поверхность имеет неположительную кривизну.

Действительно, допустим, что в некоторой точке (x, y) кривизна поверхности Φ положительна. Тогда она положительна и в некоторой окрестности ω этой точки. В окрестности ω второй дифференциал d^2z не может быть равен нулю тождественно, так как тогда соответствующий кусок поверхности F был бы куском плоскости. Следовательно, существует такая точка (x_0, y_0),

что кривизна Φ в этой точке положительна и d^2z не обращается в нуль тождественно.

Выберем направление осей x, y таким образом, чтобы в точке (x_0, y_0) было $s = z_{xy} = 0$. Тогда уравнение для ζ в этой точке принимает вид

$$r\zeta_{yy} + t\zeta_{xx} = 0.$$

Так как поверхность F выпуклая, то r и t не могут быть разных знаков, а так как d^2z не обращается в нуль тождественно в точке (x_0, y_0), то r и t не могут быть равны нулю одновременно. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $r > 0$, $t \geqslant 0$.

Так как кривизна поверхности Φ в точке (x_0, y_0) положительна, то в этой точке

$$\zeta_{xx}\zeta_{yy} - \zeta_{xy}^2 > 0,$$

и, следовательно, ζ_{xx} и ζ_{yy} отличны от нуля и имеют одинаковые знаки.

Сопоставляя это с выводами относительно величин r и t в точке (x_0, y_0), заключаем, что в этой точке уравнение для ζ

$$r\zeta_{yy} + t\zeta_{xx} = 0$$

не удовлетворяется, и таким образом, приходим к противоречию.

Итак, если выпуклая поверхность F не содержит плоских кусков, то поверхность Φ имеет неположительную кривизну.

Основная лемма представляет собой распространение этого хорошо известного результата для регулярных выпуклых поверхностей и их регулярных изгибающих полей на случай выпуклых поверхностей и изгибающих полей, не подчиненных никаким условиям регулярности. Но, прежде чем сформулировать лемму, мы определим понятие поверхности неположительной кривизны, не предполагая регулярности поверхности.

Пусть Φ — любая поверхность,

$$z = z(x, y)$$

— ее уравнение. От функции $z(x, y)$ не требуется ничего, кроме непрерывности. Мы будем говорить, что поверхность Φ *строго выпукла в точке* P, если через эту точку проходит плоскость α_P такая, что все точки поверхности, достаточно близкие к P, кроме самой P, лежат вне этой плоскости и, следовательно, по одну ее сторону. Поверхность, не содержащую точек строгой выпуклости, будем называть поверхностью неположительной кривизны. Очевидно, для регулярных (дважды дифференцируемых) поверхностей определяемая так неположительность кривизны равносильна неположительности гауссовой кривизны.

Основная лемма 1. *Если F:*

$$z=z(x,\ y)$$

— выпуклая поверхность, не содержащая плоских областей, и $\zeta(x,\ y)$ — составляющая по оси z ее изгибающего поля, то поверхность Φ:

$$z=\zeta(x,\ y)$$

является поверхностью неположительной кривизны.

Условие, чтобы поверхность F не содержала плоских областей, является существенным, в чем легко убедиться на следующем примере. Пусть F — область в плоскости xy. Очевидно, F является выпуклой поверхностью. Пусть на F функции $\xi\equiv 0$, $\eta\equiv 0$, а $\zeta(x,\ y)$ — любая функция, удовлетворяющая условию Липшица. Легко проверить, что векторное поле τ на F с составляющими ξ, η, ζ по осям x, y, z удовлетворяет условиям теоремы А. Д. Александрова (§ 1) и, следовательно, является изгибающим полем F. Вместе с тем поверхность $z=\zeta(x,\ y)$ вовсе не обязана быть поверхностью неположительной кривизны.

Для того чтобы распространить основную лемму на случай выпуклых поверхностей, содержащих плоские области, мы обобщим понятие поверхности неположительной кривизны. Пусть H — любое множество точек, однозначно проектирующееся на плоскость xy. Точку P этого множества будем называть точкой строгой выпуклости множества, если через эту точку проходит плоскость α_P, не перпендикулярная плоскости xy, причем все достаточно близкие к P точки H лежат вне плоскости α_P по одну ее сторону. Относительно множества H, не содержащего точек строгой выпуклости, мы будем говорить, что оно имеет неположительную кривизну. Теперь мы можем сформулировать основную лемму для случая, когда выпуклая поверхность содержит плоские области.

Основная лемма 2. *Пусть F:*

$$z=z(x,\ y)$$

— выпуклая поверхность, содержащая плоские области G_α. Пусть $\zeta(x,\ y)$ — составляющая по оси z изгибающего поля τ поверхности F. Тогда поверхность Φ:

$$z=\zeta(x,\ y)$$

на множестве H тех точек, которым при проектировании прямыми, параллельными оси z, на F соответствуют точки, лежащие вне областей G_α, имеет неположительную кривизну.

Как было указано выше, доказательство основной леммы будет дано в § 6, а идея доказательства — в настоящем параграфе.

Пусть F: $z=z(x,\ y)$ — регулярная поверхность, однозначно проектирующаяся на плоскость xy, и $\tau(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ — регулярное

изгибающее поле на этой поверхности. Пусть G — произвольная гомеоморфная кругу область на поверхности, ограниченная регулярной кривой γ. Обозначим $\bar{G}$ проекцию области G на плоскость xy, а $\bar{\gamma}$ — ее границу.

Так как поле τ является изгибающим, то оно удовлетворяет системе уравнений

$$\xi_x+p\zeta_x=0, \qquad \xi_y+p\zeta_y+\eta_x+q\zeta_x=0, \qquad \eta_y+q\zeta_y=0.$$

Положим

$$\lambda=\xi+p\zeta, \qquad \mu=\eta+q\zeta$$

и рассмотрим криволинейный интеграл

$$\frac{1}{2}\oint_{\bar{\gamma}}(\lambda\, d\mu-\mu\, d\lambda)=\frac{1}{2}\oint_{\bar{\gamma}}(\lambda\mu_x-\mu\lambda_x)\,dx+(\lambda\mu_y-\mu\lambda_y)\,dy.$$

Этот интеграл при помощи известной формулы Грина — Остроградского преобразуется к интегралу по области $\bar{G}$:

$$\frac{1}{2}\oint_{\bar{\gamma}}(\lambda\, d\mu-\mu\, d\lambda)=\int\limits_{\bar{G}}\int(\lambda_x\mu_y-\lambda_y\mu_x)\,dx\,dy.$$

Подынтегральное выражение правой части этого равенства можно представить следующим образом:

$$\lambda_x\mu_y-\lambda_y\mu_x=\frac{1}{4}(\lambda_y-\mu_x)^2+\left\{\lambda_x\mu_y-\frac{1}{4}(\lambda_y+\mu_x)^2\right\}.$$

При помощи уравнений изгибающего поля находим

$$\lambda_x=\xi_x+p\zeta_x+r\zeta=r\zeta,$$
$$\mu_y=\eta_y+q\zeta_y+t\zeta=t\zeta,$$
$$\lambda_y+\mu_x=\xi_y+p\zeta_y+\eta_x+q\zeta_x+2s\zeta=2s\zeta.$$

Подставляя эти соотношения в фигурные скобки выражения $\lambda_x\mu_y-\lambda_y\mu_x$, получаем

$$\lambda_x\mu_y-\lambda_y\mu_x=\frac{1}{4}(\lambda_y-\mu_x)^2+(rt-s^2)\zeta^2.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2}\oint_{\bar{\gamma}}(\lambda\, d\mu-\mu\, d\lambda)=\int\limits_{\bar{G}}\int(rt-s^2)\zeta^2\,dx\,dy+\frac{1}{4}\int\limits_{\bar{G}}\int(\lambda_y-\mu_x)^2\,dx\,dy.$$

Эта формула заимствована нами вместе с ее выводом из одной работы Минагава [47], где устанавливается жесткость замкнутых выпуклых поверхностей в предположении, что поверхность кусочно дважды дифференцируема и изгибающее поле гладкое. Мы привели ее как наводящее соображение для

вывода интегрального соотношения, используемого для доказательства основной леммы.

Сохраним принятые обозначения, но не будем считать поле τ изгибающим. При этом квадратичная форма

$$\sigma = dr\, d\tau = \sigma_{11}\, dx^2 + 2\sigma_{12}\, dx\, dy + \sigma_{22}\, dy^2$$

уже не будет равна нулю тождественно. Ее коэффициенты, очевидно, будут иметь следующие значения:

$$\sigma_{11} = \xi_x + p\zeta_x, \qquad 2\sigma_{12} = \xi_y + p\zeta_y + \eta_x + q\zeta_x, \qquad \sigma_{22} = \eta_y + q\zeta_y.$$

Полагая, как и ранее,

$$\lambda = \xi + p\zeta, \qquad \mu = \eta + q\zeta,$$

и повторяя дословно предыдущий вывод, получим

$$\frac{1}{2} \oint\limits_{\bar{\gamma}} (\lambda\, d\mu - \mu\, d\lambda) =$$
$$= \frac{1}{4} \iint\limits_{\bar{G}} (\lambda_y - \mu_x)^2\, dx\, dy + \iint\limits_{\bar{G}} \left\{ \lambda_x \mu_y - \frac{1}{4} (\lambda_y + \mu_x)^2 \right\} dx\, dy.$$

Вводя во второй интеграл правой части равенства:

$$\lambda_x = \xi_x + p\zeta_x + r\zeta = \sigma_{11} + r\zeta,$$
$$\mu_y = \eta_y + q\zeta_y + t\zeta = \sigma_{22} + t\zeta,$$
$$\lambda_y + \mu_x = \xi_y + p\zeta_y + \eta_x + q\zeta_x + 2s\zeta = 2\sigma_{12} + 2s\zeta,$$

получим следующую формулу:

$$\frac{1}{2} \oint\limits_{\bar{\gamma}} (\lambda\, d\mu - \mu\, d\lambda) =$$
$$= \frac{1}{4} \iint\limits_{\bar{G}} (\lambda_y - \mu_x)^2\, dx\, dy + \iint\limits_{\bar{G}} \zeta^2 (rt - s^2)\, dx\, dy +$$
$$+ \iint\limits_{\bar{G}} \zeta \Delta (\sigma,\ d^2 z)\, dx\, dy + \iint\limits_{\bar{G}} \Delta (\sigma,\ \sigma)\, dx\, dy,$$

где

$$\Delta (\sigma,\ d^2 z) = \sigma_{11} t - 2\sigma_{12} s + \sigma_{22} r$$

— смешанный дискриминант двух форм — σ и $d^2 z$, а

$$\Delta (\sigma,\ \sigma) = \sigma_{11} \sigma_{22} - \sigma_{12}^2$$

— дискриминант формы σ.

Прежде чем переходить к следующему вопросу, сделаем несколько замечаний по поводу интегралов, стоящих в правой части полученной формулы.

Интеграл

$$\iint\limits_{\bar{G}} (\lambda_y - \mu_x)^2\, dx\, dy \geqslant 0,$$

его подынтегральная функция

$$(\lambda_y - \mu_x)^2 = (\xi_y + p\zeta_y - \eta_x - q\zeta_x)^2$$

остается ограниченной, если наша регулярная выпуклая поверхность F неограниченно приближается к некоторой общей выпуклой поверхности, а векторное поле τ, изменяясь, остается ограниченным в метрике C^1.

Второй интеграл можно представить как интеграл Стильтьеса

$$\iint\limits_{\bar{G}} \zeta^2 (rt - s^2)\, dx\, dy = \iint\limits_{\Omega} \zeta^2\, d\Omega,$$

где Ω — условная кривизна поверхности. Для множества M на поверхности величина $\Omega(M)$ есть площадь (мера Лебега) образа множества M на плоскости p, q при отображении

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Понятие условной кривизны очевидным образом распространяется на общие выпуклые поверхности, подобно тому как и понятие обычной интегральной кривизны (площади сферического изображения). Условная кривизна обладает многими свойствами обычной кривизны, в частности полной аддитивностью на кольце борелевских множеств.

Указанное преобразование интеграла имеет значение при переходе от регулярных к общим выпуклым поверхностям.

Что касается последних двух интегралов

$$\iint\limits_{\bar{G}} \zeta\Delta(\sigma,\ d^2 z)\, dx\, dy, \qquad \iint\limits_{\bar{G}} \Delta(\sigma,\ \sigma)\, dx\, dy,$$

то здесь существенно пока только заметить, что их подынтегральные функции имеют инвариантный смысл как дискриминанты. Это позволяет просто осуществить переход от одних координат к другим. А эту замену нам придется совершать неоднократно, производя оценки интегралов при переходе к общим выпуклым поверхностям и их изгибающим полям.

Изложение трех последующих параграфов направлено главным образом на то, чтобы подготовить доказательство основной леммы, содержащееся в § 6. Для того чтобы цели и задачи этой подготовительной работы были ясны не только в целом, но и в деталях, мы изложим идею доказательства основной леммы.

Пусть F — общая выпуклая поверхность, однозначно проектирующаяся на плоскость xy, и $\zeta(x, y)$ — составляющая по оси z

ее изгибающего поля. В случае, если поверхность не содержит плоских областей, основной леммой утверждается, что поверхность

$$z=\zeta(x, y)$$

является поверхностью неположительной кривизны, т. е. ни в какой точке P эта поверхность не может быть строго выпуклой.

Не ограничивая общности, будем считать, что точка P проектируется на плоскость xy в начало координат. Возьмем круг $\bar{\omega}$: $x^2+y^2<\varepsilon^2$ достаточно малого радиуса так, чтобы проекция поверхности F на плоскость xy покрывала этот круг вместе с ограничивающей его окружностью $\bar{\gamma}$. Обозначим ω область на поверхности, которая проектируется в круг $\bar{\omega}$.

Аппроксимируем поверхность F аналитической строго выпуклой поверхностью $\tilde{F}$ и обозначим $\tilde{\omega}$ область на ней, которая проектируется в круг $\bar{\omega}$.

Изгибающее поле τ поверхности F аппроксимируем регулярным полем $\bar{\tau}$ путем усреднения τ с достаточно регулярным ядром (§ 4).

Строим регулярное изгибающее поле $\tilde{\tau}$ поверхности $\tilde{\omega}$ так, чтобы вертикальные составляющие этого поля и поля $\bar{\tau}$ на границе поверхности $\tilde{\omega}$ совпадали, т. е. чтобы $\tilde{\zeta}=\bar{\zeta}$ (§ 3).

Это осуществляется путем решения первой краевой задачи для линейного уравнения

$$\tilde{r}\tilde{\zeta}_{yy}-2\tilde{s}\tilde{\zeta}_{xy}+\tilde{t}\tilde{\zeta}_{xx}=0,$$

где $\tilde{r}$, $\tilde{s}$ и $\tilde{t}$ — вторые производные функции $\tilde{z}(x, y)$, задающей поверхность $\tilde{F}$, в круге $x^2+y^2<\varepsilon^2$ при граничном условии $\tilde{\zeta}=\bar{\zeta}$. С помощью найденной вертикальной составляющей поля $\tilde{\tau}$ две другие составляющие $\tilde{\xi}$ и $\tilde{\eta}$ находятся квадратурами.

Относительно построенного таким образом поля $\tilde{\tau}$ доказывается, что при подходящем выборе последовательности поверхностей $\tilde{F}\to F$ и последовательности усредненных полей $\bar{\tau}\to\tau$ оно сходится к некоторому изгибающему полю поверхности F (§ 3).

Затем рассматривается векторное поле $\bar{\tau}-\tilde{\tau}$ на поверхности $\tilde{\omega}$. По построению его вертикальная составляющая $\bar{\zeta}-\tilde{\zeta}$ на границе $\tilde{\omega}$ равна нулю. Горизонтальная составляющая этого поля изменяется специальным образом путем наложения некоторого регулярного поля τ^* так, чтобы на границе поверхности $\tilde{\omega}$ полученное при этом поле $\bar{\tau}-\tilde{\tau}+\tau^*$ было изгибающим (§ 4).

К поверхности $\tilde{\omega}$ и векторному полю $\bar{\tau}-\tilde{\tau}+\tau^*$ применяется полученная выше интегральная формула (§ 6). Доказывается,

что при надлежащем выборе изгибающего поля (а оно определено с точностью до тривиального слагаемого с равной нулю вертикальной составляющей) можно добиться того, что контурный интеграл в левой части интегральной формулы

$$\oint\limits_{\gamma} (\lambda\, d\mu - \mu\, d\lambda)$$

будет равен нулю. Это оказывается возможным благодаря тому, что поле $\bar{\tau}-\tilde{\tau}+\tau^*$ является изгибающим на краю поверхности и имеет равную нулю вертикальную составляющую. Именно для этого поле $\bar{\tau}-\tilde{\tau}$ и было исправлено при помощи поля τ^*.

В результате последней операции интегральное соотношение принимает вид

$$\frac{1}{4}\iint\limits_{\bar{\omega}} (\lambda_y - \mu_x)^2\, dx\, dy + \iint\limits_{\bar{\omega}} \zeta^2 (\tilde{r}\tilde{t} - \tilde{s}^2)\, dx\, dy + \\ + \iint\limits_{\bar{\omega}} \zeta\Delta(\sigma,\ d^2\tilde{z})\, dx\, dy + \iint\limits_{\bar{\omega}} \Delta(\sigma,\ \sigma)\, dx\, dy = 0,$$

где λ и μ, ζ и σ относятся к поверхности $\tilde{\omega}$ и векторному полю $\bar{\tau}-\tilde{\tau}+\tau^*$.

Следующий этап доказательства заключается в предельном переходе в этом интегральном соотношении при условии, что $\bar{F}\to F$ и $\bar{\tau}\to\tau$. Доказывается, что каждый из двух последних интегралов

$$\iint\limits_{\bar{\omega}} \zeta\Delta(\sigma,\ d^2\tilde{z})\, dx\, dy, \qquad \iint\limits_{\bar{\omega}} \Delta(\sigma,\ \sigma)\, dx\, dy$$

стремится к нулю, когда $\bar{F}\to F$ и $\bar{\tau}\to\tau$ (§ 5). В отношении второго из указанных интегралов это заключение сравнительно просто, так как благодаря специальной аппроксимации поля τ полем $\bar{\tau}$ подынтегральная функция $\Delta(\sigma, \sigma)$ оказывается ограниченной и по мере сходится к нулю. Что же касается интеграла

$$\iint\limits_{\bar{\omega}} \zeta\Delta(\sigma,\ d^2\tilde{z})\, dx\, dy,$$

то его сходимость к нулю доказывается путем довольно сложных построений, описание которых здесь не внесло бы ясности.

В результате предельного перехода мы приходим к следующему соотношению:

$$\frac{1}{4}\iint\limits_{\bar{\omega}} (\xi_y^0 + p\zeta_y^0 - \eta_x^0 - q\zeta_x^0)^2\, dx\, dy + \iint\limits_{\Omega} (\zeta^0)^2\, d\Omega = 0,$$

где ξ^0, η^0, ζ^0 — компоненты векторного поля

$$\tau^0 = \tau - \lim \tilde{\tau}.$$

Из этого соотношения легко заключаем, что $\zeta^0 = 0$ в каждой точке строгой выпуклости поверхности ω. Если поверхность ω является строго выпуклой, т. е. не только не содержит плоских областей, но и прямолинейных отрезков, то доказательство леммы легко заканчивается. В самом деле, тогда $\zeta = \lim \tilde{\zeta}$. И так как поверхность $z = \tilde{\zeta}(x, y)$ является поверхностью с неположительной кривизной, то и предельная поверхность будет обладать этим свойством.

В случае, когда поверхность F не содержит плоских областей, но содержит прямолинейные отрезки, надо воспользоваться тем, что почти всюду в $\bar{\omega}$

$$\xi^0_y + p\zeta^0_y - \eta^0_x - q\zeta^0_x = 0.$$

Присоединяя это соотношение к числу уравнений, которым удовлетворяет изгибающее поле τ^0 поверхности F, и принимая во внимание, что ζ^0 обращается в нуль на границе ω и во всех точках строгой выпуклости этой поверхности, с помощью одного интегрального соотношения удается в конце концов доказать, что ζ^0 обращается в нуль и на прямолинейных отрезках поверхности ω.

Для того чтобы доказать основную лемму в случае наличия у поверхности F плоских областей, мы, пользуясь известным произволом изгибающего поля на плоских областях, изменяем τ внутри этих областей, сохраняя его в остальных точках, чтобы ζ^0 внутри плоских областей было заведомо отрицательным. Отсюда делаем вывод, что множество точек поверхности $z = \zeta(x, y)$, которые проектируются не в плоские области поверхности ω, не может содержать точек строгой выпуклости в направлении $z > 0$, т. е. через точку этого множества нельзя провести плоскость так, чтобы близкие точки множества были ниже этой плоскости.

Аналогично доказывается, что указанное множество не может содержать точек строгой выпуклости в направлении $z < 0$.

§ 3. Построение изгибающего поля выпуклой поверхности с заданной вертикальной составляющей вдоль края

Как указано в плане доказательства основной леммы, доказательство основано на сопоставлении данного изгибающего поля выпуклой поверхности и поля специально построенного, обладающего свойствами, о которых идет речь в лемме. Построению этого поля и посвящен настоящий параграф. Будет

доказано, что для выпуклой поверхности, однозначно проектирующейся в выпуклую область плоскости xy, существует изгибающее поле с заданной вертикальной составляющей вдоль границы поверхности.

Пусть ω — аналитическая поверхность с положительной гауссовой кривизной, однозначно проектирующаяся в круг $\bar{\omega}$: $x^2+y^2<R^2$. Пусть $z=z(x, y)$ — уравнение этой поверхности. Функция $z(x, y)$ аналитическая в круге $\bar{\omega}$ и на его границе.

Пусть на границе круга $\bar{\omega}$ задана достаточно регулярная функция h. Задача состоит в том, чтобы доказать существование изгибающего поля, вертикальная составляющая $\zeta(x, y)$ которого (т. е. составляющая по оси z) совпадала бы с h на границе $\bar{\omega}$.

Как показано в § 2, вертикальная составляющая ζ изгибающего поля удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$r\zeta_{yy}-2s\zeta_{xy}+t\zeta_{xx}=0, \qquad (*)$$

где r, s, t — вторые производные функции $z(x, y)$, задающей поверхность ω. Отсюда следует, что если поставленная задача о построении изгибающего поля разрешима, то вертикальная составляющая поля ζ представляет собой решение первой краевой задачи для уравнения $(*)$ в круге $\bar{\omega}$ при краевом условии $\zeta=h$.

Как выяснится ниже, для каждой функции $\zeta(x, y)$, удовлетворяющей уравнению $(*)$, всегда можно указать две другие функции $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ такие, что векторное поле $\tau(\xi, \eta, \zeta)$ будет изгибающим для поверхности ω. Таким образом, для решения поставленной геометрической задачи достаточно доказать разрешимость указанной краевой задачи для уравнения $(*)$.

По известной теореме С. Н. Бернштейна [21] краевая задача для уравнения $(*)$ разрешима, если можно установить априорные оценки для решения и его производных первого порядка. А такие оценки устанавливаются без труда.

Максимум модуля $\zeta(x, y)$ не превосходит максимума модуля h. Допустим, это неверно. Тогда либо $\max\zeta>\max h$, либо $\min\zeta<\min h$. Пусть для определенности $\max\zeta>\max h$. Рассечем поверхность $z=\zeta(x, y)$ плоскостью α: $z=\frac{1}{2}(\max\zeta+\max h)$. Ту часть этой поверхности, которая расположена над плоскостью α, обозначим Φ_α. Построим сферу σ, содержащую поверхность Φ_α вместе с ее границей. Она пересекает плоскость α по некоторой окружности $\varkappa$. Если сферу σ непрерывно изменять, но так, чтобы она все время проходила через окружность $\varkappa$ и чтобы ее сегмент, определяемый плоскостью α и содержащий поверхность Φ_α, уменьшался, то наступит момент, когда сфера коснется поверхности Φ_α в некоторой точке. В этой точке Φ_α, оче-

видно, будет строго выпуклой, что невозможно. Мы пришли к противоречию. И существование априорной оценки для $\max|\zeta|$ установлено.

Докажем существование априорных оценок для производных функции ζ. Для этого сначала покажем, что максимум и минимум производных ζ_x, ζ_y достигается на границе круга $\bar{\omega}$. Допустим, это неверно, и $\max\zeta_x = m$ достигается внутри круга $\bar{\omega}$ в точке P, в то время как на границе круга $\zeta_x \leqslant m' < m$.

Ввиду регулярности функции ζ_x почти для всех c из интервала $m' < c < m$ множество M_c точек круга $\bar{\omega}$, удовлетворяющих уравнению $\zeta_x(x, y) = c$, состоит из конечного числа регулярных кривых [42]. Так как множество M_c отделяет точку P, где достигается $\max\zeta_x$, от окружности круга $\bar{\omega}$, то M_c содержит замкнутую кривую γ, ограничивающую область G и содержащую точку P.

Рассмотрим криволинейный интеграл

$$I = \frac{1}{2}\oint\limits_{\gamma} (\zeta_x\, d\zeta_y - \zeta_y\, d\zeta_x).$$

Он равен нулю, так как $\zeta_x = \text{const}$ вдоль контура. Преобразуя интеграл I по формуле Остроградского — Грина, получим

$$I = \iint\limits_{G} (\zeta_{xx}\zeta_{yy} - \zeta_{xy}^2)\, dx\, dy.$$

И так как подынтегральное выражение сохраняет знак (неположительно), а интеграл $I = 0$, то $\zeta_{xx}\zeta_{yy} - \zeta_{xy}^2 = 0$ всюду в G. Следовательно, поверхность $z = \zeta(x, y)$, расположенная над областью G плоскости xy, развертывающаяся.

Через каждую точку развертывающейся поверхности проходит прямолинейная образующая, концом упирающаяся в край поверхности. Касательная плоскость вдоль прямолинейной образующей стационарна. Отсюда следует, что на границе области G $\zeta_x = m$. И мы приходим к противоречию. Итак, максимум и минимум ζ_x, ζ_y достигаются на окружности круга $\bar{\omega}$.

Для того чтобы оценить производные ζ_x и ζ_y на границе круга $\bar{\omega}$, достаточно оценить максимум угла наклона касательных плоскостей поверхности $z = \zeta(x, y)$ на краю этой поверхности. Кривая γ определяется заданной функцией h на окружности круга $\bar{\omega}$.

Возьмем на γ произвольную точку P и оценим угол наклона касательной плоскости поверхности $z = \zeta(x, y)$ в этой точке. Не ограничивая общности, можно считать, что точка P проектируется в точку $(R, 0)$ плоскости xy. Проведем через

касательную кривой γ в точке P плоскость α так, чтобы кривая γ была под этой плоскостью. Так как поверхность $z=\zeta(x, y)$ имеет неположительную кривизну, то она не может выступать над плоскостью α и поэтому целиком расположена под ней. То же заключение надо сделать относительно плоскости β, которая проходит через касательную кривой γ в точке P так, что кривая γ находится над плоскостью β. Отсюда следует, что угол наклона касательной плоскости поверхности $z=\zeta(x, y)$ в точке P не превосходит максимума угла наклона плоскостей, которые проходят через касательную кривой γ в точке P и пересекают эту кривую еще хотя бы в одной точке. Нетрудно оценить величину этого максимума.

Возьмем в качестве параметра вдоль кривой γ полярный угол ϑ. Тогда уравнение плоскости, проходящей через касательную кривой γ в точке P и некоторую точку $Q(\vartheta)$ кривой γ, отличную от P, запишется так:

$$\begin{vmatrix} x-R & y & z-h(0) \\ 0 & R & h'(0) \\ R\cos\vartheta - R & R\sin\vartheta & h(\vartheta)-h(0) \end{vmatrix} = 0.$$

Ее угловые коэффициенты —

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{h(\vartheta)-h(0)-h'(0)\sin\vartheta}{R(1-\cos\vartheta)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{h'(0)}{R}.$$

Нетрудно убедиться, что они ограничены некоторой постоянной, зависящей от максимума модуля первых и вторых производных $h(\vartheta)$. Для $\partial z/\partial y$ это очевидно. Что касается $\partial z/\partial x$, то его можно представить в виде

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{h(\vartheta)-h(0)-\vartheta h'(0)}{R(1-\cos\vartheta)} + \frac{(\vartheta-\sin\vartheta)h'(0)}{R(1-\cos\vartheta)} = \\ = \frac{\vartheta^2 u(\vartheta)}{2R(1-\cos\vartheta)} + \frac{\vartheta-\sin\vartheta}{R(1-\cos\vartheta)} h'(0),$$

где $u(\vartheta)$ ограничено некоторой константой, зависящей от вторых производных, точнее $|u(\vartheta)| \leqslant \max|h''(\vartheta)|$.

Так как выражения

$$\frac{\vartheta^2}{1-\cos\vartheta}, \quad \frac{\vartheta-\sin\vartheta}{1-\cos\vartheta},$$

очевидно, ограничены, то для $\partial z/\partial x$ получается, таким образом, оценка, зависящая только от максимума модуля производных h' и h''. Вместе с тем получена оценка для угла наклона касательных плоскостей поверхности $z=\zeta(x, y)$ и, следовательно, для первых производных ζ_x и ζ_y на границе круга ω.

Теперь на основании теоремы С. Н. Бернштейна [21] мы заключаем о разрешимости рассматриваемой для ζ краевой за-

дачи. Относительно этого решения полезно заметить следующее. Метод С. Н. Бернштейна позволяет установить априорные оценки предполагаемого решения для производных второго и последующих порядков в замкнутом круге $\bar{\omega}$ после того, как известны оценки решения и его производных первого порядка. А это позволяет заключить, что решение, существование которого мы доказали, будет достаточно регулярным в замкнутом круге, если достаточно регулярны граничные значения h.

Вертикальную составляющую ζ изгибающего поля поверхности ω мы определили, решая краевую задачу для уравнения

$$r\zeta_{yy} - 2s\zeta_{xy} + t\zeta_{xx} = 0,$$

которому ζ должна удовлетворять. Однако пока не ясно, можно ли указать две другие функции ξ и η так, чтобы векторное поле $\tau(\xi, \eta, \zeta)$ было изгибающим для поверхности ω. Этот вопрос мы сейчас рассмотрим.

Обратимся к системе дифференциальных уравнений для изгибающего поля:

$$\xi_x + p\zeta_x = 0, \quad \xi_y + p\zeta_y + \eta_x + q\zeta_x = 0, \quad \eta_y + q\zeta_y = 0. \qquad (**)$$

Если изгибающее поле с найденной нами вертикальной составляющей ζ действительно существует, то две другие его составляющие ξ и η надо искать, решая эту систему. Мы поступим именно таким образом.

Продифференцируем первое из уравнений (**) по y. Получим

$$\xi_{xy} + (p\zeta_x)_y = 0.$$

Дифференцируя второе уравнение по y и вычитая из него третье уравнение, продифференцированное по x, получим

$$\xi_{yy} + (p\zeta_y)_y + (q\zeta_x)_y - (q\zeta_y)_x = 0.$$

Положим для краткости

$$A = (p\zeta_x)_y, \quad B = (p\zeta_y)_y + (q\zeta_x)_y - (q\zeta_y)_x.$$

Непосредственно проверяется, что

$$B_x - A_y = r\zeta_{yy} - 2s\zeta_{xy} + t\zeta_{xx} = 0,$$

и, следовательно, ξ_y можно представить в виде криволинейного интеграла

$$\xi_y + \int (A\,dx + B\,dy) + C_1 = 0.$$

Обозначим теперь

$$A_1 = p\zeta_x, \quad B_1 = \int (A\,dx + B\,dy) + C_1.$$

Легко видеть, что

$$(B_1)_x - (A_1)_y = 0.$$

А так как, согласно уравнениям (**),

$$\xi_x + A_1 = 0,$$

то для ξ получается представление в виде криволинейного интеграла

$$\xi + \int (A_1\,dx + B_1\,dy) + C_2 = 0.$$

Выражение для функции $\eta(x, y)$ может быть найдено аналогичным рассуждением. Опуская промежуточные выкладки, сформулируем окончательный результат. Во-первых, функция η_x выражается через криволинейный интеграл, именно

$$\eta_x + \int (\overline{A}\,dy + \overline{B}\,dx) + \overline{C}_1 = 0,$$

где обозначено

$$\overline{A} = (q\zeta_y)_x, \quad \overline{B} = (q\zeta_x)_x + (p\zeta_y)_x - (p\zeta_x)_y.$$

Далее,

$$\eta + \int (\overline{A}_1\,dy + \overline{B}_1\,dx) + \overline{C}_2 = 0,$$

где

$$\overline{A}_1 = q\zeta_y, \quad \overline{B}_1 = \int (\overline{A}\,dy + \overline{B}\,dx) + \overline{C}_1.$$

Таким образом, мы нашли две функции $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$, выраженные через криволинейные интегралы от известных функций. Остается проверить, что три функции ξ, η и ζ удовлетворяют системе уравнений (**).

Из выражения для ξ получаем

$$\xi_x + A_1 = 0.$$

И так как $A_1 = p\zeta_x$, то удовлетворяется первое из уравнений (**).

Дифференцируя по y выражение для η, получаем

$$\eta_y + \overline{A}_1 = 0.$$

Но $\overline{A}_1 = q\zeta_y$. Следовательно, удовлетворяется третье уравнение (**).

Дифференцируя выражение для ξ по y, а выражение для η по x и складывая, получим

$$\xi_y + \eta_x + B_1 + \overline{B}_1 = 0.$$

Но

$$B_1 + \overline{B}_1 = \int \{(A + \overline{B})\, dx + (B + \overline{A})\, dy\} + C_1 + \overline{C}_1,$$

$$A + \overline{B} = (q\zeta_x)_x + (p\zeta_y)_x,$$

$$B + \overline{A} = (p\zeta_y)_y + (q\zeta_x)_y.$$

Следовательно,

$$B_1 + \overline{B}_1 = p\zeta_y + q\zeta_x + C.$$

Приняв постоянную C равной нулю, заключаем, что

$$\xi_y + \eta_x + p\zeta_y + q\zeta_x = 0,$$

т. е. второе уравнение (**) также удовлетворяется.

Итак, доказано существование изгибающего поля τ поверхности ω с заданной вертикальной составляющей на границе.

Покажем теперь, что изгибающее поле, существование которого мы доказали, определяется однозначно с точностью до тривиального слагаемого — поля скоростей сдвига поверхности ω как твердого тела в направлении, параллельном плоскости xy и поля скоростей вращения этой поверхности относительно оси z.

Пусть, кроме построенного поля τ, существует изгибающее поле $\overline{\tau}$ с той же вертикальной составляющей на границе поверхности ω (речь идет о регулярном поле $\overline{\tau}$). Векторное поле $\tau - \overline{\tau}$, очевидно, тоже является изгибающим для поверхности ω.

Край поверхности $z = \zeta(x, y) - \overline{\zeta}(x, y)$ лежит в плоскости xy. А так как эта поверхность имеет неположительную кривизну, то она вся должна быть расположена в плоскости xy, т. е. должно быть $\zeta(x, y) - \overline{\zeta}(x, y) \equiv 0$.

Положим для краткости записи

$$\tilde{\xi} = \xi - \overline{\xi}, \quad \tilde{\eta} = \eta - \overline{\eta}, \quad \tilde{\zeta} = \zeta - \overline{\zeta}.$$

Так как $\tilde{\zeta} \equiv 0$, то из уравнений для изгибающего поля $\tau - \overline{\tau}$ получается

$$\tilde{\xi}_x = 0, \quad \tilde{\xi}_y + \tilde{\eta}_x = 0, \quad \tilde{\eta}_y = 0.$$

Отсюда следует, что $\tilde{\xi} = \varphi(y)$, а $\tilde{\eta} = \psi(x)$, причем

$$\varphi'(y) + \psi'(x) = 0.$$

А это значит, что $\varphi'(y)$ и $\psi'(x)$ суть постоянные, отличающиеся только знаком. Итак,

$$\tilde{\xi} = \omega y + C_1, \quad \tilde{\eta} = -\omega x + C_2.$$

Здесь ωy и $-\omega x$ суть составляющие скорости вращения поверхности как целого относительно оси z, а C_1 и C_2 — составляющие

скорости сдвига поверхности в направлении, параллельном плоскости xy. Утверждение доказано.

Ниже будет рассмотрен вопрос о существовании изгибающего поля общей выпуклой поверхности F, имеющего заданную вертикальную составляющую на границе F. Решение этого вопроса будет основано на соответствующем результате для регулярных поверхностей и осуществляется путем аппроксимации поверхности F регулярной поверхностью и предельным переходом.

При этом возникает следующий вопрос. Если последовательность выпуклых поверхностей F_n сходится к выпуклой поверхности F и последовательность их изгибающих полей τ_n сходится к полю τ, то можно ли утверждать, что поле τ будет изгибающим для поверхности F? В общем случае ответ на этот вопрос надо дать отрицательный. Однако имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если последовательность выпуклых поверхностей F_n сходится к выпуклой поверхности F, однозначно проектирующейся на плоскость xy, а последовательность их изгибающих полей τ_n сходится к полю τ и в каждой компактной области поля τ_n равностепенно удовлетворяют условию Липшица, то поле τ является изгибающим полем поверхности F.*

Доказательство. Так как поля τ_n равностепенно удовлетворяют условию Липшица в каждой компактной области, то предельное поле τ тоже обладает этим свойством. Следовательно, по теореме А. Д. Александрова (§ 1), для того чтобы поле τ было изгибающим, достаточно, чтобы почти всюду на F было $dr\,d\tau=0$.

Обозначим $\bar{F}$ область плоскости xy, в которую проектируется поверхность F. Почти всюду в этой области функции r и τ имеют полный дифференциал. Теорема будет доказана, если мы покажем, что в каждой точке $\bar{P}$ области $\bar{F}$, где функции r и τ дифференцируемы, $dr\,d\tau=0$.

Опишем около точки $\bar{P}$ малый круг $\bar{\omega}$. Так как при любом n равенство $dr_n\,d\tau_n=0$ в $\bar{\omega}$ выполняется почти всюду, а последовательность F_n счетная, то в $\bar{\omega}$ существует множество полной меры $\tilde{\omega}$, где выполняется $dr_n\,d\tau_n=0$ одновременно для всех n.

Так как множество $\tilde{\omega}$ имеет полную меру, то почти для всех диаметров круга $\bar{\omega}$ почти все их точки принадлежат $\tilde{\omega}$. Пусть δ — один из таких диаметров. Таким образом, на δ почти всюду $dr_n\,d\tau_n=0$ для всех n.

Введем на δ в качестве параметра s взятое со знаком расстояние, отсчитываемое от точки $\bar{P}$. Покажем, что в точке $\bar{P}$ $r'\tau'=0$.

Обозначим P точку поверхности F, которая проектируется в $\bar{P}$, а $Q_n(s)$ — точку поверхиости F_n, которая проектируется в точку $\bar{Q}(s)$ прямой δ. Проведем через прямую δ вертикальиую плоскость α. Оиа пересечет поверхности F и F_n по выпуклым кривым γ и γ_n. При $n \to \infty$ кривые γ_n сходятся к γ. Точка P лежит иа кривой γ, а точки $Q_n(s)$ — иа кривых γ_n. Проведем касательную g кривой γ в точке P и одиу из полукасательных g_n — в точке $Q_n(s)$ каждой кривой γ_n. Утверждается, что если $|s|$ достаточио мало и достаточио велико n, то прямые g и g_n отличаются сколь угодио мало, т. е. образуют сколь угодио малый угол.

Действительио, так как P — гладкая точка кривой γ, то опориые прямые γ в точках, близких к P, мало отличаются от g. А при малом $|s|$ и $n \to \infty$ из любой подпоследовательиости прямых g_n можно выделить сходящуюся, имеющую своим пределом опорную прямую кривой γ в иекоторой точке, близкой к P. Отсюда и следует, что при малом $|s|$ и большом n прямые g и g_n отличаются сколь угодио мало.

Сделаииое замечаиие отиосительно близости прямых g и g_n позволяет утверждать, что

$$r'(0) = r'_n(s) + \varepsilon_n(s),$$

где ε_n при малом s и достаточио большом n сколь угодно мало. Здесь $r'_n(s)$ в точках, где r_n ие имеет производной, обозначает правую производиую.

Так как τ имеет дифференциал в точке $\bar{P}$, то

$$\tau'(0) = \frac{1}{s}(\tau(s) - \tau(0)) + \varepsilon(s),$$

где $\varepsilon(s)$ сколь угодио мало при достаточио малом $|s|$.

В силу сходимости поля τ_n к τ

$$\frac{1}{s}(\tau(s) - \tau(0)) = \frac{1}{s}(\tau_n(s) - \tau_n(0)) + \varepsilon'_n,$$

где ε'_n сколь угодио мало при достаточно большом n. Отсюда

$$\tau'(0) = \frac{1}{s}(\tau_n(s) - \tau_n(0)) + \varepsilon''_n(s),$$

где $\varepsilon''_n(s)$ сколь угодио мало, если достаточио мало s и достаточно велико n.

Так как фуикция $\tau_n(s)$ удовлетворяет условию Липшица, то она является абсолютно непрерывной и, следовательно, допускает представление

$$\tau_n(s) - \tau_n(0) = \int_0^s \tau'_n(s)\, ds.$$

Таким образом, мы приходим к следующему окончательному выражению для $\tau'(0)$:

$$\tau'(0) = \frac{1}{s}\int_0^s \tau_n'(s)\,ds + \varepsilon_n''(s).$$

Подставляя найденные выражения $r'(0)$ и $\tau'(0)$ в $r'\tau'$, получим

$$r'(0)\,\tau'(0) = \frac{1}{s}\int_0^s r_n'(s)\,\tau_n'(s)\,ds + \frac{1}{s}\int_0^s \varepsilon_n(s)\,\tau_n'(s)\,ds + r'(0)\,\varepsilon_n''(s).$$

Первый интеграл правой части этого равенства равен нулю, так как $r_n'(s)\tau_n'(s)=0$ почти для всех s. При малом s и достаточно большом n подынтегральное выражение во втором интеграле сколь угодно мало из-за $\varepsilon_n(s)$, так как $\tau_n'(s)$ равномерно ограничено по n и s. Поэтому второй интеграл сколь угодно мал, если достаточно мало $|s|$ и достаточно велико n. Последний член правой части $r'(0)\,\varepsilon_n''(s)$ сколь угодно мал при малом $|s|$ и достаточно большом n.

Так как правая часть равенства при подходящем выборе s и n сколь угодно мала, а левая часть не зависит ни от n, ни от s, то она равна нулю. Итак, в точке $\bar{P}$ в направлении прямой δ

$$dr\,d\tau = 0.$$

Так как почти все прямые, проходящие через точку $\bar{P}$, обладают свойством прямой δ, именно $dr_n\,d\tau_n=0$ выполняется почти всюду, то равенство $dr\,d\tau=0$ в точке $\bar{P}$ выполняется почти во всех направлениях. А так как r и τ в $\bar{P}$ имеют полный дифференциал, то $dr\,d\tau=0$ имеет место в каждом направлении в точке $\bar{P}$. Теорема доказана полностью.

Теорема 2. *Пусть F — общая выпуклая поверхность, проектирующаяся в строго выпуклую область $\bar{F}$ плоскости xy. Пусть f — функция, заданная на границе $\bar{F}$ и удовлетворяющая условию Липшица.*

Тогда существует изгибающее поле τ выпуклой поверхности F, вертикальная составляющая ζ которого на границе F равна f.

С точки зрения доказательства основной леммы, где эта теорема используется, для нас важен только тот случай, когда область $\bar{F}$ — круг. Поэтому мы ограничимся доказательством теоремы в этом случае.

Аппроксимируем поверхность F аналитической поверхностью ω с положительной всюду гауссовой кривизной. Функцию f аппроксимируем аналитической функцией h. Не ограничивая

общности, можно считать, что производная h по полярному углу не превосходит удвоенной константы Липшица для функции f.

Построим изгибающее поле τ поверхности ω с вертикальной составляющей h на границе, удовлетворяющее в центре круга $\bar{F}$: $x^2+y^2<R^2$ условиям $\xi=\eta=0$, $d\xi=d\eta=0$. Этим условиям нетрудно удовлетворить, подобрав надлежащим образом тривиальное слагаемое решения. Утверждается, что при $\omega \to F$ и $h \to f$ построенное изгибающее поле τ поверхности ω сходится к изгибающему полю поверхности F, имеющему вертикальную составляющую ζ на границе, равную f.

Для того чтобы это доказать, прежде всего покажем, что при $\omega \to F$ и $h \to f$ изгибающие поля τ равностепенно удовлетворяют условию Липшица в каждом круге $\bar{\omega}_\varepsilon$: $x^2+y^2 \leqslant R^2-\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$. Начнем с вертикальной составляющей $\zeta(x, y)$ поля τ.

Так как гауссова кривизна поверхности ω строго положительна и, следовательно, $rt-s^2>0$, то квадратичная форма

$$r\alpha^2-2s\alpha\beta+t\beta^2$$

является определенной и обращается в нуль только при $\alpha=\beta=0$. Отсюда следует, что на поверхности Φ: $z=\zeta(x, y)$ не может быть параболических точек. Действительно, в параболической точке $\zeta_{xx}\zeta_{yy}-\zeta_{xy}^2=0$. И, следовательно,

$$r\zeta_{yy}^2-2s\zeta_{yy}\zeta_{xy}+t\zeta_{xy}^2=\zeta_{yy}(r\zeta_{yy}-2s\zeta_{xy}+t\zeta_{xx})=0,$$

$$r\zeta_{xy}^2-2s\zeta_{xy}\zeta_{xx}+t\zeta_{xx}^2=\zeta_{xx}(r\zeta_{yy}-2s\zeta_{xy}+t\zeta_{xx})=0.$$

А отсюда $\zeta_{xx}=\zeta_{xy}=\zeta_{yy}=0$, т. е. точка является не параболической точкой, а точкой уплощения.

Обозначим γ край поверхности Φ. Кривая γ расположена на круговом цилиндре $x^2+y^2=R^2$. Так как производная h_θ ограничена некоторой постоянной, то наклон касательной кривой γ к плоскости xy не может быть слишком велик.

Так как поверхности Φ имеют неположительную кривизну, то можно считать, что все они расположены между параллельными плоскостями $z=\pm c$, где c зависит от $\max|f|$. Обозначим V_ε цилиндр, определяемый условиями

$$x^2+y^2 \leqslant R^2-\varepsilon, \qquad |z| \leqslant c.$$

Пусть P — произвольная точка цилиндра V_ε и α — плоскость, проходящая через эту точку. Так как наклон касательных кривой γ к плоскости xy равномерно ограничен, то существует такое ε', что как только угол наклона плоскости α к плоскости xy будет больше $\frac{\pi}{2}-\varepsilon'$, так эта плоскость будет пересекать кривую γ только в двух точках.

Обозначим Φ_ε ту часть поверхности Φ, которая проектируется в круг $\overline{\omega}_\varepsilon$. Утверждаем, что наклон касательных плоскостей поверхностей Φ_ε равномерно ограничен при $\omega \to F$ и $h \to f$.

Пусть P — гиперболическая точка поверхности Φ_ε. Она принадлежит цилиндру V_ε. Если наклон касательной плоскости α в точке P достаточно велик, то эта плоскость пересекает кривую γ — край поверхности Φ — только в двух точках. Но мы покажем сейчас, что таких точек пересечения должно быть по крайней мере четыре.

Действительно, так как P — гиперболическая точка, то плоскость α разбивает окрестность P на четыре «сектора». Два из них располагаются по одну сторону плоскости α, а два другие — по другую сторону. Секторы, расположенные по одну сторону плоскости α, не имеют общих точек, кроме граничных, лежащих в плоскости α. Действительно, если из одного сектора можно перейти в другой, оставаясь вне плоскости α, то один из двух других секторов будет иметь границу, целиком расположенную в плоскости α, что невозможно, так как Φ — поверхность неположительной кривизны. Таким образом, указанные четыре сектора принадлежат различным компонентам разбиения поверхности Φ плоскостью α.

Так как каждый из секторов подходит к границе поверхности Φ (кривой γ), то кривая γ плоскостью α разбивается по крайней мере на четыре части. Мы пришли к противоречию. Для случая гиперболической точки P утверждение доказано.

Пусть теперь P — точка уплощения поверхности Φ_ε. Касательная плоскость α в точке P может иметь и другие точки касания. Обозначим M_P множество таких точек. Если наклон плоскости α достаточно велик, то M_P не может совпадать со всей поверхностью. И найдутся сколь угодно близкие к M_P гиперболические точки. Действительно, пусть Q — граничная точка M_P. Если все точки, близкие к Q, являются точками уплощения, то каждая связная компонента множества таких точек лежит в плоскости, и такой плоскостью, очевидно, будет α, что невозможно.

Если взять гиперболическую точку P', близкую к M_P, то касательная плоскость в ней будет мало отличаться от α. И мы приходим к противоречию приведенным выше рассуждением для гиперболической точки P. Итак, во всех точках поверхности Φ_ε при $\omega \to F$ и $h \to f$ наклон касательных плоскостей к плоскости xy равностепенно ограничен.

Аналитически полученный результат можно сформулировать так. При $\omega \to F$ и $h \to f$ производные ζ_x и ζ_y в каждом круге $\overline{\omega}_\varepsilon$ равномерно ограничены. Отсюда следует, что из последователь-

ности функций $\zeta(x, y)$ можно выделить последовательность, равномерно сходящуюся в каждом круге $\overline{\omega}_\varepsilon$. Предельная функция $\zeta^0(x, y)$ в открытом круге $\overline{\omega}$ будет непрерывной и будет удовлетворять условию Липшица в каждом круге $\overline{\omega}_\varepsilon$. Покажем, что значениями f функция $\zeta^0(x, y)$ непрерывно продолжается на границу круга $\overline{F}$.

Обозначим γ^0 кривую на цилиндре $x^2+y^2=R^2$, задаваемую функцией f. Пусть Ω — выпуклая оболочка этой кривой. Она состоит из двух развертывающихся поверхностей Ω_1 и Ω_2, разделенных кривой γ^0. Утверждаем, что каждая из поверхностей Ω_1 и Ω_2 однозначно проектируется на плоскость xy.

Неоднозначность проектирования поверхности Ω_i на плоскость xy может быть только из-за наличия вертикального прямолинейного отрезка, принадлежащего ей. Очевидно, один из концов этого отрезка принадлежит γ^0, а другой (обозначим его Q) является внутренней точкой поверхности Ω_i. Так как поверхность Ω_i развертывающаяся, то через точку Q проходит прямолинейная образующая, концами упирающаяся в край поверхности — кривую γ_0. Но это невозможно из-за строгой выпуклости проекции кривой γ_0 на плоскость xy. Утверждение доказано.

Если функция $\zeta^0(x, y)$ значениями f не продолжается непрерывно на окружность круга $\overline{F}$, то это значит, что на поверхностях Φ есть такие точки P, которые при $\omega \to F$ и $h \to f$ неограниченно приближаются к точке P^0 цилиндра $x^2+y^2=R^2$, не принадлежащей кривой γ^0. Покажем, что это невозможно.

Действительно, точка P^0 не принадлежит поверхности Ω и расположена вне ее. Поэтому существует плоскость σ, отделяющая эту точку от поверхности Ω и, следовательно, от кривой γ_0. При достаточной близости ω к F и h к f кривая γ — граница поверхности Φ — близка к γ^0, а точка P поверхности Φ близка к P^0. Поэтому точка P и кривая γ тоже разделяются плоскостью σ. А это невозможно, так как Φ имеет неположительную кривизну.

Итак, функция $\zeta^0(x, y)$ значениями f непрерывно продолжается на окружность круга $\overline{F}$.

Покажем теперь, что производные горизонтальных составляющих ξ и η изгибающего поля τ поверхности ω равномерно ограничены при $\omega \to F$ и $h \to f$ в любом круге $\overline{\omega}_\varepsilon$. Для производных ξ_x и η_y это следует из уравнений изгибающего поля

$$\xi_x + p\zeta_x = 0, \qquad \eta_y + q\zeta_y = 0.$$

Рассмотрим производные ξ_y и η_x. Для производной ξ_y выше получено выражение в виде криволинейного интеграла. Этому

выражению можно придать следующую форму:

$$-\xi_y(Q)=\int\limits_P^Q \{d(p\zeta_y)+(s\zeta_x-r\zeta_y)\,dx+(t\zeta_x-s\zeta_y)\,dy\},$$

где P — точка поверхности ω, проектирующаяся в центр круга $\bar{F}$. Или, что то же самое,

$$-\xi_y(Q)=p\zeta_y\Big|_P^Q+\int\limits_P^Q(\zeta_x\,dq-\zeta_y\,dp).$$

Возьмем положительное $\varepsilon'<\varepsilon$. Оказывается, при достаточной близости поверхности ω к F точки P и Q можно соединить кривой на поверхности ω'_ε, длина сферического изображения которой не превосходит некоторой постоянной $l(\varepsilon, \varepsilon')$, зависящей только от ε и ε'. Доказательство этого свойства поверхностей ω, близких к F, не просто. Оно дано ниже. Возьмем в качестве пути интегрирования кривую, соединяющую точки P и Q, расположенную на поверхности $\omega_{\varepsilon'}$ и имеющую сферическое изображение не больше $l(\varepsilon, \varepsilon')$. Тогда

$$|\xi_y(Q)|\leqslant\left|p\zeta_y\Big|_P^Q\right|+\int\limits_P^Q\sqrt{\zeta_x^2+\zeta_y^2}\,\sqrt{dp^2+dq^2}.$$

Интеграл

$$\int\limits_P^Q\sqrt{dp^2+dq^2}$$

оценивается через $l(\varepsilon, \varepsilon')$ и максимум модулей p и q в $\omega_{\varepsilon'}$. Следовательно, для $|\xi_y|$ в ω_ε получается оценка в зависимости от максимума модулей ζ_x, ζ_y, p и q в круге $\omega_{\varepsilon'}$ и величины $l(\varepsilon, \varepsilon')$.

Оценка для производной η_x устанавливается аналогично. Теперь для окончания доказательства теоремы достаточно воспользоваться теоремой 1, предварительно выделив сходящуюся подпоследовательность изгибающих полей τ поверхностей ω. Теорема доказана.

Докажем то свойство аналитических выпуклых поверхностей ω, аппроксимирующих общую поверхность F, которым мы воспользовались в конце доказательства теоремы 2.

Пусть F — общая выпуклая поверхность, проектирующаяся в круг $\bar{\omega}$: $x^2+y^2<R^2$ плоскости xy, и ω — строго выпуклая аналитическая поверхность, близкая к F. Будем обозначать ω_ε ту часть поверхности ω, которая проектируется в круг $\bar{\omega}_\varepsilon$: $x^2+y^2<R^2-\varepsilon$.

Свойство, о котором идет речь, заключается в следующем. При достаточной близости поверхности ω к F любые две точки поверхности ω_ε можно соединить кривой на поверхности $\omega_{\varepsilon'}$, $\varepsilon' < \varepsilon$, причем длина сферического изображения этой кривой не превосходит $l(\varepsilon, \varepsilon')$.

Обозначим $\gamma_{\varepsilon'}$ край поверхности $\omega_{\varepsilon'}$; он представляет собой аналитическую кривую, проектирующуюся в окружность круга $\bar{\omega}_{\varepsilon'}$. Построим выпуклую оболочку кривой $\gamma_{\varepsilon'}$ и обозначим Ω ту ее часть, которая обращена выпуклостью так же, как и поверхность ω. Ω представляет собой развертывающуюся поверхность с краем $\gamma_{\varepsilon'}$, составленную из конечного числа аналитических поверхностей.

Возьмем две произвольные точки A и B на поверхности ω_ε. Прямыми, параллельными оси z, спроектируем эти точки на плоскость xy и на поверхность Ω. Проекции обозначим $\bar{A}$, $\bar{B}$ и A_1, B_1 соответственно. Проведем в точках A_1 и B_1 касательные плоскости α и β поверхности Ω. Эти плоскости отсекают от поверхности $\omega_{\varepsilon'}$ выпуклые колпаки ω_α и ω_β соответственно. Наиболее удаленные точки этих колпаков от плоскостей α и β соответственно обозначим A_2 и B_2.

Точки A и A_2 на колпаке ω_α можно соединить линией границы тени. Это линия, вдоль которой касательные плоскости параллельны некоторому направлению. Очевидно, сферическое изображение этой линии, как дуги большого круга, меньшей полуокружности, меньше π. Аналогично соединяем точки B и B_2 на колпаке ω_β.

Теперь для доказательства нашего утверждения остается только соединить надлежащим образом точки A_2 и B_2.

Соединим точки A_1 и B_1 на поверхности Ω кривой $\varkappa$, которая проектируется на плоскость xy в прямолинейный отрезок $\bar{A}\bar{B}$. Для каждой касательной плоскости Ω найдется параллельная касательная плоскость поверхности $\omega_{\varepsilon'}$. Отсюда следует, что на $\omega_{\varepsilon'}$ есть кривая, имеющая то же сферическое изображение, что и $\varkappa$. Эта кривая соединяет точки A_2 и B_2, так как по построению точек A_2 и B_2 касательные в этих точках поверхности $\omega_{\varepsilon'}$ параллельны касательным в точках A_1 и B_1 поверхности Ω.

Оценим длину сферического изображения кривой $\varkappa$. Обозначим $\delta(P)$ длину прямолинейной образующей поверхности Ω, проходящей через точку P, и рассмотрим интеграл вдоль кривой $\varkappa$

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_{\varkappa} \delta(P)\,|dn(P)|,$$

где $n(P)$ — нормаль поверхности Ω в точке P. Покажем, что этот интеграл оценивается через интеграл средней кривизны поверхности Ω.

Возьмем малый «прямоугольник» на поверхности Ω со стороной $\Delta\delta$ вдоль прямолинейной образующей и стороной Δs в направлении, перпендикулярном образующей. Интегральная средняя кривизна Ω на прямоугольнике равна $\sim\frac{1}{2}k\,\Delta\delta\,\Delta s$, где k — нормальная кривизна поверхности в направлении, перпендикулярном образующей.

По формуле Родрига $k\,\Delta s \simeq |\Delta n|$. Поэтому интегральную среднюю кривизну прямоугольника можно представить в виде

$$\frac{1}{2}\Delta\delta\,|\Delta n|.$$

Отсюда следует, что интеграл I представляет собой интеграл средней кривизны той части поверхности Ω, которая заполнена прямолинейными образующими, пересекающими кривую $\varkappa$. Таким образом, I не превосходит интеграла средней кривизны H поверхности Ω. Оценим величину этого интеграла. Имеем

$$H = \frac{1}{2}\iint\limits_{\bar{\omega}_{\varepsilon'}} \left| \frac{(1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r}{(1+p^2+q^2)} \right| dx\,dy.$$

Очевидно,

$$H \leqslant \frac{1}{2}\iint\limits_{\bar{\omega}_{\varepsilon'}} (|r| + 2|s| + |t|)\,dx\,dy.$$

И так как $rt - s^2 = 0$, то $2|s| \leqslant |r| + |t|$ и, следовательно,

$$H \leqslant \iint\limits_{\bar{\omega}_{\varepsilon'}} (|r| + |t|)\,dx\,dy.$$

Так как функция $p(x, y)$ монотонна на прямых $y=\text{const}$, а функция $q(x, y)$ монотонна на прямых $x=\text{const}$ из-за выпуклости поверхности Ω, то

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} |r(x, y)|\,dx = |p(x_2, y) - p(x_1, y)|,$$

$$\int\limits_{y_1}^{y_2} |t(x, y)|\,dy = |q(x, y_2) - q(x, y_1)|.$$

Отсюда следует, что если $\max|p|$ и $\max|q|$ на Ω не превосходят c, то

$$\iint\limits_{\bar{\omega}_{\varepsilon'}} |r|\,dx\,dy \leqslant 4cR, \quad \iint\limits_{\bar{\omega}_{\varepsilon'}} |t|\,dx\,dy \leqslant 4cR,$$

а следовательно, $H \leqslant 8cR$.

Максимум $|p|$ и $|q|$ на Ω не превосходит максимума $|p|$ и $|q|$ на поверхности $\omega_{\varepsilon'}$, так как для каждой касательной

плоскости Ω существует параллельная касательная плоскость $\omega_{\varepsilon'}$. Что же касается максимума $|p|$ и $|q|$ на поверхности $\omega_{\varepsilon'}$, то при достаточной близости поверхности ω к F он оценивается через угол наклона опорных плоскостей поверхности F на множестве $F_{\varepsilon'}$ тех точек, которые проектируются в замкнутый круг $\bar{\omega}_{\varepsilon'}$. Таким образом, можно считать, что константа c в оценке H зависит только от ε' и $H \leqslant 8c(\varepsilon')R$.

Теперь нетрудно оценить длину сферического изображения l^* кривой $\varkappa$. Имеем

$$l^*(\varkappa) = \int_{\varkappa} |dn|.$$

Так как каждая точка P кривой $\varkappa$ проектируется внутрь круга $\bar{\omega}_{\varepsilon}$, а прямолинейная образующая, проходящая через P, если $dn(P) \neq 0$, имеет концы на границе поверхности $\omega_{\varepsilon'}$, то длина каждой такой образующей не меньше хорды круга $\bar{\omega}_{\varepsilon'}$, касающейся круга $\bar{\omega}_{\varepsilon}$. Пусть δ_0 — длина этой хорды.

Обратимся к интегралу

$$I = \frac{1}{2} \int_{\varkappa} \delta(P)\,|dn(P)|.$$

Так как $\delta(P) \geqslant \delta_0$ в каждой точке P, где $dn \neq 0$, то

$$I \geqslant \frac{\delta_0}{2} \int_{\varkappa} |dn| = \frac{\delta_0}{2} l^*(\varkappa).$$

Но $I \leqslant H$, а $H \leqslant 8c(\varepsilon')R$. И мы получаем оценку

$$l^*(\varkappa) \leqslant \frac{16}{\delta_0} c(\varepsilon') R.$$

Итак, при достаточной близости поверхности ω к F любые две точки поверхности ω_{ε} можно соединить кривой на поверхности ω'_{ε}, причем эта кривая будет иметь сферическое изображение длины не больше

$$\frac{16}{\delta_0} c(\varepsilon') R + 2\pi.$$

Утверждение доказано.

§ 4. Специальная аппроксимация изгибающего поля общей выпуклой поверхности

Этот параграф посвящен изучению некоторых свойств усредненного по В. А. Стеклову изгибающего поля общей выпуклой поверхности, используемых главным образом при оценке некоторых интегралов (§ 5) в связи с доказательством основной леммы (§ 6).

Пусть F — общая выпуклая поверхность, однозначно проектирующаяся на плоскость xy, F_ω — компактная область на поверхности, которая проектируется на круг $\bar{\omega}$: $x^2+y^2 \leqslant R^2$. Следовательно, проекция всей поверхности F покрывает не только круг $\bar{\omega}$, но и некоторую его окрестность.

Пусть τ — изгибающее поле поверхности F. Рассмотрим векторное поле $\bar{\tau}$, определяемое по формуле

$$\bar{\tau}(x, y) = \iint\limits_{\bar{F}} \varphi(x-u, y-v)\,\tau(u, v)\,du\,dv,$$

где интегрирование распространяется на проекцию $\bar{F}$ поверхности F, а функция φ определяется условиями

$$\varphi(x-u, y-v) = \frac{1}{H_\delta} \exp \frac{(x-u)^2+(y-v)^2}{(x-u)^2+(y-v)^2-\delta^2} \quad \text{при} \quad (x-u)^2+(y-v)^2 < \delta^2$$

$$\varphi(x-u, y-v) = 0 \quad \text{при} \quad (x-u)^2+(y-v)^2 \geqslant \delta^2,$$

$$H_\delta = \iint\limits_{u^2+v^2 \leqslant 1} \exp \frac{u^2+v^2}{u^2+v^2-\delta^2}\,du\,dv.$$

Поле $\bar{\tau}$ будем называть *усреднением* поля τ или просто *средним полем*. Его исследование будет основано на следующих легко проверяемых свойствах функции $\varphi(x-u, y-v)$:

1. Функция φ имеет производные всех порядков по обоим аргументам.

2. Функция φ неотрицательна и при фиксированных x и y равна нулю вне круга радиуса δ с центром в точке (x, y).

3. $$\iint \varphi(x-u, y-v)\,du\,dv = 1,$$

где интегрирование распространяется на круг $(x-u)^2+(y-v)^2 \leqslant \delta^2$.

Отметим следующие свойства усредненного поля в круге $\bar{\omega}$:

а) поле $\bar{\tau}$ при $\delta \to 0$ равномерно сходится к τ;

б) поле $\bar{\tau}$ неограниченно дифференцируемо, т. е. имеет производные всех порядков;

в) первые производные поля $\bar{\tau}$ при $\delta \to 0$ остаются ограниченными и допускают представления в виде

$$\bar{\tau}_x(x, y) = \iint\limits_{\bar{F}} \varphi(x-u, y-v)\,\tau_u(u, v)\,du\,dv,$$

$$\bar{\tau}_y(x, y) = \iint\limits_{\bar{F}} \varphi(x-u, y-v)\,\tau_v(u, v)\,du\,dv.$$

Действительно, пусть δ настолько мало, что δ-окрестность круга $\bar{\omega}$ содержится в области $\bar{F}$. Тогда, применяя теорему о среднем, получим

$$\bar{\tau}(x, y) = \tau(u^*, v^*) \int\limits_{\bar{F}}\int \varphi(x-u, y-v)\,du\,dv = \tau(u^*, v^*),$$

где u^*, v^* — координаты некоторой точки, которая, отстоит от точки (x, y) на расстоянии, меньшем δ. А теперь равномерная сходимость поля $\bar{\tau}$ к τ при $\delta \to 0$ следует из непрерывности τ в $\bar{F}$.

Свойство б) следует из неограниченной дифференцируемости функции φ.

Для доказательства свойства в) заметим, что функция $\varphi(x-u, y-v)\tau(u, v)$ в достаточно малой ε-окрестности $\bar{\omega}_\varepsilon$ круга $\bar{\omega}$ абсолютно непрерывна по u при $v=\text{const}$ и по v при $u=\text{const}$. Следовательно, она является неопределенным интегралом от своей производной. А так как при $(x, y)\in\bar{\omega}$ на границе области $\bar{\omega}_\varepsilon$ функция $\varphi(x-u, y-v)\tau(u, v)=0$, то

$$\int \frac{d}{du}(\varphi(x-u, y-v)\,\tau(u, v))\,du = 0.$$

Интегрируя это равенство по v, получим

$$\int\limits_{\bar{\omega}_\varepsilon}\int \frac{d}{du}(\varphi(x-u, y-v)\,\tau(u, v))\,du\,dv = 0.$$

Вместо области интегрирования $\bar{\omega}_\varepsilon$ можно взять $\bar{F}$, так как вне $\bar{\omega}_\varepsilon$ функция $\varphi(x-u, y-v)\tau(u, v)$ равна нулю. Выполняя дифференцирование по u подынтегральной функции и замечая, что

$$\bar{\tau}_x(x, y) = \int\limits_{\bar{F}}\int \varphi_x(x-u, y-v)\,\tau(u, v)\,du\,dv,$$

$$\varphi_x(x-u, y-v) = -\varphi_u(x-u, y-v),$$

получаем указанное представление

$$\bar{\tau}_x(x, y) = \int\limits_{\bar{F}}\int \varphi(x-u, y-v)\,\tau_u(u, v)\,du\,dv.$$

Формула для $\bar{\tau}_y(x, y)$ выводится аналогично.

Ограниченность $\bar{\tau}_y(x, y)$ следует из ограниченности производной $\tau_u(u, v)$, что в свою очередь обеспечено условием Липшица для векторного поля τ. Производная $\bar{\tau}_y(x, y)$ ограничена при $\delta \to 0$ по той же причине.

Определим в замкнутом круге $\bar{\omega}$ множество M_ϑ следующим образом. Точку $\bar{P}$ отнесем к множеству M_ϑ, если точка P поверхности F, которая проектируется в $\bar{P}$, имеет по крайней мере две опорные плоскости, образующие угол не меньше ϑ. Очевидно, M_ϑ — замкнутое множество. Обозначим G_ϑ открытое множество, содержащее M_ϑ.

Аппроксимируем поверхность F аналитической поверхностью ω и обозначим $\bar{r}(x, y)$ и $r(x, y)$ векторы точек поверхностей ω и F.

Утверждается, что *при достаточной близости поверхности* ω *к* F *и при достаточной близости поля* $\bar{\tau}$ *к* τ *(т. е. при малом* δ*)*

$$|\bar{r}'\bar{\tau}'| < \varepsilon_\vartheta$$

в каждой точке множества $\bar{\omega} - G_\vartheta$ *при дифференцировании по любому направлению, причем* $\varepsilon_\vartheta \to 0$, *когда* $\vartheta \to 0$. Докажем это.

Пусть P — произвольная точка поверхности F_ω, проекция которой $\bar{P}$ принадлежит множеству $\bar{\omega} - G_\vartheta$, а Q — произвольная точка F_ω с проекцией $\bar{Q}$. Тогда существует $\varepsilon' > 0$, не зависящее от точек P и Q, такое, что каждый раз, когда расстояние между точками $\bar{P}$ и $\bar{Q}$ меньше ε', угол между опорными плоскостями в точках P и Q не больше 2ϑ.

Действительно, если допустить противное, то из компактности $\bar{\omega} - G_\vartheta$ легко заключить, что в $\bar{\omega} - G_\vartheta$ есть точка с двумя опорными плоскостями, образующими угол не меньше 2ϑ, что невозможно.

По той же причине при достаточной близости поверхности ω к F углы между их опорными плоскостями в соответствующих точках, проектирующихся в $\bar{\omega} - G_\vartheta$, также не превосходят 2ϑ.

Поэтому можно считать, что для любой точки $\bar{P}$, принадлежащей $\bar{\omega} - G_\vartheta$, и точки $\bar{Q}$, отстоящей от нее меньше чем на ε', при дифференцировании по любому направлению

$$\bar{r}'(\bar{P}) = r'(Q) + \varepsilon'',$$

где ε'' сколь угодно мало, если мало ϑ.

Воспользуемся теперь интегральным представлением для $\bar{\tau}'$. Имеем

$$\bar{\tau}'(\bar{P}) = \int\int \varphi(\bar{P} - \bar{Q})\,\tau'(\bar{Q})\,d\bar{Q},$$

$$\bar{r}'(\bar{P})\,\bar{\tau}'(\bar{P}) = \int\int \varphi(\bar{P} - \bar{Q})\,\bar{r}'(\bar{P})\,\tau'(\bar{Q})\,d\bar{Q}.$$

Подставляя в правую часть этой формулы полученное выше выражение для $\bar{r}'(\bar{P})$ и замечая, что $r'(Q)\tau'(Q) = 0$ почти всюду, получим

$$\bar{r}'(\bar{P})\,\bar{\tau}'(\bar{P}) = \int\int \varphi(\bar{P} - \bar{Q})\,\varepsilon''\,d\bar{Q}.$$

А отсюда следует, что $\bar{r}'(\bar{P})\bar{\tau}'(\bar{P})$ сколь угодно мало при достаточно малом ϑ. Утверждение доказано.

Пусть $\bar{G}^*$ — открытое множество, содержащее все те точки круга ω, в которые проектируются конические точки поверхности F. Множество $M_\vartheta - G^*$ состоит из проекций ребристых точек поверхности F с углом при ребре не меньше ϑ. Отнесем каждой точке множества $M_\vartheta - G^*$ направление, именно проекцию соответствующего ребра поверхности. (Под ребром поверхности в ребристой точке мы подразумеваем прямую, через которую проходят все опорные плоскости поверхности в этой точке.) Определяемое таким образом поле направлений на множестве $M_\vartheta - G^*$ является непрерывным, более того, оно является равномерно непрерывным.

Если допустить противное, то придем к заключению, что на множестве точек поверхности, которое проектируется в $M_\vartheta - G^*$, есть хотя бы одна коническая точка, что невозможно.

Пусть ε и ε_1 — два положительных числа. Пусть $\bar{P}$ — произвольная точка круга $\bar{\omega}$, ε-окрестность которой содержит точки $M_\vartheta - G^*$. Возьмем в точке $\bar{P}$ любое направление g, которое образует с «направлением ребра» в точке $\bar{Q} \subset M_\vartheta - G^*$ из ε-окрестности $\bar{P}$ угол меньше ε_1.

Утверждается, что при достаточной близости поверхности ω к F, поля $\bar{\tau}$ к τ и при достаточно малых ε и ε_1 произведение $\bar{r}'_g(\bar{P})\bar{\tau}'_g(\bar{P})$ сколь угодно мало равномерно относительно выбора точки $\bar{P}$ и направления g. Докажем это.

Пусть S — произвольная точка поверхности F, а S_ω — точка поверхности ω, которая проектируется в точку $\bar{S}$ из ε-окрестности точки $\bar{P}$. При достаточно малом ε опорная плоскость в S образует малый угол с направлением ребра в точке Q. Отсюда следует, что при достаточно малом ε_1 производные $r'_g(\bar{S})$ и $r'_g(\bar{Q})$ отличаются мало, причем равномерно мало относительно выбора $\bar{P}$, $\bar{Q}$ и g.

При достаточной близости поверхности ω к F касательная плоскость в точке S_ω поверхности ω тоже образует малый угол с ребром в точке Q, причем равномерно малый по отношению к выбору точки $\bar{P}$. Следовательно, $\bar{r}'_g(\bar{P})$ и $r'_g(\bar{S})$ отличаются мало, и поэтому можно записать

$$\bar{r}'_g(\bar{P}) = r'_g(\bar{S}) + \varepsilon_2,$$

где ε_2 мало независимо от выбора точек $\bar{P}$ и $\bar{Q}$, если малы ε и ε_1.

А теперь заключение о малости $\bar{r}'_g(\bar{P})\bar{\tau}'_g(\bar{P})$ получается так же, как и в предыдущем доказательстве, с помощью интегрального представления для $\bar{\tau}'_g$.

Построенное нами векторное поле $\bar{\tau}$ не является изгибающим для поверхности ω. В связи с доказательством основной леммы требуется изменить это поле вблизи края поверхности ω так, чтобы оно было изгибающим для ограничивающей поверхность кривой. Аналитически это значит, что поле $\bar{\tau}$ надо изменить некоторым полем $\tilde{\tau}$ так, чтобы в точках ограничивающей поверхность ω кривой при дифференцировании вдоль кривой было $d(\bar{\tau}+\tilde{\tau})\,d\bar{r}=0$.

Обозначим γ край поверхности ω, а $\bar{\gamma}$ — его проекцию на плоскость xy, т. е. окружность, ограничивающую круг $\bar{\omega}$. Введем на плоскости xy полярные координаты ρ, ϑ и положим на окружности $\bar{\gamma}$

$$\bar{r}_\vartheta \bar{\tau}_\vartheta = \varepsilon(\vartheta).$$

Векторное поле $\tilde{\tau}$ вдоль кривой γ мы будем искать в виде

$$\tilde{\tau} = \lambda(\vartheta)\, t + \mu(\vartheta)\, n,$$

где t и n — единичные векторы касательной и нормали окружности $\bar{\gamma}$. Для того чтобы поле $\bar{\tau}+\tilde{\tau}$ на кривой γ было изгибающим, надо, чтобы $\tilde{\tau}$ удовлетворяло условию

$$\bar{r}_\vartheta \tilde{\tau}_\vartheta = -\varepsilon(\vartheta).$$

Имеем

$$\tilde{\tau}_\vartheta = (\lambda_\vartheta - \mu)\, t + (\lambda + \mu_\vartheta)\, n, \quad \bar{r}_\vartheta = Rt + \ldots,$$

где в выражении $\bar{r}_\vartheta$ через R обозначен радиус круга $\bar{\omega}$ (не выписана составляющая вектора $\bar{r}_\vartheta$ по оси z). Отсюда

$$\bar{r}_\vartheta \tilde{\tau}_\vartheta = R(\lambda_\vartheta - \mu).$$

Таким образом, для того чтобы поле $\bar{\tau}+\tilde{\tau}$ на кривой γ было изгибающим, надо, чтобы λ и μ удовлетворяли уравнению

$$\lambda_\vartheta - \mu = -\frac{1}{R}\,\varepsilon(\vartheta).$$

В качестве $\mu(\vartheta)$ мы возьмем постоянную и подберем ее так, чтобы определяемая по формуле

$$\lambda = \int\limits_0^\vartheta \left(\mu - \frac{1}{R}\,\varepsilon(\vartheta)\right) d\vartheta$$

функция λ была периодической. Очевидно, для этого постоянную μ надо подчинить условию

$$\int\limits_0^{2\pi} \left(\mu - \frac{1}{R}\,\varepsilon(\vartheta)\right) d\vartheta = 0,$$

откуда

$$\mu = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \varepsilon(\vartheta)\, d\vartheta.$$

Мы построили поле $\tilde{\tau}$ на окружности $\bar{\gamma}$ круга $\bar{\omega}$. Теперь мы продолжим его внутрь круга $\bar{\omega}$ по формуле

$$\tilde{\tau} = \psi(\rho)(\lambda(\vartheta)\, t + \mu n),$$

где $\psi(\rho)$ — дважды дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$\psi(R) = 1, \quad \psi(\rho) = 0 \quad \text{при} \quad \rho \leqslant R' < R.$$

Рассмотрим некоторые свойства векторного поля $\tilde{\tau}$. Заметим, что вертикальная составляющая этого поля равна нулю.

Пусть на границе поверхности $F_{\bar{\omega}}$ — области на поверхности F, которая проектируется в круг $\bar{\omega}$, нет конических точек и пусть почти все точки этой границы являются гладкими. Ввиду того, что множество конических точек выпуклой поверхности не более чем счетно, а множество негладких точек нулевой меры, это условие выполняется почти для всех кругов $\bar{\omega}$, т. е. почти для всех R.

Возьмем круг $\bar{\omega}'$ несколько большего радиуса, чем круг $\bar{\omega}$, и определим в нем множество M_ϑ таких точек, в каждую из которых проектируется точка поверхности F, имеющая по крайней мере две опорные плоскости, образующие угол не меньше ϑ. Такое множество мы уже рассматривали в начале параграфа. Пусть M_ϑ^ε обозначает ε-окрестность множества M_ϑ. При достаточно малом ε мера множества точек окружности $\bar{\gamma}$, принадлежащая M_ϑ^ε, сколь угодно мала, так как мера множества точек окружности $\bar{\gamma}$, принадлежащих M_ϑ, равна нулю, а множество M_ϑ замкнутое.

По свойству усредненного поля $\bar{\tau}$ отсюда следует, что при достаточной близости поверхности ω к F и при достаточной близости поля $\bar{\tau}$ к τ мера множества тех точек окружности $\bar{\gamma}$, в которых $|\bar{r}_\vartheta \bar{\tau}_\vartheta| > \varepsilon > 0$, сколь угодно мала. Иначе говоря, функция $\varepsilon(\vartheta)$, определяющая поле $\tilde{\tau}$, при $\omega \to F$ и $\bar{\tau} \to \tau$ сходится к нулю по мере.

Отмеченное свойство функции $\varepsilon(\vartheta)$ позволяет заключить, что постоянная μ и функция $\lambda(\vartheta)$, определяющие векторное поле $\tilde{\tau}$:

$$\mu = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \varepsilon(\vartheta)\, d\vartheta, \qquad \lambda = \int_0^{\vartheta} \left(\mu - \frac{1}{R}\, \varepsilon(\vartheta)\right) d\vartheta,$$

стремятся к нулю, когда $\omega \to F$, а $\bar{\tau} \to \tau$. Отсюда, в свою очередь, принимая во внимание выражение для $\tilde{\tau}$:

$$\tilde{\tau} = \psi(\rho)(\lambda(\vartheta)\, t + \mu n),$$

заключаем, что при $\omega \to F$ и $\bar{\tau} \to \tau$ поле $\tilde{\tau}_\rho \to 0$ равномерно в круге $\bar{\omega}$, а $\tilde{\tau}_\vartheta \to 0$ по мере.

В заключение еще заметим, что при $\omega \to F$ и $\bar{\tau} \to \tau$ производная $\tilde{\tau}_\vartheta$ равномерно ограничена.

§ 5. Оценки некоторых интегралов

В доказательстве основной леммы, которое было намечено в § 2, возникает необходимость в оценке некоторых интегралов, содержащихся в основном интегральном соотношении. Получению этих оценок и посвящается настоящий параграф.

Сохраним обозначения предыдущих параграфов. Именно, пусть F — выпуклая поверхность, однозначно проектирующаяся на плоскость xy; F_ω — компактная область на поверхности F, проектирующаяся в круг $\bar{\omega}$: $x^2+y^2<R^2$; ω — строго выпуклая аналитическая поверхность, аппроксимирующая поверхность F. Чтобы не вводить новых обозначений, область поверхности ω, которая проектируется в круг $\bar{\omega}$, также будем обозначать ω.

Так как проекция поверхности F на плоскость xy покрывает круг $\bar{\omega}$ вместе с его границей $\bar{\gamma}$, то наклон ее опорных плоскостей к плоскости xy в области F_ω и на ее границе ограничен. Отсюда следует, что при достаточной близости поверхности ω к F наклон ее касательных плоскостей к плоскости xy ограничен равномерно относительно близости ω к F. Таким образом, при достаточной близости ω к F производные p и q функции $z(x, y)$, задающей поверхность ω, равномерно ограничены. В дальнейшем будем считать, что $|p|$ и $|q|$ не превосходят постоянной c_1.

Рассмотрим три интеграла:

$$\iint\limits_{\bar{\omega}} |r|\,dx\,dy, \qquad \iint\limits_{\bar{\omega}} |s|\,dx\,dy, \qquad \iint\limits_{\bar{\omega}} |t|\,dx\,dy,$$

где r, s, t обозначают вторые производные функции $z(x, y)$, задающей поверхность ω. Так как функция p строго монотонна по x на любой хорде AB ($y=\text{const}$) круга $\bar{\omega}$, то

$$\int\limits_A^B |r|\,dx \doteq |p(B) - p(A)| \leqslant 2c_1,$$

и, следовательно,

$$\iint\limits_{\bar\omega} |r|\,dx\,dy \leqslant 4c_1R.$$

Аналогично

$$\iint\limits_{\bar\omega} |t|\,dx\,dy \leqslant 4c_1R.$$

Так как поверхность ω выпуклая и, следовательно, $s^2 \leqslant rt$, то

$$2|s| \leqslant |r| + |t|.$$

Отсюда

$$\iint\limits_{\bar\omega} |s| \leqslant 4c_1R.$$

Обратимся к интегралу средней кривизны H поверхности ω:

$$H = \frac{1}{2}\iint\limits_{\bar\omega} \left| \frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{1+p^2+q^2} \right| dx\,dy.$$

Этот интеграл замечателен тем, что, имея геометрический смысл, не зависит от системы координат xy. Величина интеграла H легко оценивается. Действительно,

$$H \leqslant \frac{1}{2}\iint\limits_{\bar\omega} (|r| + |s| + |t|)\,dx\,dy \leqslant 6c_1R.$$

Пусть теперь в круге $\bar\omega$ имеем какую-нибудь область $\bar\omega^*$. Оценим интеграл

$$\iint\limits_{\bar\omega^*} |r|\,dx\,dy$$

в зависимости от интеграла средней кривизны $H_{\bar\omega^*}$ по области ω^* поверхности ω.

Имеем

$$\frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{1+p^2+q^2} = \frac{r}{1+p^2+q^2} + \frac{rq^2 - 2spq + tp^2}{1+p^2+q^2} + \frac{t}{1+p^2+q^2}.$$

Так как форма $r\alpha^2 - 2s\alpha\beta + t\beta^2$ определенная $(rt - s^2 > 0)$, то r, t и $rq^2 - 2spq + tq^2$ одного знака. Отсюда следует, что

$$\frac{|r|}{1+p^2+q^2} \leqslant \left| \frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{1+p^2+q^2} \right|.$$

И мы получаем интересующую нас оценку

$$\iint\limits_{\bar\omega^*} |r|\,dx\,dy \leqslant H_{\bar\omega^*},$$

где $H_{\bar{\omega}*}$ — средняя кривизна, нормированная множителем $1+2c_1^2>1+p^2+q^2$.

В этой оценке существенно заметить то, что она верна в любой системе координат xy.

Обозначим M_α замкнутое множество точек поверхности, состоящее из ребристых точек с углом при ребре, не меньшим α. Проекцию этого множества на плоскость xy обозначим $\overline{M}_\alpha$. Покроем круг $\bar{\omega}$ сетью из маленьких квадратов Δ и обозначим G_α множество, составленное из тех квадратов Δ, которые содержат точки $\overline{M}_\alpha$.

Возьмем какой-нибудь квадрат Δ множества G_α. Он содержит хотя бы одну точку множества $\overline{M}_\alpha$. Эта точка является проекцией некоторой ребристой точки поверхности F. Примем проекцию ребра за ось y, а перпендикулярную к ней прямую — за ось x.

В такой системе координат оценим три интеграла:

$$\int\limits_\Delta\int |r|\,dx\,dy, \qquad \int\limits_\Delta\int |s|\,dx\,dy, \qquad \int\limits_\Delta\int |t|\,dx\,dy.$$

Как показано выше, первый из этих интегралов не превосходит интеграла средней кривизны той части поверхности ω, которая проектируется в квадрат Δ. Отсюда следует, что сумма таких интегралов

$$\sum_\Delta \int\limits_\Delta\int |r|\,dx\,dy$$

не превосходит интеграла средней кривизны всей поверхности ω и поэтому остается ограниченной при $\omega\to F$. Здесь существенно заметить то, что внутри каждого квадрата Δ выбирается своя система координат xy указанным образом.

Назовем клеткой Δ' квадрат, составленный из квадрата Δ и еще восьми квадратов, имеющих с квадратом Δ общую сторону или вершину. Подобно предыдущему устанавливаем, что

$$\sum_\Delta \int\limits_{\Delta'}\int |r|\,dx\,dy$$

не превосходит интеграла средней кривизны поверхности ω, умноженного на девять и, следовательно, остается ограниченной при $\omega\to F$.

Докажем теперь следующее утверждение. *Существует постоянная $\bar{\varepsilon}(\alpha)>0$ такая, что если стороны квадратов Δ достаточно малы и поверхность ω достаточно близка к F, то в каждой клетке Δ' на каждой прямой $y=\text{const}$, пересекающей квадрат Δ, изменение p не меньше $\bar{\varepsilon}(\alpha)$, а на каждой пря-*

мой $x=\mathrm{const}$ *внутри квадрата* Δ *изменение* q *можно считать сколь угодно малым, т. е. меньшим любого наперед заданного* $\varepsilon>0$.

Сначала мы это утверждение докажем не для поверхности ω, аппроксимирующей поверхность F, а для самой поверхности F.

Допустим, утверждение неверно. Тогда существует последовательность клеток Δ'_n с неограниченно убывающими сторонами δ_n и в каждой из них есть либо прямая g^1_n ($y=\mathrm{const}$), пересекающая квадрат Δ_n, на которой изменение p меньше $1/n$, либо прямая g^2_n ($x=\mathrm{const}$), на которой изменение q внутри Δ_n больше ε. Каждой такой клетке Δ'_n на поверхности F соответствует область $F_{\Delta'_n}$, которая проектируется в Δ'_n.

Увеличим поверхность $F_{\Delta'_n}$ подобно в $1/\delta_n$ раз и полученную поверхность обозначим $F^{\delta}_{\Delta'_n}$. Из последовательности выпуклых поверхностей $F^{\delta}_{\Delta'_n}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Не ограничивая общности, будем считать, что сходится сама последовательность $F^{\delta}_{\Delta'_n}$. Утверждаем, что предельная поверхность Z последовательности $F^{\delta}_{\Delta'_n}$ представляет собой цилиндрическую поверхность с ребром и углом при этом ребре, не меньшим α.

Обозначим A_n отмеченную на поверхности $F_{\Delta'_n}$ ребристую точку и h_n — ребро в ней. Вводя систему координат xy в клетке Δ', мы приняли направление оси x перпендикулярным проекции ребра h_n на плоскость xy. На поверхности $F^{\delta}_{\Delta'_n}$ точке A_n и ребру h_n соответствуют точка A^{δ}_n и ребро в ней h^{δ}_n. Можно считать, что A^{δ}_n и h^{δ}_n сходятся при $n\to\infty$. Предельная точка $A^0=\lim A^{\delta}_n$ является ребристой точкой поверхности Z с углом при ребре $h^0=\lim h^{\delta}_n$, не меньшим α.

Допустим, поверхность Z не цилиндрическая. Тогда на ней есть точка B^0 и в ней опорная плоскость β^0, образующая с направлением ребра h^0 угол, больший некоторого $\varepsilon'>0$. Отсюда следует, что на поверхности $F^{\delta}_{\Delta'_n}$ при достаточно большом n есть точка B^{δ}_n и в ней опорная плоскость β^{δ}_n, образующая угол с ребром h^{δ}_n, больший ε'. Переходя к поверхности $F_{\Delta'_n}$, заключаем, что на ней есть точка B_n и опорная плоскость β_n в этой точке, образующая с ребром h_n угол больше ε'.

Не ограничивая общности, можно считать, что последовательность точек A_n на поверхности F сходится к некоторой точке A. Очевидно, к точке A сходится и последовательность точек B_n. Так как каждая точка A_n ребристая с углом при ребре h_n, не меньшим α, а опорная плоскость β_n в точке B_n пересекает ребро h_n под углом, не меньшим ε', то A — коническая точка. Но это невозможно, так как A принадлежит множеству M_α. Итак, Z — цилиндрическая поверхность. Она имеет ребро h^0, проходящее через точку A_0.

Если допустить, что в каждой клетке Δ'_n есть прямая g_n^1 ($y=$ $=$const), пересекающая квадрат Δ_n, на которой изменение p меньше $1/n$, то нетрудно заключить, что на цилиндре Z есть прямолинейный отрезок, пересекающий ребро h^0, что невозможно.

Если же допустить, что в каждой клетке Δ'_n есть прямая g_n^2 ($x=$const), на которой изменение q внутри Δ_n больше ε, то приходим к выводу, что существует вертикальная плоскость, проходящая через образующую цилиндра, и в ней две точки, может быть совпадающие, в которых существуют различные опорные прямые Z, лежащие в упомянутой плоскости. А это невозможно, так как эти прямые должны совпадать с образующей, по которой плоскость пересекает цилиндр Z.

Итак, мы доказали, что если стороны квадратов Δ достаточно малы, то в каждой клетке Δ', на каждой прямой $y=$const, пересекающей квадрат Δ, изменение p не меньше $\bar{\varepsilon}(\alpha)$, а на каждой прямой $x=$const внутри квадрата Δ изменение q меньше $\varepsilon>0$.

Так как число клеток конечно, то можно взять поверхность ω настолько близкой к F, что указанное свойство изменения p и q в клетках будет иметь место для поверхности ω.

Итак, существует постоянная $\bar{\varepsilon}(\alpha)>0$, зависящая только от α, такая, что если стороны квадратов Δ достаточно малы и поверхность ω достаточно близка к F, то в каждой клетке Δ', на каждой прямой $y=$const, пересекающей квадрат Δ, изменение p не меньше $\bar{\varepsilon}(\alpha)$, а на каждой прямой $x=$const внутри квадрата Δ изменение q можно считать сколь угодно малым, т. е. меньшим любого наперед заданного числа $\varepsilon>0$.

Возьмем число ε настолько малым, чтобы $\bar{\varepsilon}(\alpha)>N^2\varepsilon$, где N достаточно велико. Тогда, так как

$$\iint_{\Delta'} |r|\,dx\,dy > \delta\bar{\varepsilon}(\alpha), \quad \iint_{\Delta} |t|\,dx\,dy < 2\delta\varepsilon$$

(δ — сторона квадрата Δ), то

$$\frac{2}{N^2}\iint_{\Delta'} |r|\,dx\,dy > \iint_{\Delta} |t|\,dx\,dy$$

и, следовательно,

$$\sum_{\Delta} \iint_{\Delta} |t|\,dx\,dy \leqslant \frac{18}{N^2} H_\omega,$$

где H_ω — интеграл средней кривизны поверхности ω.

Так как $|s|^2 \leqslant |r|\,|t|$, то

$$|s| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{|r|}{N} + N|t|\right).$$

Отсюда

$$\iint_{\Delta} |s|\,dx\,dy \leqslant \frac{1}{2N} \iint_{\Delta} |r|\,dx\,dy + \frac{N}{2} \iint_{\Delta} |t|\,dx\,dy,$$

и, следовательно,

$$\sum_{\Delta} \iint_{\Delta} |s|\,dx\,dy \leqslant \frac{10}{N} H_\omega.$$

Итак, если стороны квадратов достаточно малы и поверхность ω достаточно близка к F, то

$$\sum_{\Delta \subset G_\alpha} \iint_{\Delta} |r|\,dx\,dy \leqslant H_\omega,$$

$$\sum_{\Delta \subset G_\alpha} \iint_{\Delta} |s|\,dx\,dy \leqslant \frac{10}{N} H_\omega,$$

$$\sum_{\Delta \subset G_\alpha} \iint_{\Delta} |t|\,dx\,dy \leqslant \frac{18}{N^2} H_\omega.$$

Теперь поверхность ω, аппроксимирующую поверхность F, мы будем считать заданной в полярных координатах: $z=z(\rho, \vartheta)$.

Пусть почти все точки поверхности F, которые проектируются в окружность круга $\bar{\omega}$, являются гладкими. Обозначим $\bar{\omega}_\varepsilon$ кольцевую область, определяемую неравенствами $R-\varepsilon<\rho<R$, где R — радиус круга $\bar{\omega}$. Утверждается, что при достаточной близости поверхности ω к F интеграл

$$\iint_{\bar{\omega}_\varepsilon} |z_{\rho\rho}|\,\rho\,d\rho\,d\vartheta$$

мал вместе с ε.

Пусть $\bar{m}_\alpha$ — множество тех точек окружности $\bar{\gamma}$ круга $\bar{\omega}$, в которые проектируются точки поверхности F, имеющие

по крайней мере две опорные плоскости, образующие угол не меньше α. Множество $\overline{m}_\alpha$ замкнутое и имеет линейную меру на γ, равную нулю.

Пусть $\overline{m}_\alpha^{\varepsilon'}$ будет ε'-окрестность множества $\overline{m}_\alpha$ на $\overline{\gamma}$. При достаточно малом ε' линейная мера на $\overline{\gamma}$ этого множества будет сколь угодно малой. При достаточно малом ε'' плоская ε''-окрестность $n_\alpha^{\varepsilon''}$ множества $\gamma - \overline{m}_\alpha^{\varepsilon'}$ не будет содержать точек, в которые проектировались бы точки поверхности F, имеющие две опорные плоскости с углом между ними не меньше α.

Отсюда следует, что при достаточной близости поверхности ω к F изменение z_ρ на каждой прямой $\vartheta = \text{const}$ внутри $n_\alpha^{\varepsilon''}$ будет меньше некоторого $\varepsilon(\alpha)$, сколь угодно малого при малом α. И так как изменение z_ρ на любой прямой $\vartheta = \text{const}$, очевидно, ограничено, то при достаточно малом ε и достаточной близости поверхности ω к F

$$\int\limits_{\overline{\omega}_\varepsilon}\int |z_{\rho\rho}|\, \rho\, d\rho\, d\vartheta$$

сколь угодно мал.

Рассмотрим теперь интеграл

$$\int\limits_{\rho=\text{const}} |z_{\vartheta\vartheta}|\, d\vartheta$$

для ρ, близких к R.

Так как поверхность ω выпуклая, то нормальная кривизна ее вдоль линии $\rho = \text{const}$ сохраняет знак и, следовательно, выражение

$$\begin{vmatrix} x_{\vartheta\vartheta} & y_{\vartheta\vartheta} & z_{\vartheta\vartheta} \\ x_\rho & y_\rho & z_\rho \\ x_\vartheta & y_\vartheta & z_\vartheta \end{vmatrix} = \rho z_{\vartheta\vartheta} + \rho^2 z_\rho$$

сохраняет знак. Пусть для определенности $z_{\vartheta\vartheta} + \rho z_\rho > 0$. При $\omega \to F$ величина $|\rho z_\rho|$ остается ограниченной, меньшей некоторой постоянной c. Следовательно,

$$|z_{\vartheta\vartheta}| < z_{\vartheta\vartheta} + C.$$

Отсюда

$$\int |z_{\vartheta\vartheta}|\, d\vartheta \leqslant \int (z_{\vartheta\vartheta} + C)\, d\vartheta = 2\pi C.$$

Таким образом, при $\omega \to F$ интеграл

$$\int |z_{\vartheta\vartheta}|\, d\vartheta$$

остается ограниченным некоторой постоянной.

Как следствие отсюда получается, что интеграл

$$\iint\limits_{\bar{\omega}_\varepsilon} |z_{\vartheta\vartheta}| \rho \, d\rho \, d\vartheta$$

при $\omega \to F$ имеет порядок ε.

Рассмотрим, наконец, интеграл

$$\iint\limits_{\bar{\omega}_\varepsilon} |z_{\rho\vartheta}| \rho \, d\rho \, d\vartheta.$$

Знак гауссовой кривизны поверхности ω определяется выражением

$$z_{\rho\rho}(z_{\vartheta\vartheta} + \rho z_\rho) - (z_{\rho\vartheta} - z_\rho)^2.$$

И так как гауссова кривизна поверхности положительна, то

$$(z_{\rho\vartheta} - z_\rho)^2 \leqslant z_{\rho\rho}(z_{\vartheta\vartheta} + \rho z_\rho).$$

Отсюда получается неравенство

$$|z_{\rho\vartheta}| \leqslant |z_\rho| + |z_{\rho\rho}| + |z_{\vartheta\vartheta}| + |\rho z_\rho|,$$

и, следовательно, интеграл

$$\iint\limits_{\bar{\omega}_\varepsilon} |z_{\rho\vartheta}| \rho \, d\rho \, d\vartheta$$

при малом ε и при достаточной близости ω к F сколь угодно мал.

Сохраняя обозначения, принятые ранее, обозначим σ квадратичную дифференциальную форму

$$d\bar{r}(d\bar{\tau} + d\tilde{\tau}) = \sigma_{11}\,dx^2 + 2\sigma_{12}\,dx\,dy + \sigma_{22}\,dy^2.$$

Эту форму можно представить в виде суммы двух форм: $\sigma = \sigma' + \sigma''$, где

$$\sigma' = d\bar{r}\,d\bar{\tau} = \sigma'_{11}\,dx^2 + 2\sigma'_{12}\,dx\,dy + \sigma'_{22}\,dy^2,$$

$$\sigma'' = d\bar{r}\,d\tilde{\tau} = \sigma''_{11}\,dx^2 + 2\sigma''_{12}\,dx\,dy + \sigma''_{22}\,dy^2.$$

В дальнейшем нас будут интересовать три интеграла, связанные с поверхностью ω и векторными полями $\bar{\tau}$, $\tilde{\tau}$:

$$I_1 = \iint\limits_{\bar{\omega}} (\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2)\,dx\,dy,$$

$$I_2 = \iint\limits_{\bar{\omega}} \zeta\,(r\sigma'_{22} - 2s\sigma'_{12} + t\sigma'_{11})\,dx\,dy,$$

$$I_3 = \iint\limits_{\bar{\omega}} \zeta\,(r\sigma''_{22} - 2s\sigma''_{12} + t\sigma''_{22})\,dx\,dy,$$

где $\zeta(x, y)$ — некоторая ограниченная функция.

Именно, нас интересует вопрос, как ведут себя эти интегралы, когда $\omega \to F$ и $\bar{\tau} \to \tau$. Сейчас мы решим этот вопрос для интеграла I_1.

Пусть M_α — множество тех точек поверхности F, в каждой из которых есть хотя бы две опорные плоскости, образующие угол не меньше α. $\overline{M}_\alpha$ — проекция множества M_α в круг $\bar{\omega}$. Почти все точки выпуклой поверхности являются гладкими. Множество M_α состоит заведомо ие из гладких точек, а поэтому имеет меру иуль. Возьмем открытое миожество G_α меры меиьше ε, содержащее миожество $\overline{M}_\alpha$.

Как было показаио в § 4, при достаточиой близости поверхиости ω к F и при достаточной близости поля $\bar{\tau}$ к τ иа миожестве точек $\bar{\omega} - G_\alpha$ при дифференцировании по любому иаправлеиию

$$|\bar{r}'\bar{\tau}'| < \varepsilon(\alpha),$$

где $\varepsilon(\alpha)$ сколь угодно мало, если мало α. А для всех точек круга $\bar{\omega}$ произведеиие $|\bar{r}'\bar{\tau}'|$ остается ограиичеииым.

В § 4 было показано также, что при достаточиой близости поверхности ω к F и поля $\bar{\tau}$ к τ мера множества тех зиачеиий ϑ, для которых $|\tilde{\tau}_\vartheta| > \varepsilon'$, сколь угодио мала. Что же касается $|\tilde{\tau}_\rho|$, то эта величииа сколь угодио мала при всех ϑ, если ω близка к F. К этому иадо прибавить, что $\tilde{\tau} \equiv 0$ при $\rho < R'$ и, следовательно, $\tilde{\tau}_\vartheta = \tilde{\tau}_\rho = 0$.

Заметим, что

$$\tilde{\tau}_x = \tilde{\tau}_\rho \cos\vartheta - \tilde{\tau}_\vartheta \frac{\sin\vartheta}{\rho}, \quad \tilde{\tau}_y = \tilde{\tau}_\rho \sin\vartheta + \tilde{\tau}_\vartheta \frac{\cos\vartheta}{\rho}.$$

Отсюда следует, что при достаточной близости поверхиости ω к F и поля $\bar{\tau}$ к τ миожество M'' тех точек, где хотя бы одиа из величии $|\tilde{\tau}_x|$ или $|\tilde{\tau}_y|$ больше ε, имеет сколь угодио малую меру.

При достаточной близости поверхности ω к F максимум $|p|$ и $|q|$ не превосходит некоторой постояииой C_1. Поэтому

$$|\bar{r}_x| \leqslant 1 + C_1, \qquad |\bar{r}_y| \leqslant 1 + C_1,$$

и, следовательио, на миожестве $\bar{\omega} - M''$

$$|\sigma''_{11}| = |\bar{r}_x\tilde{\tau}_x| \leqslant (1 + C_1)\varepsilon,$$

$$|\sigma''_{12}| = \frac{1}{2}|\bar{r}_x\tilde{\tau}_y + \bar{r}_y\tilde{\tau}_x| \leqslant (1 + C_1)\varepsilon,$$

$$|\sigma''_{22}| = |\bar{r}_y\tilde{\tau}_y| \leqslant (1 + C_1)\varepsilon.$$

А на множестве M'' величины $|\sigma''_{ij}|$ по крайней мере равномерно ограничены (при $\omega \to F$ и $\bar{\tau} \to \tau$).

Обратимся теперь к форме σ'. Так как на множестве $\bar{\omega} - G_\alpha$ при дифференцировании по любому направлению $|\bar{r}'\bar{\tau}'| < \varepsilon(\alpha)$, то

$$|\sigma'_{11}| = |\bar{r}_x\bar{\tau}_x| < \varepsilon(\alpha), \quad |\sigma'_{22}| = |\bar{r}_y\bar{\tau}_y| < \varepsilon(\alpha).$$

При дифференцировании в направлении $dy = dx$

$$\bar{r}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{r}_x + \bar{r}_y), \quad \bar{\tau}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\tau}_x + \bar{\tau}_y).$$

Отсюда

$$\frac{1}{2}|\bar{r}_x\bar{\tau}_x + \bar{r}_x\bar{\tau}_y + \bar{r}_y\bar{\tau}_x + \bar{r}_y\bar{\tau}_y| < \varepsilon\alpha,$$

и, следовательно,

$$|\sigma'_{12}| = \frac{1}{2}|\bar{r}_x\bar{\tau}_y + \bar{r}_y\bar{\tau}_x| \leqslant 2\varepsilon(\alpha).$$

Суммируя вышеизложенное, заключаем, что, каковы бы ни были положительные числа ε_1 и ε_2, при достаточной близости поверхности ω к F и поля $\bar{\tau}$ к τ существует множество G меры меньше ε_2, такое, что на множестве $\bar{\omega} - G$ имеем $|\sigma'_{ij}| < \varepsilon_1$, $|\sigma''_{ij}| < \varepsilon_2$, а на самом множестве G величины $|\sigma'_{ij}|$ и $|\sigma''_{ij}|$ ограничены некоторой постоянной C.

Отсюда следует, что при достаточной близости поверхности ω к F и поля $\bar{\tau}$ к τ интеграл

$$I_1 = \int\limits_{\bar{\omega}}\int (\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2)\, dx\, dy$$

сколь угодно мал.

Покажем, что интеграл

$$I_2 = \int\limits_{\bar{\omega}}\int \zeta(r\sigma'_{22} - 2s\sigma'_{12} + t\sigma'_{11})\, dx\, dy$$

при достаточной близости поверхности ω к F и поля $\bar{\tau}$ к τ тоже сколь угодно мал.

Обозначим $\bar{M}^*$ множество тех точек плоскости xy, каждая из которых является проекцией конической точки поверхности F. Множество $\bar{M}^*$ не более чем счетно. Следовательно, его можно покрыть множеством G^*, составленным из кругов с общей суммой диаметров, не превосходящей ε. Покажем, что интеграл

$$I^* = \int\limits_{G^*}\int \zeta(r\sigma'_{22} - 2s\sigma'_{12} + t\sigma'_{11})\, dx\, dy$$

сколь угодно мал вместе с ε. Имеем

$$|I^*| \leqslant \iint_{G^*} |\zeta| (|r| |\sigma'_{22}| + 2|s| |\sigma'_{12}| + |t| |\sigma_{11}|) \, dx \, dy.$$

И так как $2|s| \leqslant |r| + |t|$, то

$$|I^*| \leqslant \iint_{G^*} |\zeta| \{|r| (|\sigma'_{22}| + |\sigma'_{12}|) + |t| (|\sigma'_{12}| + |\sigma'_{11}|)\} \, dx \, dy.$$

Рассмотрим интегралы

$$\iint_{G^*} |r| \, dx \, dy, \quad \iint_{G^*} |t| \, dx \, dy.$$

Как показано выше, $\int |r| \, dx$ и $\int |t| \, dy$ оцениваются через максимум $|p|$ и $|q|$. И при достаточной близости ω к F можно считать, что эти интегралы не превосходят некоторой постоянной c. А так как проекция множества G^* на оси x и y не превосходит ε, то

$$\iint_{G^*} |r| \, dx \, dy \leqslant c\varepsilon, \quad \iint_{G^*} |t| \, dx \, dy \leqslant c\varepsilon.$$

При $\omega \to F$ и $\bar{\tau} \to \tau$ величины $|\zeta| |\sigma'_{ij}|$ ограничены некоторой постоянной c', поэтому

$$|I^*| \leqslant 2c' \iint_{G^*} (|r| + |t|) \, dx \, dy \leqslant 4cc'\varepsilon.$$

Следовательно, интеграл I^* мал вместе с ε.

Обозначим $\overline{M}_\alpha$ множество тех точек, принадлежащих $\bar{\omega} - G^*$, в которые проектируются точки поверхности F, имеющие по крайней мере две опорные плоскости, образующие угол не меньше α. $\overline{M}_\alpha$ представляет собой замкнутое множество, состоящее из проекций ребристых точек поверхности F. Покроем круг $\bar{\omega}$ маленькими квадратами Δ и обозначим G_α множество, составленное из квадратов Δ, которые содержат точки $\overline{M}_\alpha$.

Как показано в § 4, при достаточно малом α, достаточной близости ω к F и $\bar{\tau}$ к τ произведение $|\bar{r}'\bar{\tau}'|$ независимо от направления дифференцирования будет в $\bar{\omega} - G_\alpha - G^*$ сколь угодно малым. А это значит, что в $\bar{\omega} - G_\alpha - G^*$ сколь угодно малы $|\sigma'_{ij}|$.

И так как интегралы

$$\iint_{\bar{\omega}} |r| \, dx \, dy, \qquad \iint_{\bar{\omega}} |s| \, dx \, dy, \qquad \iint_{\bar{\omega}} |t| \, dx \, dy$$

остаются ограниченными некоторой постоянной при $\omega \to F$, то при достаточно малом α, достаточной близости ω к F и $\bar{\tau}$ к τ интеграл

$$\iint\limits_{\omega - G_\alpha - G^*} \zeta (r\sigma'_{22} - 2s\sigma'_{12} + t\sigma'_{11})\, dx\, dy$$

сколь угодно мал.

Остается выяснить, как ведет себя интеграл

$$\iint\limits_{G_\alpha} \zeta (r\sigma'_{22} - 2s\sigma'_{12} + t\sigma'_{11})\, dx\, dy$$

при $\omega \to F$ и $\bar{\tau} \to \tau$.

Этот интеграл можно разбить на сумму интегралов

$$\sum_{\Delta \subset G_\alpha} \iint\limits_{\Delta} \zeta (r\sigma'_{22} - 2s\sigma'_{12} + t\sigma'_{11})\, dx\, dy,$$

и при вычислении каждого интеграла этой суммы можно пользоваться своей системой координат xy. Мы введем систему координат xy внутри квадрата Δ следующим образом.

В области F_Δ поверхности F, которая проектируется в квадрат Δ, есть ребристая точка A с углом при ребре, не меньшим α. Примем направление оси x перпендикулярным проекции на плоскость xy ребра в точке A поверхности F.

Если взять стороны квадратов Δ достаточно малыми, а поверхность ω достаточно близкой к F, то внутри каждого квадрата Δ величина $|\sigma'_{22}| = |\bar{r}_y \bar{\tau}_y|$ будет меньше ε (§ 4) и

$$\sum_{\Delta \subset G_\alpha} \iint\limits_{\Delta} |r|\, dx\, dy \leqslant H_\omega, \qquad \sum_{\Delta \subset G_\alpha} \iint\limits_{\Delta} |s|\, dx\, dy \leqslant \frac{10}{N} H_\omega,$$

$$\sum_{\Delta \subset G_\alpha} \iint\limits_{\Delta} |t|\, dx\, dy \leqslant \frac{18}{N^2} H_\omega,$$

где H_ω — средняя кривизна поверхности ω, а N можно считать сколь угодно большим.

Принимая во внимание ограниченность $|\sigma_{12}|$ и $|\sigma_{11}|$, заключаем, что если стороны квадратов Δ малы, а поверхность ω достаточно близка к F, то интеграл

$$\iint\limits_{G_\alpha} \zeta (r\sigma'_{22} - 2s\sigma'_{12} + t\sigma'_{11})\, dx\, dy$$

сколь угодно мал.

Суммируя вышеизложенное, приходим к выводу, что при достаточной близости поверхности ω к F и поля $\bar{\tau}$ к τ интеграл

$$I_2 = \iint_{\bar{\omega}} \zeta (r\sigma'_{22} - 2s\sigma_{12} + t\sigma'_{11})\, dx\, dy$$

сколь угодно мал.

Оценим, наконец, интеграл

$$I_3 = \iint_{\bar{\omega}} \zeta (r\sigma''_{22} - 2s\sigma''_{12} + t\sigma''_{11})\, dx\, dy.$$

Перейдем от декартовых координат xy к полярным координатам ρ, ϑ.

Так как подынтегральное выражение представляет собой смешанный дискриминант квадратичных дифференциальных форм d^2z и $\sigma'' = d\bar{r}\, d\tilde{\tau}$, то при переходе к полярным координатам ρ, ϑ интеграл I_3 принимает вид

$$I_3 = \iint_{\bar{\omega}} \zeta (z_{\rho\rho}\bar{\sigma}_{22} - 2z_{\rho\vartheta}\bar{\sigma}_{12} + z_{\vartheta\vartheta}\bar{\sigma}_{11}) \frac{d\rho\, d\vartheta}{\rho},$$

где

$$\bar{\sigma}_{22} = \bar{r}_\vartheta \tilde{\tau}_\vartheta, \quad \bar{\sigma}_{12} = \bar{r}_\vartheta \tilde{\tau}_\rho + \bar{r}_\rho \tilde{\tau}_\vartheta, \quad \bar{\sigma}_{11} = \bar{r}_\rho \tilde{\tau}_\rho.$$

Наша цель доказать, что если поверхность ω достаточно близка к F, а поле $\bar{\tau}$ — к τ, то интеграл I_3 сколь угодно мал.

Вспомним выражение для $\tilde{\tau}$ (§ 4):

$$\tilde{\tau} = \psi(\rho)(\lambda(\vartheta)\, t + \mu n),$$

где $\psi(\rho)$ — дважды дифференцируемая функция, определяемая условиями

$$\psi(R) = 1, \quad \psi(\rho) = 0 \quad \text{при} \quad \rho \leqslant R' < R.$$

Теперь мы положим $R' = R - \varepsilon$ и потребуем, чтобы $\psi(\rho) \leqslant 1$ и $|\psi'(\rho)| < \frac{2}{\varepsilon}$. Очевидно, этим условиям нетрудно удовлетворить.

Напомним, что μ и λ, входящие в выражение для $\tilde{\tau}$, при $\omega \to F$ сходятся к нулю равномерно, а $\lambda'(\vartheta)$ сходится к нулю по мере.

Рассмотрим интеграл

$$I'_3 = \iint_{\bar{\omega}_\varepsilon} |\zeta|\, |z_{\rho\rho}|\, |\bar{r}_\vartheta|\, |\tilde{\tau}_\vartheta| \frac{d\rho\, d\vartheta}{\rho}.$$

Так как при достаточно малом ε и достаточной близости ω к F интеграл

$$\iint\limits_{\overline{\omega}_\varepsilon} |z_{\rho\rho}|\rho\, d\rho\, d\vartheta$$

мал, а $|\zeta||\overline{r}_\vartheta|$ остается ограниченным при $\omega\to F$ и $\overline{\tau}\to\tau$, то при этом интеграл I_3' тоже мал.

Рассмотрим интеграл

$$I_3''' = \iint\limits_{\overline{\omega}_\varepsilon} |\zeta||z_{\vartheta\vartheta}||\overline{r}_\rho||\tilde{\tau}_\rho|\frac{d\rho\, d\vartheta}{\rho}.$$

Имеем

$$I_3''' \leqslant \frac{2}{\varepsilon}\iint\limits_{\overline{\omega}_\varepsilon} |\zeta||z_{\rho\rho}|\,|\overline{r}_\rho||\lambda t+\mu n|\frac{d\rho\, d\vartheta}{\rho}.$$

Так как при $\omega\to F$ величина $|\zeta||\overline{r}_\rho||\lambda t+\mu n|\to 0$, а интеграл

$$\iint\limits_{\overline{\omega}} |z_{\theta\theta}|\rho\, d\rho\, d\theta$$

имеет порядок ε, то при достаточной близости поверхности ω к F и поля $\overline{\tau}$ к τ интеграл I_3''' сколь угодно мал.

Рассмотрим, наконец, интеграл

$$I_3'' = \iint\limits_{\overline{\omega}_\varepsilon} |\zeta||z_{\rho\theta}|(|\overline{r}_\vartheta\tilde{\tau}_\rho|+|\overline{r}_\rho\tilde{\tau}_\vartheta|)\frac{d\rho\, d\vartheta}{\rho}.$$

Мы разобьем его на два интеграла:

$$\iint\limits_{\overline{\omega}_\varepsilon} |\zeta||z_{\rho\theta}||\overline{r}_\vartheta\tilde{\tau}_\rho|\frac{d\rho\, d\vartheta}{\rho}, \quad \iint\limits_{\overline{\omega}_\varepsilon} |\zeta||z_{\rho\theta}||\overline{r}_\rho\tilde{\tau}_\vartheta|\frac{d\rho\, d\vartheta}{\rho}.$$

Первый из этих интегралов при достаточной близости ω к F и $\overline{\tau}$ к τ сколь угодно мал, так как при $\omega\to F$ и $\overline{\tau}\to\tau$ величина $|\tilde{\tau}_\rho|$ равномерно стремится к нулю в $\overline{\omega}_\varepsilon$, а $|\overline{r}_\vartheta|$ и интеграл

$$\iint\limits_{\overline{\omega}_\varepsilon} |z_{\rho\theta}|\rho\, d\rho\, d\vartheta$$

остаются ограниченными.

Оценим второй интеграл. Имеем

$$(z_{\rho\theta}-z_\rho)^2 \leqslant z_{\rho\rho}(z_{\theta\theta}+\rho z_\rho).$$

Отсюда

$$|z_{\rho\vartheta}| \leqslant |z_\rho| + N|z_{\rho\rho}| + \frac{1}{N}(|z_{\vartheta\vartheta}| + |\rho z_\rho|).$$

Подставляя вместо $|z_{\rho\vartheta}|$ во второй интеграл выражение, стоящее в правой части неравенства, мы его не уменьшаем. Полученный при этом интеграл разобьем на три интеграла:

$$\iint_{\overline{\omega}_\varepsilon} |\zeta||z_\rho|\left(1+\frac{\rho}{N}\right)|\overline{r}_\rho||\tilde{\tau}_\vartheta|\frac{d\rho\, d\vartheta}{\rho},$$

$$N\iint_{\overline{\omega}_\varepsilon} |\zeta||z_{\rho\rho}||\overline{r}_\rho||\tilde{\tau}_\vartheta|\frac{d\rho\, d\vartheta}{\rho}, \quad \frac{1}{N}\iint_{\overline{\omega}_\varepsilon} |\zeta||z_{\vartheta\vartheta}||\overline{r}_\rho||\tilde{\tau}_\vartheta|\frac{d\rho\, d\vartheta}{\rho}.$$

Пусть N — большое фиксированное число. Тогда первый из этих трех интегралов при достаточной близости ω к F и $\overline{\tau}$ к τ мал из-за сходимости $|\tilde{\tau}_\vartheta|$ к нулю по мере. Второй интеграл мал вместе с ε, так как

$$\iint_{\overline{\omega}_\varepsilon} |z_{\rho\rho}|\rho\, d\rho\, d\vartheta$$

мал вместе с ε. Наконец, третий интеграл мал, так как интеграл

$$\iint_{\overline{\omega}_\varepsilon} |z_{\vartheta\vartheta}|\rho\, d\rho\, d\vartheta$$

ограничен, а N заранее взято достаточно большим.

Таким образом, мы заключаем, что при достаточной близости ω к F и $\overline{\tau}$ к τ интеграл I_3'' тоже сколь угодно мал.

Так как

$$|I_3| \leqslant I_3' + I_3'' + I_3''',$$

и каждый из интегралов I_3', I_3'', I_3''' мал при достаточной близости поверхности ω к F и поля $\overline{\tau}$ к τ, то при этом интеграл I_3 тоже мал.

§ 6. *Доказательство основной леммы*

Предыдущим изложением подготовлен весь вспомогательный материал, необходимый для доказательства основной леммы, которое мы дадим в настоящем параграфе. Эта лемма состоит в следующем.

Основная лемма 1. *Если*

$$F:\ z = z(x, y)$$

— выпуклая поверхность, не содержащая плоских областей, и $\zeta(x, y)$ — составляющая по оси z ее изгибающего поля, то поверхность Φ:

$$z=\zeta(x, y)$$

является поверхностью неположительной кривизны.

Это значит, что на поверхности Φ нет ни одной точки строгой выпуклости, т. е. такой точки P, через которую проходила бы плоскость так, что все точки, близкие к P, располагались бы по одну сторону этой плоскости.

Основная лемма 2. *Пусть*

$$F:\ z=z(x, y)$$

— выпуклая поверхность, содержащая плоские куски G_α. Пусть $\zeta(x, y)$ — составляющая по оси z изгибающего поля поверхности F. Тогда поверхность Φ:

$$z=\zeta(x, y)$$

на множестве H тех точек, которым при проектировании прямыми, параллельными оси z на F, соответствуют точки, лежащие вне областей G_α, имеет неположительную кривизну. То есть на H не существует точки P, через которую проходила бы плоскость так, чтобы все точки H, близкие к P, располагались по одну сторону этой плоскости.

Пусть F — общая выпуклая поверхность, однозначно проектирующаяся на плоскость xy, P — произвольная точка на поверхности F и $\bar{P}$ — ее проекция на плоскость xy. Не ограничивая общности, будем считать, что точка $\bar{P}$ является началом координат. Возьмем круг

$$\bar{\omega}:\ x^2+y^2<R^2$$

настолько малого радиуса, чтобы проекция поверхности F на плоскость xy покрывала этот круг вместе с ограничивающей его окружностью. Кроме того, выберем R так, чтобы почти все точки поверхности F, которые проектируются на плоскость xy в окружность $\bar{\gamma}$ круга $\bar{\omega}$, были гладкими.

Аппроксимируем поверхность F строго выпуклой аналитической поверхностью, и область на ней, которая проектируется в круг $\bar{\omega}$, обозначим ω. Аппроксимируем изгибающее поле τ поверхности F регулярным векторным полем путем усреднения поля τ по Стеклову (§ 4). Полученное при этом поле обозначим $\bar{\tau}$.

Построим векторное поле $\tilde{\tau}$ с равной нулю вертикальной составляющей так, чтобы векторное поле $\bar{\tau}+\tilde{\tau}$ было изгибающим

для края γ поверхности ω. Такое поле строится не однозначно. Мы предполагаем, что оно построено как в § 4.

Построим регулярное изгибающее поле τ^* поверхности ω, которое на границе γ поверхности ω имеет ту же вертикальную составляющую, что и $\bar{\tau}$. Существование такого поля доказано в § 3.

Обозначим, наконец, τ^0 — пока произвольное тривиальное изгибающее поле поверхности ω с равной нулю вертикальной составляющей.

Составим интегральное соотношение из § 2 для поверхности ω и векторного поля $v=\bar{\tau}+\tilde{\tau}+\tau^0-\tau^*$. Имеем

$$\frac{1}{2}\oint_{\bar{\gamma}}(\lambda\,d\mu-\mu\,d\lambda)=$$

$$=\iint_{\bar{\omega}}\zeta^2(rt-s^2)\,dx\,dy+\frac{1}{4}\iint_{\bar{\omega}}(\lambda_y-\mu_x)^2\,dx\,dy+$$

$$+\iint_{\bar{\omega}}\zeta\Delta(\sigma,\,d^2z)\,dx\,dy+\iint_{\bar{\omega}}\Delta(\sigma,\,\sigma)\,dx\,dy.$$

Здесь

$$\lambda=\xi+p\zeta,\qquad \mu=\eta+q\zeta,$$

ξ, η, ζ — составляющие поля v по осям x, y, z; p, q — первые производные функции $z(x,y)$, задающей поверхность ω; r, s, t — вторые производные функции z; $\Delta(\sigma,\,\sigma)$ — дискриминант квадратичной дифференциальной формы

$$\sigma=d\bar{r}\,dv=d\bar{r}\,(d\bar{\tau}+d\tilde{\tau}),\qquad (d\bar{r}\,d\tau^0=0,\ d\bar{r}\,d\tau^*=0);$$

$\Delta(\sigma,d^2z)$ — смешанный дискриминант форм σ и d^2z.

Утверждается, что можно выбрать тривиальное изгибающее поле τ^0 так, что контурный интеграл в левой части этой формулы

$$\frac{1}{2}\oint_{\bar{\gamma}}(\lambda\,d\mu-\mu\,d\lambda)$$

будет неположительным. Докажем это.

Рассмотрим вдоль окружности $\bar{\gamma}$ круга $\bar{\omega}$ векторное поле u с составляющими ξ и η по осям x и y. Поле u является изгибающим полем на этой окружности. Действительно, вдоль края γ поверхности ω

$$d\bar{r}\,du=dx\,d\xi+dy\,d\eta+dz\,d\zeta.$$

Но на кривой γ имеем $d\zeta=0$. Следовательно,

$$dx\,d\xi+dy\,d\eta=0,$$

а это значит, что поле $u(\xi, \eta)$ будет изгибающим на окружности $\bar{\gamma}$.

Условимся обозначать составляющую по оси z векторного произведения $a\times b$ через $[a, b]$. Тогда интересующий нас контурный интеграл записывается в виде

$$\frac{1}{2}\oint\limits_{\bar{\gamma}} (\lambda\, d\mu - \mu\, d\lambda) = \frac{1}{2}\oint\limits_{\bar{\gamma}} (\xi\, d\eta - \eta\, d\xi) = \frac{1}{2}\oint\limits_{\bar{\gamma}} [u, du].$$

Векторное поле u определено с точностью до поля скоростей движения τ^0. Задача состоит в том, чтобы показать, что выбором этого поля τ^0 можно распорядиться так, что интеграл

$$\frac{1}{2}\oint\limits_{\bar{\gamma}} [u, du]$$

будет меньше или равен нулю.

Сохраним наименование u за каким-нибудь определенным полем, а общее поле u представим в виде $u+\Omega$, где Ω — поле скоростей вращения около оси z. Утверждаем, что при подходящем Ω

$$I = \frac{1}{2}\oint\limits_{\bar{\gamma}} [u+\Omega, du + d\Omega] \leqslant 0.$$

Обозначим r_1 вектор произвольной точки окружности $\bar{\gamma}$, а r_2 — вектор, полученный из r_1 поворотом на угол $\pi/2$ вправо. Так как $du\, dr_1 = 0$, то векторы du и r_2 параллельны. Возьмем в качестве параметра дугу окружности $\bar{\gamma}$.

Пусть $|u'| < M$. Положим $\bar{u} = u + Mr_2$, $\Omega = (M+c) r_2$. Тогда

$$I = \frac{1}{2}\oint\limits_{\bar{\gamma}} [\bar{u} + cr_2, d\bar{u} + c\, dr_2].$$

Векторным уравнением $r = \bar{u}(s)$ задается гладкая замкнутая кривая C без особенностей $(u' \neq 0)$. Ее касательный вектор $\bar{u}'(s)$, будучи параллелен вектору $r_2(s)$, при прохождении кривой поворачивается все время в одном направлении. Следовательно, C — замкнутая выпуклая кривая.

Если длину кривой C обозначить L, а площадь ограничиваемой ею области — S, то

$$\frac{1}{2}\oint\limits_{\bar{\gamma}} [\bar{u}, d\bar{u}] = S, \quad \frac{1}{2}\oint\limits_{\bar{\gamma}} [r_2, dr_2] = \pi R^2;$$

$$\oint\limits_{\bar{\gamma}} [\bar{u}, dr_2] = \oint\limits_{\bar{\gamma}} [d\bar{u}, r_2] = RL.$$

Отсюда
$$I = S + cRL + \pi c^2R^2.$$

Так как L и S связаны изопериметрическим неравенством
$$4\pi S \leqslant L^2,$$
то существует по крайней мере одно значение c, при котором квадратный трехчлен $I(c) \leqslant 0$.

Таким образом, доказано, что тривиальное векторное поле τ^0 всегда можно выбрать так, что контурный интеграл
$$\frac{1}{2}\oint_{\overline{\gamma}} (\lambda\, d\mu - \mu\, d\lambda)$$
будет меньше или равен нулю. В дальнейшем будем считать, что τ_0 выбрано именно таким.

Пусть теперь поверхность ω неограниченно приближается к F, а поле $\tilde{\tau}$ — к τ. Тогда, как показано в § 5,
$$\int_{\overline{\omega}}\int \zeta\Delta(\sigma,\, d^2z)\, dx\, dy \to 0, \qquad \int_{\overline{\omega}}\int \Delta(\sigma,\, \sigma)\, dx\, dy \to 0.$$

Обратимся к первым двум интегралам правой части формулы. Имеем
$$\int_{\overline{\omega}}\int \zeta^2 (rt - s^2)\, dx\, dy = \int_{\Omega}\int \zeta^2\, d\Omega,$$
где интегрирование в правой части равенства выполняется по площади условного сферического изображения поверхности ω. Это сферическое изображение заключается в сопоставлении точке поверхности точки плоскости (p, q) с координатами $p = \partial z/\partial x$, $q = \partial z/\partial y$.

Второй интеграл
$$\frac{1}{4}\int_{\overline{\omega}}\int (\lambda_y - \mu_x)^2\, dx\, dy = \frac{1}{4}\int_{\overline{\omega}}\int (\xi_y + p\zeta_y - \eta_x - q\zeta_x)^2\, dx\, dy.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что поле $\tau^* - \tau^0$ сходится при $\omega \to F$ и $\tilde{\tau} \to \tau$. Что касается поля $\tilde{\tau}$, то оно по построению стремится к нулю. Предельное поле $\tau' = \lim(\tau^* - \tau^0)$ является изгибающим полем поверхности F в области $F_{\overline{\omega}}$, проектирующейся на круг $\overline{\omega}$.

В результате предельного перехода мы получаем следующее интегральное неравенство:
$$\int_{\Omega}\int \zeta^2\, d\Omega + \frac{1}{4}\int_{\overline{\omega}}\int (\xi_y + p\zeta_y - \eta_x - q\zeta_x)^2\, dx\, dy \leqslant 0,$$

где ξ, η, ζ — составляющие изгибающего поля $\tau - \tau'$, p, q — производные первого порядка функции $z(x, y)$, задающей поверхность F, а интегрирование в первом члене выполняется по условному сферическому изображению поверхности $F_{\overline{\omega}}$.

Доказательство основной леммы 1. Пусть поверхность F не содержит плоских областей. Покажем, что в этом случае составляющая $\zeta(x, y)$ изгибающего поля $\tau - \tau'$ поверхности F равна нулю тождественно.

Действительно, из основного интегрального неравенства, полученного выше, получается

$$\iint_{\Omega} \zeta^2 \, d\Omega = 0, \qquad \iint_{\overline{\omega}} (\xi_y + p\zeta_y - \eta_x - q\zeta_x)^2 \, dx \, dy = 0.$$

Пусть P — точка строгой выпуклости поверхности F, т. е. такая точка, в которой существует опорная плоскость, имеющая с F только одну общую точку P. Точка P имеет сколь угодно малую окрестность $G(P)$ с отличной от нуля площадью условного сферического изображения. Так как

$$\iint_{G(P)} \zeta^2 \, d\Omega = 0,$$

то из непрерывности ζ следует, что $\zeta(P) = 0$. Итак, функция ζ равна нулю во всех точках строгой выпуклости поверхности F.

Из непрерывности функции ζ следует также, что она равна нулю во всех точках, являющихся предельными точками для точек строгой выпуклости F. Таким образом, если ζ и отлична от нуля, то это может быть только на открытом множестве G, не содержащем точек строгой выпуклости. Это G состоит из развертывающихся выпуклых поверхностей, не содержащих плоских областей. Покажем, что в G функция ζ также равна нулю.

Имеем

$$\iint_{\overline{\omega}} (\xi_y + p\zeta_y - \eta_x - q\zeta_x)^2 \, dx \, dy = 0.$$

Отсюда следует, что почти всюду в $\overline{\omega}$

$$\xi_y + p\zeta_y - \eta_x - q\zeta_x = 0.$$

Кроме того, почти всюду удовлетворяются уравнения изгибающего поля

$$\xi_x + p\zeta_x = 0, \quad \xi_y + p\zeta_y + \eta_x + q\zeta_x = 0, \quad \eta_y + q\zeta_y = 0.$$

Отсюда следует, что почти всюду

$$\begin{aligned} &\xi_x + p\zeta_x = 0, \qquad \eta_x + d\zeta_x = 0, \\ &\xi_y + p\zeta_y = 0, \qquad \eta_y + q\zeta_y = 0. \end{aligned} \tag{*}$$

Рассмотрим интеграл

$$\oint_C \zeta \, d\xi$$

по замкнутому контуру C внутри круга $\bar{\omega}$ *). Преобразуя этот интеграл по формуле Остроградского—Грина и замечая, что $\xi_x\zeta_y - \xi_y\zeta_x = 0$ почти всюду в силу равенств (*), заключаем, что

$$\oint_C \zeta \, d\xi = 0.$$

Согласно формулам (*) $d\xi = p\,d\zeta$. Поэтому

$$\oint_C \zeta \, d\xi = \oint_C p\zeta \, d\zeta = \oint_C p \, d(\zeta^2).$$

Предполагается, конечно, что на C почти всюду существуют $d\xi$, $d\zeta$ и dz.

Выберем теперь контур C специальным образом. Пусть g — произвольная образующая развертывающейся поверхности G. Не ограничивая общности, будем считать, что она параллельна оси y. Возьмем две близкие к g прямолинейные образующие g_1 и g_2, расположенные по разные стороны от нее и такие, чтобы поверхность G вдоль каждой из этих образующих была гладкой. Указать образующие g_1 и g_2 не составляет труда, так как почти все образующие обладают этим свойством. Образуем контур C из отрезков образующих g_1 и g_2 и сечений поверхности плоскостями $y = \text{const}$. Обозначим c_1 и c_2 стороны четырехугольника C, принадлежащие g_1 и g_2, а c_3 и c_4 — остальные две стороны.

Интегрированием по частям из

$$\oint_C p \, d(\zeta^2) = 0$$

получается

$$\oint_C \zeta^2 \, dp = 0.$$

Так как на каждой из сторон c_1 и c_2 четырехугольника C $dp = 0$ в силу стационарности касательной плоскости вдоль прямолинейных образующих g_1 и g_2, то

$$\int_{c_3} \zeta^2 \, dp = \int_{c_4} \zeta^2 \, dp.$$

*) Этот интеграл введен Минагавой в цитированной работе [47].

Из стационарности касательных плоскостей поверхности G вдоль образующих g_1 и g_2 следут также, что

$$\int_{c_3} dp = \int_{c_4} dp.$$

А отсюда по непрерывности функции ζ получается, что

$$\zeta^2(A_3) = \zeta^2(A_4),$$

где A_3 и A_4 — некоторые точки на кривых c_3 и c_4.

Переходя теперь к пределу при $g_1 \to g$ и $g_2 \to g$, получим

$$\zeta^2(A) = \zeta^2(B),$$

где A и B — точки на образующей g.

Таким образом, на образующей g функция $\zeta = \text{const}$. Концом образующей g является либо точка края поверхности $F_{\overline{\omega}}$, либо точка строгой выпуклости, либо предельная точка для точек строгой выпуклости. Во всех этих случаях на конце образующей g имеем $\zeta = 0$. И следовательно, по доказанному $\zeta = 0$ вдоль всей образующей g.

Так как образующая g была взята произвольно, то тем самым доказано, что в $\overline{\omega}$ всюду $\zeta = 0$.

Пусть $\zeta_1(x, y)$ — вертикальная составляющая поля τ, а $\zeta_2(x, y)$ — вертикальная составляющая поля τ'. Так как поверхность $z = \zeta_2(x, y)$ является предельной для поверхностей неположительной кривизны, то она сама является поверхностью неположительной кривизны. Но $\zeta_1(x, y) \equiv \zeta_2(x, y)$, следовательно, поверхность

$$z = \zeta_1(x, y),$$

где $\zeta_1(x, y)$ — вертикальная составляющая заданного нам поля τ, является поверхностью неположительной кривизны.

Основная лемма 1 доказана.

Доказательство основной леммы 2. Пусть F — общая поверхность, содержащая плоские области, τ — изгибающее поле поверхности F и $\zeta(x, y)$ — его вертикальная составляющая. Обозначим Φ поверхность, задаваемую уравнением

$$z = \zeta(x, y),$$

и обозначим H множество тех точек поверхности Φ, которые проектируются прямыми, параллельными оси z, не внутрь плоских областей поверхности F. Леммой 2 утверждается, что множество H имеет неположительную кривизну, т. е., какова бы ни была точка P множества H, через нее нельзя провести плоскость так, чтобы все точки множества H, достаточно близкие к P, располагались строго по одну сторону этой плоскости.

Допустим, утверждение неверно и через иекоторую точку P проходит плоскость α_P такая, что все точки H, близкие к P, располагаются по одну сторону α_P. Пусть для определенности оии иижe α_P. Обозначим $\bar{P}$ проекцию точки P иа плоскость xy и $\bar{\omega}$ — круг достаточно малого радиуса с центром в точке $\bar{P}$. Так как круг $\bar{\omega}$ мал, то все точки H, которые проектируются в круг $\bar{\omega}$, лежат строго ниже плоскости α_P, кроме самой P, которая лежит в плоскости α_P.

Обозначим Φ_ω ту часть поверхности Φ, которая проектируется на круг $\bar{\omega}$. Рассмотрим следующее преобразоваиие поверхности Φ и связанное с этим преобразование изгибающего поля τ.

Представим себе плоскость β, не параллельную оси z, расположенную над поверхностью Φ_ω. Будем смещать эту плоскость параллельно вниз до тех пор, пока она не упрется в множество H. Может случиться, что в этом положении плоскость β пересекает поверхность Φ_ω. Обозначим $\bar{\Phi}_\omega$ множество тех точек поверхности Φ_ω, которые расположены над плоскостью β.

Прямыми, параллельиыми оси z, множество $\bar{\Phi}_\omega$ проектируется в плоские области поверхности F, так как нет точек H, расположеииых выше плоскости β.

Каждая компонента $\bar{\Phi}'_\omega$ множества $\bar{\Phi}_\omega$ проектируется в одну плоскую область поверхности F, так как области Φ, соответствующие плоским областям на F, разделены множеством H, а оно ниже плоскости β.

На множестве точек плоского куска F'_ω поверхиости F_ω, отвечающего при проектировании компонеите $\bar{\Phi}'_\omega$, мы изменим поле τ следующим образом. Пусть n — единичная нормаль к F'_ω, выбраииая так, что $ne_z > 0$. Тогда на куске F'_ω полагаем τ равиым

$$\tau - \frac{n}{\cos\alpha}(\zeta - \bar{\zeta}),$$

где α — угол, который образует плоскость куска F'_ω с плоскостью xy, а $\bar{\zeta}$ — координата z той точки плоскости β, в которую проектируется точка поверхности. Очевидно, измененное таким образом поле τ удовлетворяет условию Липшица и является изгибающим, так как добавка

$$\frac{n}{\cos\alpha}(\zeta - \bar{\zeta})$$

перпендикуляриа плоскости куска F'_ω.

Указанное изменение поля τ произведем на всех плоских кусках поверхиости F_ω, соответствующих $\bar{\Phi}_\omega$. Для поверхно-

сти Φ_ω описанное преобразование поля заключается в том, что часть ее, расположенная над плоскостью β, заменяется соответствующими кусками плоскости β.

Конечным числом таких операций можно добиться того, что край поверхности Φ_ω будет находиться строго ниже плоскости α_P, все выступающие над этой плоскостью части поверхности Φ_ω будут срезаны соответствующими плоскостями β. Обозначим τ_1 изгибающее поле поверхности F_ω, которое получится в результате таких преобразований.

Возьмем теперь круг $\bar{\omega}'$, содержащийся в $\bar{\omega}$, несколько меньшего радиуса так, чтобы проекция поверхности F_ω на плоскость xy покрывала его вместе с ограничивающей окружностью. А теперь повторим все рассуждения доказательства леммы 1, приняв в качестве поверхности F поверхность F_ω.

При этом мы приходим к следующему выводу. Существует изгибающее поле τ' поверхности $F_{\omega'}$, удовлетворяющее условиям:

1) вертикальная составляющая поля τ' совпадает с вертикальной составляющей поля τ_1 всюду вне плоских областей поверхности $F_{\omega'}$ и на границе этой поверхности;

2) поверхность $\Phi_{\omega'}$: $z=\zeta'(x, y)$, где $\zeta'(x, y)$ — вертикальная составляющая поля τ', есть поверхность неположительной кривизны.

Так как поля τ и τ_1 на F_ω имеют одинаковые вертикальные составляющие вне плоских кусков поверхности, то множество H лежит на поверхности $\Phi'_{\omega'}$. Край поверхности $\Phi'_{\omega'}$ лежит ниже плоскости α_P. Таким образом, край поверхности $\Phi'_{\omega'}$ можно отделить плоскостью, параллельной α_P, от точки P. А это невозможно, так как поверхность $\Phi'_{\omega'}$ имеет неположительную кривизну. Мы пришли к противоречию. Лемма 2 доказана.

§ 7. *Жесткость выпуклых поверхностей*

Изгибающее поле на выпуклой поверхности называется *тривиальным*, если оно является полем скоростей движения поверхности как твердого тела. Тривиальное изгибающее поле имеет вид

$$\tau = a \times r + b,$$

где a и b — постоянные векторы, а r — вектор точки поверхности.

Выпуклая поверхность называется *жесткой*, если она не допускает иных изгибающих полей, кроме тривиальных.

Пусть F — выпуклая поверхность с краем γ, однозначно проектирующаяся на плоскость α. Мы будем говорить, что поверхность F закреплена на краю относительно плоскости α,

если класс допустимых деформаций F ограничивается условием стационарности расстояний точек кривой γ от плоскости α.

Теорема 1. *Выпуклая поверхность F с краем, не содержащая плоских областей, однозначно проектирующаяся на плоскость α и закрепленная на краю относительно этой плоскости, является жесткой.*

Если же поверхность F содержит плоские области, то она является жесткой вне этих областей.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что плоскость α является плоскостью xy. Пусть $\zeta(x, y)$ — вертикальная составляющая изгибающего поля τ поверхности F. Если поверхность F не содержит плоских областей, то поверхность

$$\Phi\colon\ z = \zeta(x, y)$$

является поверхностью отрицательной кривизны. И так как $\zeta(x, y)$ равна нулю на краю поверхности F, то $\zeta(x, y) = 0$ всюду на F.

Пусть F содержит плоские области. Тогда по основной лемме 2 заключаем, что $\zeta(x, y) = 0$ вне плоских областей на F. С помощью преобразования, указанного в § 6 при доказательстве леммы 2, изгибающее поле τ в плоских областях F можно изменить таким образом, что ζ будет равно нулю всюду на F. Обозначим так измененное изгибающее поле τ'.

Таким образом, для поля τ, если поверхность F не содержит плоских областей, или для поля τ', если она содержит плоские области, $\zeta \equiv 0$.

Обратимся теперь к дифференциальным уравнениям изгибающего поля. Так как $\zeta \equiv 0$, то

$$\xi_x = 0, \quad \xi_y + \eta_x = 0, \quad \eta_y = 0.$$

Из первого и третьего уравнений следует, что ξ зависит только от y, а η — только от x. Поэтому из второго уравнения получается, что $\xi_y = -\eta_x = \mathrm{const}$. И следовательно,

$$d\xi = c\,dy, \qquad d\eta = -c\,dx,$$

откуда

$$\xi = cy + c_1, \qquad \eta = -cx + c_2.$$

Изгибающее поле $(cy + c_1, -cx + c_2, 0)$ является тривиальным. Оно состоит из вращения около оси и сдвига, параллельного плоскости xy.

Таким образом, в случае поверхности, не содержащей плоских областей, доказано, что поле τ тривиально и, следовательно, поверхность жесткая. В случае поверхности, содержащей плоские куски, доказано, что тривиально поле τ'. А так как поле τ' совпадает с полем τ вне плоских областей, то тем самым

доказано, что поверхность жесткая вне плоских областей. Теорема доказана.

Заметим, что *если каждая из плоских областей поверхности F в отдельности является жесткой, то поверхность F жесткая*. Это непосредственно вытекает из теоремы 1.

Выпуклая поверхность с краем называется выпуклой шапкой, если ее край лежит в плоскости и на эту плоскость поверхность однозначно проектируется.

Как следствие теоремы 1 получается, что *выпуклая шапка в классе деформаций, при которых край ее остается плоским, является жесткой.*

Говорят, что поверхность звездно расположена относительно центра O, если она однозначно проектируется полупрямыми, исходящими из O. Мы будем говорить, что поверхность F с краем γ закреплена на краю γ относительно центра O, если класс допустимых деформаций ее ограничен условием стационарности расстояний точек края γ от центра O.

Теорема 2. *Выпуклая поверхность F с краем, не содержащая плоских областей, звездно расположенная относительно центра O, отделяемого от поверхности некоторой плоскостью α, закрепленная на краю относительно центра O, является жесткой.*

Если же поверхность F содержит плоские области, то она является жесткой вне этих областей.

Доказательство. Для регулярных поверхностей и их регулярных изгибающих полей имеет место следующая теорема Дарбу—Зауера.

Пусть F — поверхность и $\tau(\xi, \eta, \zeta)$ — ее изгибающее поле. Тогда, если поверхность F подвергнуть проективному преобразованию

$$x' = \frac{x}{z}, \quad y' = \frac{y}{z}, \quad z' = \frac{1}{z}, \tag{*}$$

то для полученной при этом поверхности F' векторное поле $\tau'(\xi', \eta', \zeta')$, где

$$\xi' = \frac{\xi}{z}, \quad \eta' = \frac{\eta}{z}, \quad \zeta' = -\frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{z}, \tag{**}$$

является изгибающим.

Действительно, непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$dx' d\xi' + dy' d\eta' + dz' d\zeta' = \frac{1}{z^2}(dx\, d\xi + dy\, d\eta + dz\, d\zeta).$$

И, следовательно, $dr\, d\tau = 0$ влечет за собой $dr'\, d\tau' = 0$.

Непосредственно проверяется также, что поле τ' поверхности F' тривиально тогда и только тогда, когда тривиально поле τ на F.

Очевидно, эта теорема имеет место для общих выпуклых поверхностей и для общих изгибающих полей. Действительно, τ' удовлетворяет условию Липшица, так как условию Липшица удовлетворяет τ. Кроме того, почти всюду на F' имеем $dr'\,d\tau'=0$, так как $dr\,d\tau=0$ почти всюду на F.

Теперь нетрудно доказать теорему 2. Примем плоскость, проходящую через точку O, параллельную плоскости α, за плоскость xy, а точку O — за начало координат. Не ограничивая общности, можно считать, что поверхность F расположена в полупространстве $z>0$. Подвергнем поверхность F проективному преобразованию (*) и построим для полученной поверхности F' изгибающее поле τ' согласно формулам (**).

Так как класс допустимых деформаций F ограничен условием стационарности расстояний от центра O, то $\zeta'=0$ на границе поверхности F', которая однозначно проектируется на плоскость xy. По теореме 1 поле τ' тривиально вне плоских областей F'. Следовательно, поле τ тривиально вне плоских областей F. Теорема доказана.

Как следствие теоремы Дарбу—Зауера и основной леммы можно доказать, что поверхность Φ:

$$r=\frac{\bar r}{\bar r\tau},$$

где $\bar r$ — вектор точки выпуклой поверхности F, а τ — ее изгибающее поле, имеет отрицательную кривизну, если не содержит плоских областей. Если же F содержит плоские области, то эта поверхность имеет неположительную кривизну на множестве H тех точек, которые из начала координат проектируются не в плоские области F.

Рассмотрим бесконечные полные выпуклые поверхности, однозначно проектирующиеся на некоторую плоскость α. Не ограничивая общности, можно считать, что этой плоскостью является плоскость xy. Мы будем говорить, что поверхность закреплена на бесконечности относительно плоскости xy, если класс допустимых деформаций ее ограничивается условием

$$\frac{\zeta(P)}{(x^2(P)+y^2(P))^{1/2}}\to 0 \quad \text{при} \quad P\to\infty,$$

где $\zeta(P)$ — вертикальная составляющая скорости деформации.

Теорема 3. *Бесконечная выпуклая поверхность F, однозначно проектирующаяся на плоскость xy, не являющаяся цилиндром, не содержащая плоских областей и закрепленная на бесконечности относительно плоскости xy, является жесткой.*

Доказательство. Проекция G поверхности F на плоскость xy представляет собой выпуклую область. Эта область

может быть конечной, бесконечной, не покрывающей плоскость xy или покрывающей.

Пусть $\zeta(x, y)$ — вертикальная составляющая изгибающего поля поверхности F. Так как поверхность F не содержит плоских областей, то поверхность Φ: $z=\zeta(x, y)$ является поверхностью неположительной кривизны. Край этой поверхности, если область G не совпадает со всей плоскостью xy, лежит в плоскости xy и совпадает с границей области G. Это очевидным образом следует из того, что

$$\frac{\zeta(P)}{(x^2(P)+y^2(P))^{1/2}} \to 0 \quad \text{при} \quad P \to \infty.$$

В этом случае поверхность Φ может быть продолжена так, что ее проекция на плоскость xy будет совпадать со всей плоскостью xy и полученная при этом поверхность также будет поверхностью отрицательной кривизны. Для этого достаточно продолжить функцию $\zeta(x, y)$ наружу области G, полагая $\zeta(x, y)=0$. Продолженную таким образом поверхность Φ будем обозначать $\bar{\Phi}$.

По теореме С. Н. Бернштейна о поверхностях отрицательной кривизны, распространенной на нерегулярные поверхности Г. М. Адельсоном-Вельским [1], поверхность $\bar{\Phi}$ является цилиндрической. А следовательно, цилиндрической является и поверхность Φ.

Не ограничивая общности, можно считать, что образующие поверхности Φ параллельны оси x, и, следовательно, $\zeta=\gamma_1(y)$.

Обратимся к уравнениям для изгибающего поля:

$$\xi_x+p\zeta_x=0, \quad \xi_y+\eta_x+p\zeta_y+q\zeta_x=0, \quad \eta_y+q\zeta_y=0.$$

Из первого уравнения следует, что $\xi_x=0$ и, следовательно, $\xi=\gamma_2(y)$.

Интегрируя второе уравнение $\gamma_2'+\eta_x+p\gamma_1'=0$ вдоль прямых $y=\text{const}$, получим

$$x\gamma_2'+\eta+z\gamma_1'+\gamma_3=0, \tag{***}$$

где γ_3 — некоторая функция от y.

Возьмем вторую разность из уравнения (***) вдоль прямой $y=\text{const}$. Тогда получим

$$\Delta\Delta\eta+\gamma_1'\Delta\Delta z=0.$$

Так как на поверхности F нет ни одной полной прямой, то можно считать, что $\Delta\Delta z\neq 0$. Следовательно, функция $\gamma_1'=\Delta\Delta\eta/\Delta\Delta z$ дифференцируема почти всюду, так как $\Delta\Delta\eta$ и $\Delta\Delta z$ удовлетворяют условию Липшица.

Взяв первую разность уравнения (***), получим

$$\gamma_2' + \Delta\eta + \Delta z \gamma_1' = 0.$$

Отсюда, подобно предыдущему, заключаем о дифференцируемости почти всюду функции γ_2'. И, наконец, устанавливаем дифференцируемость γ_3 почти всюду.

Дифференцируя уравнение (***) по y и вычитая из него $\eta_y + q\zeta_y = 0$, получим

$$x\gamma_2'' + z\gamma_1'' + \gamma_3' = 0.$$

Если $\gamma_1'' \neq 0$ хотя бы для одного y_0, то z вдоль прямой $y = y_0$ является линейной функцией x на поверхности. Это значит, поверхность содержит прямую и, следовательно, является цилиндрической, что исключено. Если же для всех y, где γ_1'' существует, γ_1'' равна нулю, то из условия Липшица для γ_1' следует, что γ_1 — линейная функция, т. е. ζ — линейная функция. И в силу условия закрепления поверхности на бесконечности

$$\zeta = \text{const}.$$

Отсюда, подобно тому как в доказательстве теоремы 1, заключаем, что изгибающее поле τ тривиально.

Теорема 4. *Замкнутая выпуклая поверхность, не содержащая плоских областей, жесткая.*

Замкнутая выпуклая поверхность, содержащая плоские области, является жесткой вне плоских областей.

Доказательство. Пусть F — замкнутая выпуклая поверхность и τ — ее изгибающее поле. Возмем шар Ω, содержащий внутри поверхность F, так чтобы поверхность шара и поверхность F имели хотя бы одну общую точку. Обозначим ее O. Введем в пространстве прямоугольные декартовы координаты x, y, z, приняв точку O за начало координат, а касательную плоскость к шару в точке O — за плоскость xy.

Обозначим V касательный конус поверхности F в точке O. Касательным конусом поверхности в точке O называется граница наименьшего телесного конуса с вершиной O, содержащего поверхность F. Собственно конусом V будет только тогда, если точка O коническая. В ребристой точке касательный конус вырождается в двугранный угол, а в гладкой точке — в плоскость, касательную к поверхности F.

Пусть V_F — общая часть поверхности F и касательного конуса V. В общем случае V_F состоит из отрезков с одним концом в точке O, причем если g — отрезок, принадлежащий V_F, то он не лежит в плоскости xy.

Часть поверхности F, не принадлежащая V, т. е. область $F - V_F$, проектируется однозначно от начала координат O.

Подвергнем поверхность F проективному преобразованию

$$x' = \frac{x}{z}, \quad y' = \frac{y}{z}, \quad z' = \frac{1}{z},$$

а ее изгибающее поле τ преобразованию

$$\xi' = \frac{\xi}{z}, \quad \eta' = \frac{\eta}{z}, \quad \zeta' = -\frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{z}.$$

По теореме Дарбу — Зауера поле $\tau'(\xi', \eta', \zeta')$ является изгибающим для поверхности F'.

Обозначим F'' часть поверхности F', которая соответствует области $F - V_F$ поверхности F при указанном проективном преобразовании. Посмотрим, как ведет себя вертикальная составляющая ζ' поля τ', когда точка приближается к границе F'' или удаляется в бесконечность, если поверхность F'' бесконечна.

Если точка Q поверхности F'' приближается к границе поверхности или удаляется в бесконечность, то соответствующая ей точка P поверхности F неограниченно приближается к границе области $F - V_F$.

Не ограничивая общности, будем считать, что изгибающее поле τ поверхности F в точке O равно нулю. Этого всегда можно добиться, наложив на поле τ поле скоростей сдвига поверхности F как твердого тела.

При условии $\tau(O) = 0$ утверждается, что когда точка Q поверхности F'' приближается к границе поверхности F'' или удаляется в бесконечность, то $\zeta'(Q) \to 0$.

Допустим, утверждение неверно, и существует последовательность точек Q, приближающихся к границе поверхности F'' или удаляющихся в бесконечность, такая, что $\zeta'(Q) > \varepsilon > 0$. При этом последовательность соответствующих точек P на F неограниченно приближается к границе области $F - V_F$. Не ограничивая общности, можно считать, что последовательность точек P сходится к некоторой точке P_0. Точка P_0 либо совпадает с точкой O, либо является концом отрезка g прямолинейной образующей конуса V. Этот отрезок лежит на поверхности F, но не лежит в плоскости xy, так как поверхность расположена внутри сферы Ω.

Пусть P_0 является концом некоторого отрезка g. Вдоль отрезка g почти всюду $r'\tau' = 0$. А так как $r' = \text{const}$, то $r'(\tau(P_0) - \tau(O)) = 0$. Но $\tau(O) = 0$. Следовательно, $r'\tau(P_0) = 0$. И так как r' и $r(P_0)$ параллельны, то $r(P_0)\tau(P_0) = 0$. Таким образом, предел ζ' по выделенной подпоследовательности Q, равный $-\frac{r(P_0)\tau(P_0)}{z(P_0)}$, равен нулю, что невозможно.

Допустим, что $P_0 \equiv O$. Покажем, что и в этом случае $\zeta'(Q) \to 0$.

Не ограничивая общности, можно считать, что последовательность прямых P_0P сходится к некоторой образующей конуса V. Соединим точки P_0 и P кратчайшей γ_P. При достаточной близости P к P_0 полукасательные кратчайшей γ_P образуют с направлением отрезка P_0P сколь угодно малые углы. Поэтому можно записать

$$r'(s) = r(P) + \varepsilon(s, P)|r(P)|,$$

где дифференцирование производится по дуге s кратчайшей γ_P, а $\varepsilon(s, P) \to 0$ при $P \to P_0$.

На кратчайшей γ_P почти всюду $r'\tau' = 0$. Подставляя сюда $r' = r(P) + \varepsilon|r(P)|$, получим

$$r(P)\tau'(s) + \tau'(s)\varepsilon(s, P)|r(P)| = 0.$$

Интегрируя это равенство вдоль γ_P, получим

$$r(P)\tau(P) + \bar{\varepsilon}(P)|r(P)|^2 = 0,$$

где $\bar{\varepsilon}(P) \to 0$ при $P \to P_0$.

Обратимся теперь к функции $\zeta'(Q)$:

$$\zeta'(Q) = -\frac{r(P)\tau(P)}{z(P)} = \bar{\varepsilon}(P)\frac{|r(P)|^2}{z(P)}.$$

Внутри шара Ω величина $|r(P)|^2/z(P)$ ограничена некоторой постоянной, зависящей от радиуса шара. И так как $\bar{\varepsilon}(P) \to 0$, $\zeta'(Q) \to 0$, то и в случае $P_0 \equiv O$ мы также приходим к противоречию.

Итак, когда точка Q неограниченно приближается к границе F'' или удаляется в бесконечность, то $\zeta'(Q) \to 0$.

Пусть теперь поверхность F не содержит плоских областей, тогда их не содержит и F'. Следовательно, поверхность Φ': $z = \zeta'(x, y)$ имеет отрицательную кривизну. Из поведения функции $\zeta'(Q)$, установленного выше, следует, что Φ' является плоскостью xy или областью на этой плоскости. А это значит, что изгибающее поле τ в области $F - V_F$ тривиально.

Ввиду произвола в выборе шара Ω поле τ тривиально на всей поверхности.

Для случая, когда поверхность F содержит плоские области, изменением поля τ' на поверхности F'' можно добиться, чтобы $\zeta' \equiv 0$. А отсюда следует, что поле тривиально вне плоских областей поверхности $F - V_F$. Затем это заключение распространяется на всю поверхность F. Теорема доказана.

Как следствие теоремы 4 получается, что *если плоские области замкнутой выпуклой поверхности жесткие, то поверхность жесткая. Например, замкнутый выпуклый многогранник с жесткими гранями жесткий.*

§ 8. Некоторые приложения теорем о жесткости общих выпуклых поверхностей

В настоящем параграфе мы дадим некоторые важные приложения теорем о жесткости общих выпуклых поверхностей. Мы рассмотрим вопрос о регулярности бесконечно малых изгибаний регулярных поверхностей. Укажем новые подходы к доказательству теорем об однозначной определенности общих выпуклых поверхностей.

Теорема 1. *Регулярная выпуклая поверхность с положительной гауссовой кривизной не допускает иных изгибающих полей, кроме регулярных.*

Более точно, если поверхность принадлежит к классу $C^{n+\alpha}$ ($n\geqslant 2$, $\alpha>0$), *т. е. n раз дифференцируема и ее n-е производные удовлетворяют условию Липшица с показателем* α, *то каждое изгибающее поле принадлежит классу* $C^{n+\alpha'}$ *при любом* $\alpha'<\alpha$.

Если поверхность аналитическая, то любое ее изгибающее поле аналитическое.

Доказательство. Пусть F — выпуклая поверхность класса $C^{n+\alpha}$ с положительной гауссовой кривизной, τ — ее изгибающее поле. Рассмотрим вопрос о регулярности изгибающего поля τ в окрестности произвольной точки P поверхности F.

Введем систему координат x, y, z, приняв точку P за начало координат, а плоскость xy выберем так, чтобы некоторая окрестность точки P поверхности F однозначно проектировалась на плоскость xy. При достаточно малом R окрестность точки P поверхности F задается уравнением $z=z(x, y)$, где $z(x, y)$ — функция класса $C^{n+\alpha}$ в круге $\bar{\omega}$: $x^2+y^2<R^2$.

Построим последовательность аналитических функций $\tilde{z}(x, y)$, сходящуюся к $z(x, y)$ вместе с производными до n-го порядка и производными порядка n, равностепенно удовлетворяющими условию Липшица с показателем α в области $\bar{\omega}'$: $x^2+y^2<R^2+\varepsilon'$ ($\varepsilon'>0$). Построим последовательность аналитических функций $\tilde{\zeta}(x, y)$ с равномерно ограниченными первыми производными, сходящуюся к вертикальной составляющей $\zeta(x, y)$ изгибающего поля τ в области $\bar{\omega}'$. Построение последовательности $\tilde{z}(x, y)$ гарантируется принадлежностью $z(x, y)$ классу $C^{n+\alpha}$, а последовательности $\tilde{\zeta}(x, y)$ — условием Липшица для $\zeta(x, y)$.

Построим аналитическое изгибающее поле $\tilde{\tau}$ поверхности $\tilde{F}_{\bar{\omega}}$: $z=\tilde{z}(x, y)$ $(x^2+y^2<R^2)$ с вертикальной составляющей $\tilde{\zeta}(x, y)$ на границе и удовлетворяющее в точке P условиям $\tilde{\xi}=\tilde{\eta}=0$, $\tilde{\xi}_y=0$. Существование такого поля доказано в § 3.

Вертикальная составляющая поля $\tilde{\zeta}(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\tilde{z}_{xx}\tilde{\zeta}_{yy} - 2\tilde{z}_{xy}\tilde{\zeta}_{xy} + \tilde{z}_{yy}\tilde{\zeta}_{xx} = 0 \qquad (*)$$

По одной теореме Шаудера [72] в любой компактной области G круга $\bar{\omega}$ для функции $\tilde{\zeta}(x, y)$, ее производных до n-го порядка и постоянных Липшица для этих призводных относительно показателя $\alpha' < \alpha$ можно указать оценку в зависимости от максимума модулей коэффициентов уравнения $(*)$, их производных до n-го порядка и постоянных Липшица n-х производных относительно показателя α. Принимая во внимание выражения для горизонтальных составляющих поля $\tilde{\tau}$ через $\tilde{\zeta}(x, y)$ (данные в § 3), заключаем, что в зависимости от тех же величин могут быть указаны оценки для $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$, их производных до n-го порядка и постоянных Липшица для этих производных относительно показателя α'.

Из последовательности изгибающих полей $\tilde{\tau}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Предельное поле $\bar{\tau}$ этой подпоследовательности из-за упомянутых оценок для полей $\bar{\tau}$ принадлежит классу $C^{n+\alpha'}$. По теореме о сходимости изгибающих полей $\bar{\tau}$ является изгибающим на поверхности $F_{\bar{\omega}}$.

Так как на границе поверхности $F_{\bar{\omega}}$ вертикальные составляющие изгибающих полей τ и $\bar{\tau}$ совпадают, то по теореме 1 (§ 7) поле $\tau - \bar{\tau}$ тривиально. Поэтому заданое поле также принадлежит классу $C^{n+\alpha'}$.

Если поверхность F аналитическая, то по доказанному поле τ принадлежит C^3. А так как вертикальная составляющая $\zeta(x, y)$ поля τ удовлетворяет уравнению эллиптического типа с аналитическими коэффициентами

$$r\zeta_{yy} - 2s\zeta_{xy} + \zeta_{xx} = 0,$$

то $\zeta(x, y)$ — по теореме С. Н. Бернштейна аналитическая функция. Вместе с тем должны быть аналитическими и функции $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$, которые известным образом выражаются через $\zeta(x, y)$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Замкнутые изометричные выпуклые поверхности равны.*

Доказательство. Пусть F_1 и F_2 — две замкнутые изометричные выпуклые поверхности. Допустим, они не равны. Тогда существует поверхность F_2', сколь угодно близкая F_1, ей изометричная, но не равная (§ 2, гл. III).

Пусть $r_1(X)$ есть вектор произвольной точки X поверхности F_1, а $r_2(X)$ — вектор соответствующей точки поверхности F_2'. При

достаточной близости F_2' к F_1 поверхность F, задаваемая уравнением

$$r = r_1(X) + r_2(X),$$

выпуклая и $dr_1 + dr_2 \neq 0$.

Рассмотрим векторное поле

$$\tau = r_1(X) - r_2(X)$$

на поверхности F. Нетрудно показать, что оно удовлетворяет условию Липшица, и почти всюду $dr\,d\tau = 0$. Следовательно, поле τ является изгибающим на поверхности F.

Так как выпуклая поверхность F является жесткой вне плоских областей (теорема 4, § 7), то поле τ вне плоских областей F тривиально.

Относительно плоских областей F можно доказать, что каждой из них на поверхностях F_1 и F_2 соответствуют тоже плоские области. А отсюда нетрудно заключить, что поле τ тривиально на всей поверхности F и, следовательно,

$$\tau = r_1 - r_2 = a \times (r_1 + r_2) + b,$$

где a и b — постоянные векторы.

Возьмем две произвольные точки X и X' на поверхности F_1 и обозначим $r_1' - r_1 = \Delta r_1$. Соответствующий вектор для поверхности F_2' обозначим Δr_2. Тогда

$$\Delta r_1 - \Delta r_2 = a \times (\Delta r_1 + \Delta r_2).$$

Отсюда

$$\Delta r_1^2 - \Delta r_2^2 = 0.$$

Таким образом, пространственное расстояние $|\Delta r_1|$ между точками X и X' поверхности F_1 равно пространственному расстоянию $|\Delta r_2|$ между соответствующими точками поверхности F_2', т. е. поверхности F_1 и F_2' равны, что противоречит построению поверхности F_2'. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть F_1 и F_2 — две изометричные выпуклые поверхности, однозначно проектирующиеся на плоскость xy, обращенные выпуклостью в одну сторону, причем в начале координат совпадают две соответствующие по изометрии точки этих поверхностей. Пусть $z_1(P)$ — координата z произвольной точки P поверхности F_1, а $z_2(P)$ — координата z соответствующей по изометрии точки поверхности F_2.*

Тогда функция $z_1(P) - z_2(P)$ в начале координат O не может достигать ни строгого максимума, ни строгого минимума.

Это утверждение можно доказать при помощи основной леммы о бесконечно малых изгибаниях общих выпуклых поверхностей следующим образом.

Пусть $r_1(P)$ и $r_2(P)$ — векторы соответствующих по изометрии точек поверхностей F_1 и F_2. Поверхность F_2 вращением около оси z можно расположить так, что поверхность F, задаваемая уравнением $r=r_1(P)+r_2(P)$, вблизи точки O (начала координат) будет выпуклой и $dr_1+dr_2\neq 0$.

Векторное поле $\tau=r_1(P)-r_2(P)$ будет изгибающим на поверхности F. Его вертикальная составляющая $z_1(P)-z_2(P)$ по основной лемме не может достигать в точке O ни строгого максимума, ни строгого минимума, если эта точка не является внутренней точкой плоской области на F.

Если же точка O является внутренней точкой плоской области на F, то она является внутренней точкой плоских областей на F_1 и F_2. А в этом случае $z_1(P)-z_2(P)$, очевидно, не может иметь ни строгого максимума, ни строгого минимума в O. Теорема доказана.

С помощью основной леммы о бесконечно малых изгибаниях общих выпуклых поверхностей доказывается также следующая теорема.

Пусть F_1 и F_2 — две изометричные выпуклые поверхности, имеющие общую точку P_0, однозначно проектирующиеся из начала координат O, обращенные выпуклостью в одну сторону относительно направления OP_0. Пусть $\rho_1(P)$ и $\rho_2(P)$ — расстояния соответствующих по изометрии точек этих поверхностей от начала координат.

Тогда функция $\rho_1(P)-\rho_2(P)$ в точке P_0 не может достигать ни строгого максимума, ни строго минимума.

Глава V

Выпуклые поверхности в пространствах постоянной кривизны

А. Д. Александров перенес основные результаты построенной им теории выпуклых поверхностей на случай выпуклых поверхностей в пространствах постоянной кривизны (см. § 12 гл. I). В частности, он доказал соответствующие теоремы о реализуемости абстрактно заданной метрики выпуклыми поверхностями в таких пространствах.

В этой связи представляется естественным перенести результаты об однозначной определенности выпуклых поверхностей, о регулярности выпуклых поверхностей с регулярной метрикой и результаты о бесконечно малых изгибаниях выпуклых поверхностей, содержащиеся в гл. II, III и IV, на случай выпуклых поверхностей в пространствах постоянной кривизны. Эта задача и решается в настоящей главе.

Решение указанной задачи в нашем изложении будет основано на возможности сопоставить каждой паре изометричных объектов пространства постоянной кривизны R пару изометричных объектов евклидова пространства E, находящегося с R в геодезическом соответствии. Сущность этого сопоставления для случая эллиптического пространства состоит в следующем.

Пусть R — эллиптическое пространство с кривизной $K=1$. Введем в R вейерштрассовы координаты x_i ($i=0, 1, 2, 3$) и сопоставим каждой точке пространства R пару точек четырехмерного евклидова пространства с декартовыми координатами x_i и $-x_i$. Эти точки заполнят единичную сферу, так как вейерштрассовы координаты удовлетворяют условию

$$x^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Обозначим E_0 евклидово пространство $x_0=0$. Пусть в эллиптическом пространстве R имеем две изометричные фигуры F' и F''. Пусть X' — произвольная точка фигуры F', а X'' — соответствующая по изометрии точка фигуры F''. Тогда уравнениями

$$y = \frac{x' - e_0(x'e_0)}{e_0(x' + x'')}, \qquad y = \frac{x'' - e_0(x''e_0)}{e_0(x' + x'')},$$

где e_0 — единичный вектор по оси x_0, в евклидовом пространстве E_0 задаются две изометричные фигуры Φ' и Φ''. Если фигуры F' и F'' конгруэнтны, то фигуры Φ' и Φ'' тоже конгруэнтны. Обратно, если Φ' и Φ'' конгруэнтны, то конгруэнтны F'

и F''. Таким образом, указанное преобразование сводит вопрос об однозначной определенности для поверхностей в эллиптическом пространстве к вопросу однозначной определенности для поверхностей евклидова пространства.

Так как рассмотрение бесконечно малых изгибаний поверхности связано с рассмотрением бесконечно близких изометричных поверхностей, то указанное преобразование позволяет свести вопрос о бесконечно малых изгибаниях поверхностей в эллиптическом пространстве к вопросу о бесконечно малых изгибаниях поверхностей евклидова пространства.

Для простоты и наглядности изложения мы ограничиваемся рассмотрением выпуклых поверхностей в эллиптическом пространстве. Для выпуклых поверхностей в пространстве Лобачевского мы рассматриваем только один вопрос — вопрос о регулярности выпуклой поверхности с регулярной метрикой.

§ 1. Эллиптическое пространство

Для того чтобы сделать изложение настоящей главы более доступным, представляется целесообразным напомнить некоторые факты геометрии эллиптического пространства. Эллиптическое пространство допускает интерпретацию на объектах евклидова пространства. В частности, его можно представить себе как сферу четырехмерного евклидова пространства с отождествленными диаметрально противоположными точками. Мы широко пользуемся этой интерпретацией. Поэтому начнем с напоминания некоторых известных понятий для четырехмерного евклидова пространства.

Под четырехмерным вектором мы будем понимать любую четверку вещественных чисел (x_0, x_1, x_2, x_3). Числа x_i называются координатами вектора. Для векторов обычным образом определяются операции сложения, вычитания и умножения на число: суммой (разностью) векторов (x_i) и (y_i) называют вектор $(x_i \pm y_i)$, а произведением вектора (x_i) на число λ—вектор (λx_i).

Четырехмерные векторы можно представлять себе направленными отрезками четырехмерного евклидова пространства. При этом формально введенные операции сложения, вычитания векторов и умножения на число соответствуют известным геометрическим определениям для трехмерных векторов.

Помимо указанных трех операций над векторами, введем скалярное произведение двух векторов, векторное произведение трех векторов и смешанное произведение четырех векторов.

Именно, *скалярным произведением* двух векторов x и y мы будем называть число

$$(x, y) = x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3,$$

где x_i — координаты вектора x, а y_i — координаты вектора y.

Векторным произведением трех векторов x, y, z, взятых в данном порядке, мы будем называть вектор (xyz), i-я координата которого равна умноженному на $(-1)^i$ детерминанту третьего порядка матрицы

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

после вычеркивания в ней i-й колонки (номер колонки условно отсчитывается индексом при координатах).

Наконец, смешанным произведением $(abcd)$ четырех векторов a, b, c, d называется число, равное детерминанту, составленному из координат этих векторов, т. е.

$$(abcd) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Очевидно, векторное и смешанное произведения не изменяются при циклической перестановке сомножителей, а при перестановке двух сомножителей умножаются на (-1). Отсюда следует, что векторные и смешанные произведения равны нулю, если сомножители линейно зависимы.

Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов дистрибутивны по каждому из сомножителей.

Отметим следующие тождества:

$$(abc)\,d = (abcd);$$

$$(abc)(a'b'c') = \begin{vmatrix} (aa') & (ab') & (ac') \\ (ba') & (bb') & (bc') \\ (ca') & (cb') & (cc') \end{vmatrix};$$

$$(abcd)(a'b'c'd') = \begin{vmatrix} (aa') & (ab') & (ac') & (ad') \\ (ba') & (bb') & (bc') & (bd') \\ (ca') & (cb') & (cc') & (cd') \\ (da') & (db') & (dc') & (dd') \end{vmatrix}.$$

Первое из них следует непосредственно из определения скалярного и векторного умножения, третье — из теоремы умножения определителей. Для доказательства второго тождества заметим, что обе его части линейны относительно каждого из векторов $a, b, \ldots, c'$. Поэтому его достаточно проверить для координатных векторов $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$.

При этом, если обе тройки векторов a, b, c и a', b', c' одинаковы с точностью до круговой перестановки, то обе части равенства равны либо $+1$, либо -1, если же тройки различны, то обе части равенства равны нулю. (Векторное произведение трех различных координатных векторов равно четвертому координатному вектору, взятому с соответствующим знаком.)

Абсолютной величиной вектора x называется длина соответствующего ему отрезка, вычисляемая по обычной формуле, как и для трехмерных векторов:

$$|x| = (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} = \sqrt{(x, x)}.$$

Под вращением векторного пространства мы будем понимать линейное преобразование

$$x_i' = \sum_j \alpha_i^j x_j, \qquad i, j = 0, 1, 2, 3, \tag{1}$$

при котором абсолютные величины векторов не изменяются, т. е. для любого x

$$|x| = |x'|.$$

Очевидно, скалярное произведение векторов инвариантно относительно вращений, так как

$$(xy) = \frac{1}{4}\{(x+y)^2 - (x-y)^2\} = \frac{1}{4}\{|x+y|^2 - |x-y|^2\}.$$

При вращении (1) координатные векторы e_0 $(1, 0, 0, 0)$, ..., e_3 $(0, 0, 0, 1)$ переходят соответственно в векторы

$$(\alpha_0^0, \alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0), \ldots, (\alpha_0^3, \alpha_1^3, \alpha_2^3, \alpha_3^3).$$

Отсюда, принимая во внимание инвариантность скалярного произведения, заключаем об ортогональности матрицы (α_i^j):

$$\alpha_0^i\alpha_0^j + \alpha_1^i\alpha_1^j + \alpha_2^i\alpha_2^j + \alpha_3^i\alpha_3^j = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i \neq j, \\ 1 & \text{при} \quad i = j. \end{cases} \tag{2}$$

Детерминант преобразования (1) равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_0^0 & \alpha_1^0 & \alpha_2^0 & \alpha_3^0 \\ \alpha_0^1 & \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 \\ \alpha_0^2 & \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \\ \alpha_0^3 & \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно возвести Δ в квадрат и воспользоваться соотношением ортогональности (2).

Условимся называть вращение собственным, если $\Delta = +1$, и несобственным, если $\Delta = -1$. Пусть A — любое вращение. Тогда

$$(Ax, Ay, Az) = \pm (x, y, z),$$
$$(Aa, Ab, Ac, Ad) = \pm (abcd),$$

где знак плюс соответствует собственным вращениям, а знак минус — несобственным. Вторая из этих формул является простым следствием теоремы об умножении определителей, ибо

$$(Aa, Ab, Ac, Ad) = (abcd)\Delta.$$

Первая формула следует из второй, так как для любого вектора u с одной стороны

$$(Ax, Ay, Az, Au) = (Ax, Ay, Az)Au,$$

а с другой —

$$(Ax, Ay, Az, Au) = \Delta(xyzu) = \Delta A(xyz)Au.$$

Эллиптическое пространство можно определить как полное трехмерное риманово многообразие постоянной кривизны, гомеоморфное проективному пространству. Сфера в четырехмерном евклидовом пространстве также представляет собой трехмерное риманово многообразие с постоянной кривизной, а следовательно, она локально изометрична эллиптическому пространству. Оказывается, если, отправляясь от некоторой точки, такую сферу постепенно изометрически накладывать на эллиптическое пространство соответствующей кривизны, то вся сфера покроет его дважды, причем в совпадение приходит каждая пара диаметрально противоположных точек сферы. Это позволяет представлять себе эллиптическое пространство в виде трехмерной сферы, у которой отождествлены диаметрально противоположные точки. В дальнейшем мы будем постоянно пользоваться этой наглядной моделью эллиптического пространства. Кривизну пространства будем считать равной $+1$, и, следовательно, соответствующая ему сфера будет единичного радиуса.

Так как движение эллиптического пространства есть изометрическое преобразование, а всякое изометрическое преобразование сферы в себя есть некоторое вращение (собственное или несобственное), то движения эллиптического пространства на сферической модели надо представлять себе как вращения сферы около ее центра. Отметим еще, что прямые эллиптического пространства, как геодезические на сферической модели, представляются большими кругами, а плоскости — пересечениями гиперплоскостей, проходящих через центр, со сферой.

Введем в эллиптическом пространстве координаты, сопоставляя с каждой точкой декартовы координаты соответствующей

точки единичной сферы. Введенные так координаты в эллиптическом пространстве называются вейерштрассовыми. Из-за неоднозначности изометрического отображения эллиптического пространства на сферу они определены с точностью до знака. Если рассматривать не все пространство, а его часть после удаления некоторой плоскости, например $x_0=0$, как это мы будем часто делать, эта неоднозначность может быть устранена дополнительным требованием $x_0>0$.

Каждая плоскость в эллиптическом пространстве в вейерштрассовых координатах задается линейным однородным уравнением

$$a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0,$$

где a_i — постоянные, не все равные нулю. Каждая прямая задается независимой системой таких двух уравнений:

$$a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0,$$
$$b_0x_0+b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0.$$

Эти уравнения допускают очевидную векторную запись с помощью скалярных произведений:

$$(ax)=0 \tag{3}$$

и, соответственно,

$$(ax)=0, \qquad (bx)=0. \tag{4}$$

Из указанного способа задания прямой следует возможность ее параметрического задания:

$$x=\rho(c+dt),$$

где c и d — постоянные векторы, t — параметр, а ρ — нормирующий множитель, определяемый условием $x^2=1$. В качестве c и d можно взять любые два различных решения уравнений (4). Аналогично, плоскость (3) может быть задана уравнением в параметрической форме

$$x=\rho(c+du+ev),$$

где c, d, e — три независимых решения уравнения (3), u, v — параметры, а ρ — нормирующий множитель, определяемый тем же условием.

Выразим линейный элемент эллиптического пространства в вейерштрассовых координатах. Так как вейерштрассовы координаты равны (с точностью до знака) декартовым координатам соответствующей по изометрии точки сферы, то линейный элемент эллиптического пространства в вейерштрассовых координатах совпадает с линейным элементом сферы в декартовых координатах, т. е.

$$ds^2=dx_0^2+dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2.$$

Остановимся еще на проективной модели эллиптического пространства, которой мы также будем пользоваться. Для этого пополним евклидово пространство $x_0=1$ несобственными элементами. Полученное проективное пространство обозначим P_0. Сопоставим теперь каждой точке эллиптического пространства с вейерштрассовыми координатами x_i точку проективного пространства P_0 с однородными координатами $\bar{x}_i$ по формуле

$$\bar{x}=\frac{x}{(xe_0)},$$

где e_0 — единичный координатный вектор $(1, 0, 0, 0)$. Очевидно, это отображение является одно-однозначным. Наглядно его можно представить себе проектированием единичной сферы из ее центра на гиперплоскость $x_0=1$.

Построенное отображение эллиптического пространства на проективное замечательно во многих отношениях. Оно является геодезическим в том смысле, что прямые эллиптического пространства переходят в прямые проективного пространства. Движениям эллиптического пространства соответствуют проективные преобразования, сохраняющие мнимую овальную поверхность $\bar{x}^2=0$. Последнее вытекает из инвариантности скалярного произведения (x, x) относительно вращений.

Это позволяет представлять себе эллиптическое пространство как проективное, в котором роль движений играют проективные преобразования, переводящие мнимую овальную поверхность $\bar{x}^2=0$ (абсолют) в себя.

Заметим еще, что если из эллиптического пространства удалить плоскость $x_0=0$, то оставшаяся его часть одно-однозначно указанным способом отображается на евклидово пространство $x_0=1$. Это евклидово пространство является соприкасающимся для эллиптического в точке $(1, 0, 0, 0)$. Действительно, линейный элемент евклидова пространства $d\bar{s}^2=d\bar{x}^2$. Так как в точке $(1, 0, 0, 0)$ произведение $(xe_0)=x_0=1$ и стационарно, то

$$d\bar{s}^2-ds^2=0,$$
$$\delta(d\bar{s}^2-ds^2)=0.$$

А это значит, что евклидово пространство в этой точке является соприкасающимся.

Определение длины кривой в эллиптическом пространстве такое же, как и в евклидовом. Она есть предел длин правильно вписанных в кривую ломаных, когда звенья их неограниченно убывают. Длина звена ломаной с концами в точках (t) и $(t+\Delta t)$ кривой $x=x(t)$ определяется как

$$\simeq|x(t+\Delta t)-x(t)|. \tag{5}$$

Отсюда, подобио тому как для кривых евклидова простраиства в их обычном векториом задании, получается формула

$$s = \int \sqrt{x'^2}\, dt.$$

Будем иазывать параметризацию кривой естествеиной, если параметром служит дуга s.

Пусть γ — кривая в эллиптическом простраистве и

$$x = x(s)$$

— ее естествеииая параметризация. Выясиим свойства вектора $\tau = x'(s)$.

Во-первых, τ является едиииичым вектором, так как

$$s = \int \sqrt{\tau^2}\, ds,$$

и следовательио, $\tau^2 = 1$.

Рассмотрим теперь прямую, задаииую уравиением в параметрической форме

$$\rho x = x(s) + t\tau(s)$$

(параметр t). Она является касательиой к кривой γ в точке (s). Действительно, оиа проходит через точку (s) $(t=0)$. Оцеиим расстояиие точки $(s+\Delta s)$ кривой от этой прямой. Оио ие больше расстояния указаииой точки от точки $x(s) + \Delta s\, \tau(s)$, лежащей на прямой. А расстояиие между этими точками, равиое

$$\simeq |\, x(s+\Delta s) - x(s) - \tau(s)\Delta s\, |,$$

имеет порядок Δs^2. Отсюда следует, что прямая является касательиой. В связи с этим мы будем иазывать вектор τ едиииичым касательиым вектором кривой.

Пусть кривые γ' и γ'' исходят из общей точки P и

$$x = x_1(s), \qquad x = x_2(\sigma)$$

— их естествеииые параметризации. Найдем угол между кривыми в точке P. По определеиию угол между кривыми есть угол между соответствующими кривыми в соприкасающемся евклидовом пространстве в точке P.

Пусть $P \equiv (1, 0, 0, 0)$. Тогда кривые, соответствующие γ' и γ'' в соприкасающемся евклидовом простраистве точки P, задаются уравнениями

$$y = \frac{x_1}{(x_1 e_0)}, \qquad y = \frac{x_2}{(x_2 e_0)}.$$

В точке P в силу стациоиариости $(x_1 e_0)$ и $(x_2 e_0)$ единичие касательиые векторы этих кривых будут τ' и τ'', и, следовательно,

$$\cos\vartheta = (\tau'\tau'').$$

Так как операция скалярного умножения векторов инвариантна относительно движений пространства, то эта формула верна, какова бы ни была точка P.

Вычислим кривизну k кривой γ: $x=x(s)$ в произвольной ее точке. По определению кривизна γ в точке P есть кривизна соответствующей кривой в соприкасающемся евклидовом пространстве. Пусть $P\equiv(1, 0, 0, 0)$. Соответствующая кривая в соприкасающемся евклидовом пространстве задается уравнением

$$y=\frac{x(s)}{(x(s)e_0)}.$$

Ее кривизна, как известно, выражается по формуле

$$k^2=\frac{y'^2y''^2-(y'y'')^2}{(y'^2)^3}.$$

Если подставить в эту формулу выражение для y через x и воспользоваться соотношениями:

$$x^2=1, \quad xx'=0, \quad x'^2=1, \quad xx''=-1, \quad x=e_0,$$

то получим

$$k^2=x''^2-1.$$

Благодаря инвариантности этой формулы относительно движений, она верна не только в точке $(1, 0, 0, 0)$, но и в любой точке.

Найдем соприкасающуюся плоскость кривой γ в точке (s). Для этого рассмотрим плоскость, заданную уравнением в параметрической форме:

$$\rho x=x(s)+ux'(s)+vx''(s)$$

(параметры u, v).

Она, очевидно, проходит через точку (s) кривой $(u=v=0)$. Расстояние точки $(s+\Delta s)$ кривой от этой плоскости не больше чем расстояние до точки

$$\frac{1}{\rho}\left(x(s)+\Delta sx'(s)+\frac{\Delta s^2}{2}x''(s)\right).$$

А это последнее

$$\simeq\left|x(s+\Delta s)-x(s)-\Delta sx'(s)-\frac{\Delta s^2}{2}x''(s)\right|$$

и имеет порядок по крайней мере Δs^3. Отсюда следует, что плоскость является соприкасающейся.

Прямая $\rho x=x(s)+\lambda x''(s)$ (параметр λ) является главной нормалью кривой. Действительно, она лежит в соприкасающейся плоскости. Далее, $\rho^2=1-2\lambda+o(\lambda^2)$, и, следовательно, при $\lambda=0$

$$x'_\lambda=x''(s)+x,$$

откуда $x'_\lambda x' = 0$, т. е. вектор x'_λ перпендикулярен касательному вектору кривой, и поэтому прямая является главной нормалью.

Единичный вектор ν, определяемый условием

$$x'' + x = \lambda\nu,$$

мы будем называть единичным вектором главной нормали кривой. Множитель λ имеет простое значение — это кривизна кривой. Действительно, возводя обе части равенства в квадрат, получим

$$\lambda^2 = x''^2 - 1 = k^2.$$

Заметим, что $x(s+\Delta s)$ с точностью до величин порядка Δs^2 допускает удобное представление

$$x(s+\Delta s) = x + \Delta s\tau + \frac{\Delta s^2}{2}(k\nu - x).$$

Векторы x, τ, ν взаимно перпендикулярны.

Пусть имеем поверхность F в эллиптическом пространстве, заданную уравнением

$$x = x(u, v).$$

Касательным вектором в точке P этой поверхности мы будем называть касательный вектор любой кривой на поверхности, исходящей из P. В частности, касательными векторами являются x_u и x_v.

Плоскость, заданная уравнением в параметрической форме

$$\rho x = x + \alpha x_u + \beta x_v \quad (\text{параметры } \alpha, \beta),$$

является касательной плоскостью поверхности, в чем легко убедиться рассуждением, которое приведено для касательной к кривой.

Из свойств векторного и смешанного произведений векторов легко следует, что вектор

$$n = (x x_u x_v)$$

перпендикулярен всем касательным векторам $(\lambda x_u + \mu x_v)$ поверхности в точке (u, v). В связи с этим мы будем называть вектор n вектором нормали поверхности. Единичный вектор нормали поверхности будем обозначать ξ.

Для поверхностей в эллиптическом пространстве, подобно тому как для поверхностей евклидова пространства, вводятся две квадратичные дифференциальные формы: первая квадратичная форма — линейный элемент поверхности —

$$ds^2 = dx^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

и вторая квадратичная форма —

$$-(dx\,d\xi) = (d^2x, \xi) = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2.$$

С помощью первой квадратичной формы обычным образом, как и для поверхностей евклидова пространства, выражаются длины крнвых, углы между кривыми, геодезическая кривизна кривой и гауссова (внутренняя) кривизна поверхности.

Рассмотрим более подробно вторую квадратичную форму поверхности.

Пусть имеем крнвую на поверхности

$$u=u(s), \qquad v=v(s),$$

где s — дуга вдоль кривой. Будем искать ее кривизну. Имеем

$$x''_{ss}=k\nu-x,$$

где k — кривизна кривой, а ν — единичный вектор ее главной нормали. Умножая это равенство на ξ и замечая, что векторы x и ξ перпендикулярны, получим $(x''_{ss}\xi)=k\cos\vartheta$, где ϑ — угол между главной нормалью кривой и нормалью поверхностн.

С другой стороны, так как векторы x_u и x_v перпендикулярны ξ, то

$$(x''_{ss}\xi)=(x_{uu}\xi)\,u'^2+2\,(x_{uv}\xi)\,u'v'+(x_{vv}\xi)\,v'^2=Lu'^2+2Mu'v'+Nv'^2.$$

В результате получается следующая формула:

$$k\cos\vartheta=\frac{L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}. \qquad (*)$$

Правая часть этой формулы имеет простой геометрический смысл. Это кривизна нормального сечения поверхности ($\vartheta=0$).

Определяя главные кривизны поверхности как экстремальные значения нормальных кривизн в данной точке, известным способом находим для них уравненне

$$\begin{vmatrix} L-kE & M-kF \\ M-kF & N-kG \end{vmatrix}=0,$$

откуда для произведения главных крнвизн получается следующее выражение:

$$k_1k_2=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}.$$

Произведение главных кривизн называется внешней кривизной поверхности. В эллнптическом пространстве внешняя кривизна поверхности K_e отличается от внутренней, которая известным образом вычисляется через коэффициенты первой квадратичной формы и их производные.

Имея формулу $(*)$ для нормальной кривизны поверхности, можно было бы ввести асимптотические линии, линии кривизны, подобно тому как для поверхностей евклндова пространства, и

доказать для них соответствующие теоремы. Мы не будем этого делать, так как в дальнейшем изложении эти теоремы почти не используются.

Покажем, что основная внешняя характеристнка геодезической на поверхностях евклндова пространства — то, что ее главная нормаль совпадает с нормалью поверхности, — имеет место и для геодезическнх на поверхностях эллиптического пространства.

Пусть γ — геодезическая на поверхности F эллиптического пространства и P — точка на ней. Не ограничивая общности, можно считать, что $P \equiv (1, 0, 0, 0)$. Построим соприкасающееся евклидово пространство в точке P. Пусть $\bar{F}$ — поверхность и $\bar{\gamma}$ — крнвая на ней, соответствующие F и γ. Очевидно, $\bar{\gamma}$ в P на $\bar{F}$ нмеет равную нулю геодезнческую кривизну. Поэтому главная нормаль кривой $\bar{\gamma}$ в P совпадает с нормалью поверхности

$$(\bar{\nu}, \bar{x}_u) = 0, \qquad (\bar{\nu}, \bar{x}_v) = 0.$$

Подставляя сюда

$$\bar{x} = \frac{x}{(xe_0)}, \qquad \bar{\nu} = \frac{1}{\bar{k}} \bar{x}''$$

и замечая, что в P вектор $x = e_0$, получим

$$(\nu x_u) = 0, \qquad (\nu x_v) = 0,$$

где

$$\nu = (x'' + x) \frac{1}{k}$$

— единичный вектор главной нормали γ в P. Так как, кроме того, $x\nu = 0$, то векторы ν и ξ либо совпадают, либо противоположно направлены. Утвержденне доказано.

Пусть F — поверхность в эллнптическом пространстве. В точке (x) поверхностн векторы x, x_u, x_v, ξ образуют базис, так как $(xx_ux_v\xi) \neq 0$. Поэтому любой вектор в этой точке линейно выражается через $x, \dots, \xi$. В частности,

$$\begin{aligned}
x_{uu} &= A_{11}^1 x_u + A_{11}^2 x_v + C_{11} x + \lambda_{11} \xi,\\
x_{uv} &= A_{12}^1 x_u + A_{12}^2 x_v + C_{12} x + \lambda_{12} \xi,\\
x_{vv} &= A_{22}^1 x_u + A_{22}^2 x_v + C_{22} x + \lambda_{22} \xi,\\
\xi_u &= B_1^1 x_u + B_1^2 x_v + D_1 x + H_1 \xi,\\
\xi_v &= B_2^1 x_u + B_2^2 x_v + D_2 x + H_2 \xi.
\end{aligned}$$

Коэффнциенты этих формул выражаются через коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности. Именно, умножая эти равенства скалярно на ξ, получаем

$$\lambda_{11} = L, \quad \lambda_{12} = M, \quad \lambda_{22} = N, \quad H_1 = H_2 = 0.$$

Умножая равенства на x и замечая, что

$$x^2=1,\quad x_{uu}x=-E,\quad x_{uv}x=-F,\quad x_{vv}x=-G,$$
$$x\xi_u=x\xi_v=0,$$

получим

$$C_{11}=-E,\quad C_{12}=-F,\quad C_{22}=-G,\quad D_1=D_2=0.$$

Для получения коэффициентов A_{11}^1 и A_{11}^2 умножим первое равенство на x_u и x_v. Замечая, что $x_{uu}x_u=\frac{1}{2}E_u$, $x_{uu}x_v=$ $=F_u-\frac{1}{2}E_v$, получим

$$\frac{1}{2}E_u=EA_{11}^1+FA_{11}^2,$$
$$F_u-\frac{1}{2}E_v=FA_{11}^1+GA_{11}^2.$$

В точности такой системе удовлетворяют символы Христоффеля второго рода Γ_{11}^1 и Γ_{11}^2. Поэтому

$$A_{11}^1=\Gamma_{11}^1,\quad A_{11}^2=\Gamma_{11}^2.$$

Аналогично заключаем:

$$A_{12}^1=\Gamma_{12}^1,\quad A_{12}^2=\Gamma_{12}^2,$$
$$A_{22}^1=\Gamma_{22}^1,\quad A_{22}^2=\Gamma_{22}^2.$$

Для определения коэффициентов B_2^1 и B_2^2 умножим последнее из вышеприведенных равенств на x_u и x_v. Тогда получим

$$-M=B_2^1E+B_2^2F,$$
$$-N=B_2^1F+B_2^2G.$$

А это как раз та система, из которой находятся коэффициенты соответствующих деривационных формул для поверхностей евклидова пространства. Относительно коэффициентов B_1^1 и B_1^2 делаем аналогичное заключение.

Итак, для поверхностей в эллиптическом пространстве имеет место следующая система деривационных формул:

$$x_{uu}=\Gamma_{11}^1x_u+\Gamma_{11}^2x_v-Ex+L\xi,$$
$$x_{uv}=\Gamma_{12}^1x_u+\Gamma_{12}^2x_v-Fx+M\xi,$$
$$x_{vv}=\Gamma_{22}^1x_u+\Gamma_{22}^2x_v-Gx+N\xi,$$
$$\xi_u=B_1^1x_u+B_1^2x_v,$$
$$\xi_v=B_2^1x_u+B_2^2x_v,$$

где коэффициенты Γ и B выражаются через E, F, G, L, M, N точно так же, как соответствующие коэффициенты деривационных формул для поверхностей евклидова пространства.

Условия, которым должны удовлетворять коэффициенты первой и второй квадратичных форм, могут быть получены так же, как и для поверхностей евклидова пространства. Именно, если в тождествах

$$(\xi_u)_v - (\xi_v)_u = 0,$$
$$(x_{uu})_v - (x_{uv})_u = 0,$$
$$(x_{vv})_u - (x_{uv})_v = 0$$

выражения в скобках заменить согласно деривационным формулам, и после формального дифференцирования еще раз воспользоваться такой заменой, то получим

$$\alpha_{11}x_u + \alpha_{12}x_v + \alpha_{10}x + \alpha_1\xi = 0,$$
$$\alpha_{21}x_u + \alpha_{22}x_v + \alpha_{20}x + \alpha_2\xi = 0,$$
$$\alpha_{31}x_u + \alpha_{32}x_v + \alpha_{30}x + \alpha_3\xi = 0.$$

Так как x_u, x_v, x и ξ — независимые векторы, то

$$\alpha_{ij} = 0, \qquad \alpha_i = 0.$$

Заметим, что если бы в первых трех деривационных формулах члены, содержащие x, отсутствовали, то для α_{11} и α_{12} получились бы те же выражения. А так как в случае евклидова пространства $\alpha_{11}=0$ и $\alpha_{12}=0$ являются соотношениями Петерсона — Кодацци, то и для поверхностей эллиптического пространства коэффициенты первой и второй квадратичной формы удовлетворяют условиям Петерсона — Кодацци.

Не приводя подробного анализа, заметим, что среди остальных десяти соотношений новых является только одно. Оно устанавливает связь между внутренней (гауссовой) и внешней кривизной поверхности:

$$\frac{LN - M^2}{EG - F^2} = K_i - 1.$$

В заключение заметим, что указанные три соотношения между коэффициентами двух квадратичных форм

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$
$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2,$$

из коих первая положительно определенная, являются достаточными, чтобы существовала поверхность, для которой эти формы были бы соответственно первой и второй квадратичной формой. Эта поверхность определяется однозначно с точностью до положения в пространстве.

§ 2. Выпуклые тела и выпуклые поверхности в эллиптическом пространстве

Основная часть настоящей главы посвящена изучению изометричных общих выпуклых поверхностей в эллиптическом и евклидовом пространствах. В связи с этим мы рассмотрим некоторые свойства выпуклых тел и выпуклых поверхностей в эллиптическом пространстве, используемые в дальнейшем изложении.

Как было указано в § 1, единичная трехмерная сфера допускает одно- и двузначное локально изометрическое отображение на эллиптическое пространство с кривизной единица. Это отображение однозначно с точностью до движений.

Будем называть тело эллиптического пространства выпуклым, если оно является образом некоторого выпуклого тела единичной сферы при указанном отображении. Это определение инвариантно относительно движений в эллиптическом пространстве и не зависит от конкретно взятого отображения сферы.

Что же касается выпуклых тел на сфере четырехмерного пространства, то их можно определить как пересечения со сферой выпуклых конусов с вершиной в центре сферы. Так как выпуклый конус имеет опорную плоскость в вершине, то выпуклое тело на сфере целиком располагается на одной из полусфер, определяемых указанной опорной плоскостью. При этом, если вершина конуса является строго конической точкой в том смысле, что некоторая опорная плоскость в ней не имеет других общих точек с конусом, то определяемое этим конусом выпуклое тело лежит строго внутри полусферы, т. е. не имеет общих точек с ее границей.

Обратимся теперь к проективной модели эллиптического пространства. Если принять опорную плоскость конуса за плоскость $x_0=0$, а конус считать расположенным в полупространстве $x_0>0$, то на $x_0=1$ выпуклое тело эллиптического пространства выглядит евклидовски выпуклым телом и может быть пополненным несобственными точками. Для того чтобы составить о нем полное представление, заметим следующее.

В вершине выпуклого четырехмерного конуса имеет место одна из следующих четырех возможностей:

a) существует опорная плоскость, не имеющая других общих точек с конусом, кроме его вершины — в этом случае вершину мы назвали строго конической точкой;

b) существует опорная плоскость, имеющая с конусом общую прямую и не имеющая других общих точек;

c) существует опорная плоскость, имеющая с конусом общую двумерную плоскость и никаких других точек;

d) вся опорная плоскость принадлежит конусу.

В случае a) на проективной модели $x_0=1$ выпуклое тело выглядит конечным выпуклым телом; в случае b) оно представляет собой евклидов выпуклый цилиндр конечного охвата, пополненный бесконечно удаленной точкой; в случае c) выпуклое тело состоит из слоя между двумя параллельными плоскостями, пополненного бесконечно удаленной прямой, по которой пересекаются эти плоскости; наконец, в случае d) выпуклое тело представляет собой все пространство.

В случаях b), c) и d) мы имеем дело с вырожденными в известном смысле выпуклыми телами, их поверхность устроена просто и ее исследование в намеченном плане не представляется интересным. В связи с этим в дальнейшем мы рассматриваем только такие выпуклые тела и их поверхности, которые получаются в случае a), т. е. когда вершина проектирующего конуса является строго конической.

Таким образом, рассматриваемые нами выпуклые тела эллиптического пространства представляют собой на сферической модели выпуклые тела, располагающиеся строго внутри одной полусферы, а на проективной модели они представляются конечными евклидовски выпуклыми телами.

Для удобства рассмотрения выпуклых тел в эллиптическом пространстве целесообразно удалить из него некоторую плоскость, не пересекающую тела. В качестве такой плоскости на сферической модели пространства можно взять пересечение опорной плоскости проектирующего конуса со сферой. Соответственно на проективной модели удаляется бесконечно удаленная плоскость. При этом на сферической модели мы приходим к выпуклым телам открытой полусферы $x^2=1$, $x_0>0$, а на проективной модели — к конечным выпуклым телам евклидова пространства $x_0=1$.

После удаления из эллиптического пространства плоскости $x_0=0$ в оставшейся его части прямые и плоскости обладают свойствами евклидовых прямых и плоскостей. Это позволяет для выпуклых тел эллиптического пространства ввести различные понятия, так же как и для выпуклых тел евклидова пространства, в частности понятие опорной плоскости, касательного конуса, и доказать соответствующие теоремы.

Под выпуклой поверхностью в эллиптическом пространстве, так же как и в евклидовом пространстве, мы будем понимать область на границе выпуклого тела.

Вся граница выпуклого тела называется полной выпуклой поверхностью.

Расстоянием между двумя точками на выпуклой поверхности называется точная нижняя грань длин кривых на поверхности, соединяющих эти точки. Кривая, длина которой

равна расстоянию между ее концами на поверхности, называется кратчайшей.

Любые две точки полной выпуклой поверхности в эллиптическом пространстве можно соединить кратчайшей. На неполной выпуклой поверхности (поверхности с краем) могут быть точки, которые нельзя соединить кратчайшей, но каждая точка имеет окрестность, любые две точки которой можно соединить кратчайшей на поверхности.

Для выпуклых поверхностей в евклидовом пространстве имеет место теорема Г. Буземана о том, что любая кривая, соединяющая две данные точки полной выпуклой поверхности вне тела, ею ограниченного, и не лежащая целиком на поверхности, имеет бо́льшую длину, чем расстояние между этими точками на поверхности (см. § 1 гл. II). В эллиптическом пространстве теорема Буземана в том виде, как мы ее сформулировали, вообще говоря, неверна. Легко привести соответствующие примеры. Однако если потребовать достаточную близость точек на поверхности, теорема остается в силе.

Чтобы в этом убедиться, обратимся к проективной модели эллиптического пространства. Выпуклое тело здесь изображается конечным евклидовским выпуклым телом, а его поверхность — замкнутой выпуклой поверхностью. Обозначим δ точную нижнюю грань длин кривых в метрике эллиптического пространства, соединяющих поверхность с несобственной плоскостью. Пусть теперь расстояние s между точками A и B на поверхности меньше δ. Покажем, что любая кривая, соединяющая точки A и B вне тела, ограниченного поверхностью, и не лежащая целиком на поверхности, имеет длину, большую s. Допустим, это неверно, и, следовательно, существуют кривые длины не больше s.

Рассмотрим все кривые длины не больше s, соединяющие точки A и B вне поверхности. Очевидно, они не пересекаются с несобственной плоскостью. Среди этих кривых есть кратчайшая. Можно считать, что она не лежит целиком на поверхности. Действительно, если она имеет длину меньше s, то она не может лежать на поверхности, так как расстояние между ее концами равно s. Если же она имеет длину s, то, по предположению, найдутся кривые длины s, соединяющие точки A и B и не лежащие целиком на поверхности. С другой стороны, каждая компонента этой кратчайшей кривой, не лежащая на поверхности, есть прямолинейный отрезок с концами на поверхности и, следовательно, принадлежит ей. Мы пришли к противоречию. Утверждение доказано.

Теорема Буземана позволяет распространить на выпуклые поверхности в эллиптическом пространстве лемму И. М. Либермана о геодезических в следующем виде.

Пусть γ — геодезическая на выпуклой поверхности (кривая, являющаяся кратчайшей на каждом достаточно малом отрезке). Возьмем точку O внутри выпуклого тела, ограниченного поверхностью. Соединим точку O со всеми точками геодезической прямолинейными отрезками внутри тела, ограниченного поверхностью. Тогда, если образованную этими отрезками коническую поверхность развернуть на эллиптическую плоскость, то γ перейдет в выпуклую кривую $\bar{\gamma}$, обращенную выпуклостью наружу области, покрытой при этом конусом. Действительно, в противном случае на $\bar{\gamma}$ существуют сколь угодно близкие точки, которые можно соединить малым прямолинейным отрезком δ вне области, покрытой разверткой конуса. Если на конусе, проектирующем геодезическую γ, нанести кривую γ_δ, соответствующую отрезку δ, то она будет короче соответствующего ей отрезка геодезической, что противоречит теореме Буземана.

Эта лемма имеет многочисленные следствия. Не перечисляя их, укажем только, что из нее получается существование в каждой точке геодезической правой и левой полукасательных и их непрерывность справа, соответственно слева.

Пусть S — точка на выпуклой поверхности в эллиптическом пространстве и γ — геодезическая, исходящая из S. Возьмем на γ близкую к S точку X и соединим ее с S прямолинейным отрезком. Пусть s — расстояние между точками S и X по геодезической, δ — пространственное расстояние между этими точками и ϑ — угол, который образует полукасательная к γ в S с прямолинейным отрезком SX. Тогда при $X \to S$ отношение $s/\delta \to 1$, а $\vartheta \to 0$. Это свойство геодезической является простым следствием существования и непрерывности полукасательной к геодезической.

При геодезическом отображении эллиптического пространства на евклидово пространство (§ 1) касательные конусы выпуклых поверхностей соответствуют друг другу. Так как при этом свойство кривой иметь полукасательную сохраняется, а полукасательные кривых, исходящих из данной точки, на выпуклой поверхности евклидова пространства являются образующими касательного конуса, то это свойство имеет место и для выпуклых поверхностей в эллиптическом пространстве. В частности, полукасательные геодезических, исходящих из данной точки на выпуклой поверхности эллиптического пространства, являются образующими касательного конуса.

Рассмотрим еще вопрос о внешней кривизне *) выпуклых поверхностей в эллиптическом пространстве. В евклидовом пространстве внешняя кривизна множества M на выпуклой поверх-

*) Здесь идет речь об интегральной кривизне.

ности определяется как площадь сферического изображения этого множества. В эллиптическом пространстве такое определение кривизны встречает затруднения из-за отсутствия параллельного переноса, необходимого для приведения нормалей к одной точке.

Это затруднение в работе А. Д. Александрова [10] преодолевается следующим образом. Множество M разбивается на конечное число подмножеств m_k. В каждом m_k берется точка P_k и строится соприкасающееся евклидово пространство в этой точке, находящееся в геодезическом соответствии с пространством постоянной кривизны (как в § 1). Пусть $\omega(m_k)$ — внешняя кривизна множества, соответствующего m_k на выпуклой поверхности евклидова пространства. Доказывается, что если диаметры множеств m_k неограниченно убывают, то $\sum \omega(m_k)$ стремится к определенному пределу, не зависящему от способа разбиения M на m_k. Этот предел и есть, по определению, внешняя кривизна поверхности на множестве M.

Относительно так определяемой внешней кривизны выпуклых поверхностей в эллиптическом пространстве А. Д. Александров в цитированной работе устанавливает ряд свойств, в частности полную ее аддитивность на кольце борелевских множеств.

В случае, если выпуклая поверхность регулярна, из данного выше определения внешней кривизны для нее получается следующее выражение:

$$\omega(M) = \iint_M k_1 k_2 \, ds,$$

где k_1 и k_2 — главные кривизны, а интегрирование выполняется по площади поверхности.

Пусть F — выпуклая поверхность в эллиптическом пространстве, O — точка на этой поверхности и X — точка поверхности, близкая к O. Соединим точки X и O кратчайшей γ и обозначим t полукасательную к ней в точке O. Отложим на полукасательной t отрезок OY, равный s — длине кратчайшей γ. Мы хотим оценить длину δ отрезка XY и выяснить его направление.

В случае выпуклых поверхностей евклидова пространства известно следующее (§ 1 гл. II):

1. Направление отрезка XY как точка единичной сферы принадлежит выпуклой оболочке сферического изображения кратчайшей γ.
2. $\delta/s \to 0$, когда $X \to O$.
3. Угол ϑ между отрезками OY и YX стремится к $\pi/2$ при $X \to O$.

Аналогичные свойства мы сейчас установим для выпуклых поверхностей в эллиптическом пространстве.

Возьмем евклидово пространство, соприкасающееся в точке O с рассматриваемым эллиптическим пространством и находящееся с ним в геодезическом соответствии. Перенесем в это пространство описанное построение и сохраним введенные обозначения, дополняя их чертой.

Доказательство первого утверждения для поверхностей евклидова пространства проводится сначала для многогранников и в этом случае оно заключается в следующем. Грани, вдоль которых проходит геодезическая γ, путем поворота около соединяющих их ребер непрерывно переводят в плоскость грани первого звена. При этом геодезическая ломаная γ переходит в прямолинейный отрезок длины s, имеющий направление первого звена, конец ломаной (точка X) движется по гладкой кривой $\tilde{\gamma}$, составленной из дуг окружностей, и представляет собой ортогональную траекторию семейства опорных плоскостей поверхности вдоль γ. Таким образом, все касательные $\tilde{\gamma}$ являются внешними нормалями поверхности вдоль γ, откуда следует указанное свойство 1.

Очевидно, описанное преобразование геодезической ломаной на многограннике в эллиптическом пространстве также осуществляется беспрепятственно. В соприкасающемся евклидовом пространстве траектории $\tilde{\gamma}$ точки X соответствует гладкая кривая, которая пересекает опорные плоскости многогранника $\overline{F}$ вдоль $\overline{\gamma}$ под углом, близким к прямому, причем это отклонение угла от прямого сколь угодно мало, если мало s. Отсюда следует, что направление отрезка $\overline{XY}$ находится в ε'-окрестности выпуклой оболочки сферического изображения $\overline{\gamma}$, причем $\varepsilon' \to 0$, когда $s \to 0$.

Переход от многогранника к произвольной выпуклой поверхности осуществляется путем приближения поверхности многогранниками и по существу ничем не отличается от соответствующего перехода в евклидовом пространстве. Окончательный результат может быть сформулирован следующим образом.

Направление отрезка $\overline{XY}$ образа XY в соприкасающемся евклидовом пространстве точки O, как точка единичной сферы, принадлежит $\varepsilon(s)$-окрестности выпуклой оболочки сферического изображения $\overline{\gamma}$ образа γ, причем $\varepsilon(s) \to 0$, когда $s \to 0$.

Покажем теперь, что угол $\overline{\vartheta}$ между отрезками $O\overline{X}$ и $\overline{XY}$ стремится к $\pi/2$, когда $s \to 0$. Допустим, это неверно, и для некоторой последовательности точек X_k имеем $|\pi/2 - \vartheta_k| > \alpha > 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что полукасательные γ_k в O сходятся к образующей t_0 касательного конуса в точке O. Построим геодезический сектор V с вершиной в точке O, содержащий внутри направление t_0 и настолько малый, чтобы сфери-

ческое изображение его образа $\bar{V}$ на $\bar{F}$ содержалось в достаточно малой окрестиости сферического изображеиия $\bar{t}_0$, образованного иормалями опориых плоскостей, проходящих через $\bar{t}_0$.

Геодезические γ_k проходят внутри V в силу свойства нерастегаиия. Поэтому иаправления отрезков $\overline{X_k Y_k}$ проходят в сколь угодио малой окрестности сферического изображения сектора $\bar{V}$, и, следовательио, угол между отрезками $\overline{OX_k}$ и $\overline{X_k Y_k}$ сколь угодио близок к прямому, вопреки предположеиию.

Из свойств соприкасающегося евклидова простраиства следует, что угол ϑ между отрезками OX и XY тоже стремится к $\pi/2$, когда $s \to 0$.

Покажем, иакоиец, что $\delta/s \to 0$ при $s \to 0$. Допустим, это неверио. Тогда существует последовательность точек X_k такая, что $s_k \to 0$, а $\delta_k/s_k > m > 0$. Повторим для этой последовательности предыдущее построеиие и возьмем сектор V с достаточио малым углом при вершине. Не ограиичивая общности, можио считать, что прямые OX_k сходятся к иекоторой прямолинейиой образующей t_0' касательного коиуса. Так как $\delta_k/s_k > m$, а отрезки $X_k Y_k$ и $X_k O$ по доказаииому почти перпеидикуляриы, то угол между отрезками OX_k и OY_k все время больше некоторого $\beta > 0$. Отсюда следует, что образующие t_0 и t_0' тоже образуют угол больше β. Но это иевозможио, если угол сектора V заранее был взят достаточио малым. Мы пришли к противоречию. Утверждеиие доказаио.

Пусть R — двумерное метрическое многообразие, т. е. двумериое миогообразие, являющееся метрическим простраиством. Метрика ρ миогообразия называется внутреиией, если для любой пары точек X и Y из R расстояние $\rho(X, Y)$ между иими равио точной иижией грани длин кривых, соединяющих эти точки.

Пусть X — точка R и γ_1, γ_2 — исходящие из иее кривые. Возьмем иа них произвольиые точки X_1 и X_2 соответствеино и построим иа плоскости треугольиик со сторонами $\rho(X, X_1)$, $\rho(X, X_2)$, $\rho(X_1, X_2)$. Пусть $\alpha(X_1, X_2)$ — угол этого треугольника, противолежащий стороне $\rho(X_1, X_2)$. Углом между кривыми γ_1, γ_2 в точке X иазывается $\varliminf\limits_{X_1, X_2 \to X} \alpha(X_1, X_2)$. В этом смысле угол существует между любыми двумя кривыми в их общей точке.

Многообразие R с виутренней метрикой называется миогообразием кривизны не меньше K, если для любого геодезического треугольиика сумма его углов не меиьше, чем у треугольника с теми же стороиами на плоскости в пространстве постояниой кривизны K. Многообразия кривизны ие меиьше K введеиы А. Д. Алексаидровым [11]. Им же построеиа теория таких многообразий. Мы иапомиим осиовиые факты этой теории, имеющие отношеиие к дальнейшему изложению.

Если миогообразие кривизны ие меиьше K является римановым, то его гауссова кривизиа не меиьше K. Обратно, каждое такое римаиово многообразие является миогообразием кривизны ие меиьше K.

Все выпуклые поверхности в эллиптическом пространстве кривизны K суть миогообразия кривизиы ие меиьше K.

Пусть γ_1 и γ_2 — кратчайшие, исходящие из точки X на миогообразии кривизны ие меиьше K. По определеиию углом между ними в X называется $\underline{\lim}\, \alpha(X_1, X_2)$, когда $X_1, X_2 \to X$. Оказывается, что для кратчайших существует просто предел $\alpha(X_1, X_2)$. В связи с этим в дальиейшем угол между любыми кривыми γ_1 и γ_2 мы будем поиимать как предел угла $\alpha(X_1, X_2)$ при $X_1, X_2 \to X$. В этом смысле угол между кривыми существует не всегда.

Для того чтобы кривые образовали определенный угол в смысле этого определеиия, необходимо и достаточно, чтобы каждая из них образовала сама с собой определенный угол, очевидио, равный нулю. Относительио таких кривых говорят, что они имеют определенное направлеиие. Для кривой на выпуклой поверхиости эллиптического простраиства существование у кривой определенного направлеиия в данной точке эквиваленитно существованию полукасательной в этой точке.

Для миогообразий кривизиы ие меиьше K вводится понятие внутреней кривизны как аддитивиой фуикции, принимающей иа открытых геодезических треугольииках зиачения

$$\alpha+\beta+\gamma-\pi,$$

где α, β, γ — углы треугольника. Если миогообразие кривизны не меньше K является римаиовым, то введеиная таким образом внутренняя кривизна есть ие что иное, как интегральная кривизиа, т. е.

$$\int\int K_i\, d\sigma,$$

где K_i — гауссова кривизиа миогообразия, а интегрироваиие выполияется по площади.

Поиятие площади в многообразии кривизны не меньше K вводится следующим образом. Пусть G — область в миогообразии кривизны не меньше K и Δ — любая система попарно непересекающихся треугольников в ией. Построим для каждого треугольника $\delta \subset \Delta$ плоский треугольиик с теми же сторонами. Пусть $\sigma(\delta)$ — площадь этого треугольника. Тогда под площадью понимается

$$\lim\sup \sum_{\Delta} \sigma(\delta)$$

при условии, что размеры треугольников δ неограниченно убы-

вают. В случае римановых многообразий это определение дает обычную площадь.

На выпуклые поверхности в пространстве постоянной кривизны K обобщается теорема Гаусса о связи между внутренней и внешней кривизной. Именно, если G — любая область на выпуклой поверхности, $\varphi(G)$ — ее внешняя кривизна, $\omega(G)$ — внутренняя кривизна и $\sigma(G)$ — площадь, то

$$\omega(G) = \varphi(G) + K\sigma(G).$$

Пусть из точки X многообразия кривизны не меньше K исходят две кривые γ и γ' с определенными направлениями в точке X, не имеющие других общих точек. Эти кривые разбивают окрестность точки X на два «сектора». Пусть V — один из них. Проведем из X внутрь V кратчайшие γ_k и занумеруем их в порядке следования от γ к γ'. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — углы между последовательными кратчайшими. Величина

$$\vartheta(\gamma, \gamma') = \sup \sum_k \alpha_k,$$

где sup берется по всем системам таких кратчайших, называется углом сектора между γ и γ' (углом со стороны V). Угол сектора обладает обычными свойствами. Именно, если кривые γ_1, γ_2 и γ_3, исходящие из точки X, определяют три сектора V_{12}, V_{23} и V_{13}, причем $V_{12}+V_{23}=V_{13}$, то $\vartheta(\gamma_1, \gamma_2)+\vartheta(\gamma_2, \gamma_3) = \vartheta(\gamma_1, \gamma_3)$. В случае выпуклой поверхности в пространстве кривизны K угол сектора совпадает с углом между полукасательными γ и γ' на развертке касательного конуса в точке X.

Пусть γ — простая кривая на многообразии кривизны не меньше K с определенными направлениями на концах. Зададим какое-нибудь направление на кривой γ. Тогда у нее определится правая и левая полуокрестность. Соединим концы кривой γ простой геодезической ломаной Γ в правой полуокрестности γ. Пусть α_k — углы между последовательными звеньями ломаной, а α и β — углы, образуемые начальным и конечным звеном с γ, причем все углы берутся со стороны области, ограниченной кривыми γ и Γ. Правым поворотом кривой называется

$$\lim_{\Gamma \to \gamma} (2\pi - \alpha - \beta) + \sum_k (\pi - \alpha_k).$$

Левый поворот определяется аналогично.

Поворот обладает следующим свойством. Если точка C разбивает кривую γ на γ_1 и γ_2, которые имеют определенные направления в C, то

$$\psi(\gamma) = \psi(\gamma_1) + \psi(\gamma_2) + \pi - \vartheta,$$

где ψ обозначает поворот (правый, левый), а ϑ — угол между кривыми γ_1 и γ_2 в C (справа, слева).

Если многообразие является римановым, а кривая регулярна, то поворот есть не что иное, как интеграл геодезической кривизны по дуге кривой.

Правый и левый повороты кривой просто связаны с внутренней кривизной поверхности вдоль кривой. Именно, сумма правого и левого поворотов кривой равна внутренней кривизне поверхности на множестве точек этой кривой.

На многообразия кривизны не меньше K распространяется теорема Гаусса—Бонне. Именно, если G — гомеоморфная кругу область, ограниченная замкнутой кривой γ, $\omega(G)$ — кривизна G, а $\psi(\gamma)$ — поворот γ со стороны G, то

$$\omega(G)+\psi(\gamma)=2\pi.$$

Пусть R_1 и R_2 — два многообразия кривизны не меньше K, имеющие отрезки границ γ_1 и γ_2, находящиеся в изометрическом соответствии. Пусть сумма поворотов любых двух соответствующих участков γ_1 и γ_2 неотрицательна. Тогда существует многообразие R кривизны не меньше K, которое состоит из двух частей, изометричных R_1 и R_2 и прилегающих в R по кривой γ, соответствующей γ_1 и γ_2 (теорема о склеивании).

Как указано выше, каждая выпуклая поверхность эллиптического пространства кривизны K есть многообразие кривизны не меньше K. Естественно, возникает вопрос, всякое ли многообразие кривизны, не меньшей K, изометрично некоторой выпуклой поверхности эллиптического пространства.

Наиболее общие результаты в этом направлении получены также А. Д. Александровым. Он доказал, что всякое полное многообразие кривизны, не меньшей $K>0$, изометрично некоторой замкнутой выпуклой поверхности эллиптического пространства кривизны K. Гомеоморфное кругу многообразие кривизны, не меньшей K, с неотрицательным поворотом на любом участке его края изометрично выпуклой шапке.

В гл. VI рассматривается общий вопрос об изометрическом погружении двумерного риманова многообразия в трехмерное. Полученные в ней результаты в применении к эллиптическому пространству во всех теоремах А. Д. Александрова гарантируют существование регулярного погружения, если метрика погружаемого многообразия достаточно регулярна, а кривизна многообразия строго больше кривизны пространства.

§ 3. Преобразование конгруэнтных фигур

В этом параграфе будут введены и рассмотрены некоторые специальные преобразования конгруэнтных фигур эллиптического пространства в такие же конгруэнтные фигуры евклидова пространства, и обратно, конгруэнтных фигур евклидова про-

странства — в конгруэнтные фигуры эллиптического пространства. Полученные результаты найдут себе применение при исследовании пар изометричных поверхностей в следующем параграфе.

Пусть R — эллиптическое пространство с кривизной $K=1$. Введем в R вейерштрассовы координаты x_i. Удалим из R плоскость $x_0=0$ и оставшуюся часть пространства будем обозначать R_0. В области R_0 вейерштрассовы координаты можно подчинить дополнительному условию $x_0>0$ и добиться, таким образом, их полной однозначности. Теперь обычное сопоставление точке эллиптического пространства из R_0 с вейерштрассовыми координатами x_i точки четырехмерного евклидова пространства с теми же декартовыми координатами представляет собой изометрическое отображение R_0 на единичную полусферу

$$x^2=1, \qquad x_0>0.$$

Пусть в области R_0 эллиптического пространства дана некоторая фигура F, которая движением A эллиптического пространства переводится в конгруэнтную фигуру AF, также принадлежащую R_0. Сопоставим каждой точке $x \in F$ точку евклидова пространства E_0 $(x_0=0)$ по формуле

$$Tx = \frac{x - e_0(xe_0)}{e_0(x+Ax)}.$$

Точка Tx действительно принадлежит E_0, так как $e_0Tx=0$.

Когда точка x пробегает фигуру F, соответствующая ей точка Tx евклидова пространства E_0 описывает некоторую фигуру TF.

Лемма 1. *Отображение T фигуры F эллиптического пространства R на фигуру TF евклидова пространства является геодезическим отображением.*

Доказательство. Сначала покажем, что T является топологическим отображением.

Так как F и AF принадлежат R_0, то $e_0(x+Ax)>0$, и, следовательно, отображение T непрерывно. Покажем, что образы различных точек x и y при отображении T различны. Допустим, что $Tx=Ty$. Тогда, очевидно, $y=\lambda x+\mu e_0$ и, следовательно,

$$Ty = \frac{x - e_0(xe_0)}{e_0(x+Ax) + \frac{\mu}{\lambda}\, e_0(e_0+Ae_0)}.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $Ae_0 \neq -e_0$, так как A и $-A$ дают одно и то же движение эллиптического пространства. Поэтому $e_0(e_0+Ae_0)>0$ и, следовательно, равенство $Ty=Tx$ возможно только в двух случаях: $\mu=0$ и $x-e_0(e_0x)=0$. В первом случае $y=\lambda x$, и так как $x^2=y^2=1$, $x_0, y_0>0$, то должно

быть $x=y$. Во втором случае $x=e_0$, $y=e_0(\lambda+\mu)$, откуда, как и в первом случае, получается $x=y$. Так как, кроме того, T — непрерывное отображение, то оно топологическое.

Покажем теперь, что T является геодезическим отображением. Для этого достаточно показать, что обратное отображение T^{-1} является геодезическим. Возьмем в E_0 произвольную плоскость. Она задается уравнением

$$(a,\ y)+b=0,$$

где a — вектор, а b — скаляр. Подставляя в это уравнение Tx вместо y, получим уравнение ее образа в R при отображении T^{-1}. Уравнение

$$(a,\ Tx)+b=0$$

после умножения на $e_0(x+Ax)$ становится линейным относительно x и, следовательно, представляет собой уравнение плоскости. Так как топологическое отображение T^{-1} переводит плоскости E_0 в плоскости R, то оно является геодезическим, а вместе с ним будет геодезическим и T. Лемма доказана.

Пусть в области R_0 эллиптического пространства имеем две конгруэнтные фигуры F и F'. Пусть A — движение эллиптического пространства, которое переводит фигуру F в фигуру F'. По лемме 1 отображение T' фигуры F' в евклидово пространство E_0, задаваемое формулой

$$T'x'=\frac{x'-e_0(x'e_0)}{e_0(x'+A^{-1}x')},$$

является геодезическим отображением.

Лемма 2. *Отображение Ω фигуры TF на фигуру $T'F'$ в евклидовом пространстве E_0, при котором сопоставляются друг другу точки Tx и TAx этих фигур, является движением и, следовательно, сами фигуры TF и $T'F'$ конгруэнтны.*

Доказательство. Во-первых, заметим, что отображение Ω непрерывно зависит от A. Далее, если A — тождественное преобразование, то Ω — тоже тождественное преобразование. Поэтому достаточно показать, что отображение Ω при любом A является изометрическим.

Пусть x и y — две произвольные точки F. Покажем, что

$$(Tx-Ty)^2=(T'Ax-T'Ay)^2.$$

Так как формулы для Tx и $T'Ax$ однородны с нулевой степенью относительно x, а на F имеем $e_0(x+Ax)>0$, то координаты x могут быть нормированы условием

$$e_0(x+Ax)=1.$$

Тогда, полагая $x-y=z$, будем иметь

$$(Tx-Ty)^2=(z-e_0(ze_0))^2=z^2-(ze_0)^2,$$
$$(T'Ax-T'Ay)^2=(Az-e_0(Az,\ e_0))^2=(Az)^2-(e_0,\ Az)^2.$$

И так как $(Az)^2=z^2$, а в силу нормировки координат $e_0(z+Az)=0$ и, следовательно, $(ze_0)^2=(e_0,Az)^2$, то

$$(Tx-Ty)^2=(T'Ax-T'Ay)^2.$$

Лемма доказана.

Пусть Φ — произвольная фигура евклидова пространства E_0 и B — любое движение E_0. Поставим в соответствие каждой точке x фигуры Φ точку

$$Sx=\rho\,(2x+e_0(1+(Bx)^2-x^2))$$

эллиптического пространства, где ρ — нормирующий множитель, определяемый условием $(Sx)^2=1$. Легко видеть, что

$$\frac{1}{\rho^2}=1+2\,(x^2+(Bx)^2)+(x^2-(Bx)^2)^2\geqslant 1.$$

Лемма 3. *Отображение S фигуры Φ евклидова пространства на фигуру $S\Phi$ эллиптического пространства R является геодезическим отображением.*

Доказательство. Покажем, что S является топологическим отображением. Для этого достаточно показать, что S непрерывно и переводит различные точки E_0 в различные точки R.

Непрерывность отображения S очевидна, так как $\frac{1}{\rho^2}\geqslant 1$.

Покажем, что образы различных точек различны. Допустим противное, и пусть x, y — две различные точки, образы которых совпадают, т. е. $Sx=Sy$. Тогда ввиду перпендикулярности x и y вектору e_0 из $Sx=Sy$ следует, что векторы x и y параллельны. Обозначая единичный вектор, параллельный им, через τ, будем иметь

$$x=\lambda\tau,\qquad y=\mu\tau,$$
$$Sx=\rho\,(2\lambda\tau+e_0(1-\lambda^2+(Bx)^2)),$$
$$Sy=\rho\,(2\mu\tau+e_0(1-\mu^2+(By)^2)).$$

Так как $Sx=Sy$, а $\tau\perp e_0$, то

$$\frac{1-\lambda^2+(Bx)^2}{\lambda}=\frac{1-\mu^2+(By)^2}{\mu}.$$

Разлагая B на вращение B^* и перенос C, получим

$$Bx=\lambda\tau^*+C,\quad By=\mu\tau^*+C,\quad \tau^*=B^*\tau.$$

И предыдущее равенство принимает вид

$$2\tau^* C + \frac{1+C^2}{\lambda} = 2\tau^* C + \frac{1+C^2}{\mu}.$$

Отсюда $\lambda=\mu$ и, следовательно, $x=y$, что невозможно. Тем самым доказано, что T — топологическое отображение.

Докажем теперь, что отображение S является геодезическим. Очевидно, для этого достаточно показать, что S^{-1} переводит плоскости R в плоскости E_0.

Плоскость в R задается уравнением $ax=0$. Подставляя сюда Sx вместо x, получим уравнение ее образа в E_0 при отображении S^{-1}:

$$a\,(2x + e_0(1 + (Bx)^2 - x^2)) = 0.$$

Нетрудно видеть, что это уравнение линейно относительно x. В самом деле,

$$(Bx)^2 = (B^* x + C)^2 = x^2 + 2CB^* x + C^2,$$

и уравнение принимает вид

$$a\,(2x + e_0(1 + 2CB^* x + C^2)) = 0.$$

Таким образом, отображение S^{-1} переводит плоскости R в плоскости E_0, а следовательно, является геодезическим отображением. Обратное ему отображение S, очевидно, тоже будет геодезическим. Лемма доказана.

Пусть теперь Φ и Φ' — конгруэнтные фигуры в евклидовом пространстве E_0 и B — движение этого пространства, переводящее Φ и Φ'. По лемме 3 отображение S' фигуры Φ' в эллиптическое пространство, задаваемое формулой

$$S'x' = \rho\big(2x' + e_0\big(1 + \big(B^{-1}x'\big)^2 - x'^2\big)\big),$$

является геодезическим отображением.

Лемма 4. *Отображение $\overline{\Omega}$ фигуры $S\Phi$ на фигуру $S'\Phi'$ в эллиптическом пространстве, при котором сопоставляются друг другу точки Sx и $S'Bx$ этих фигур, является движением, а следовательно, сами фигуры $S\Phi$ и $S'\Phi'$ конгруэнтны.*

Доказательство. Так как отображение $\overline{\Omega}$ непрерывно зависит от B и является тождественным, если тождественно B, то достаточно показать, что оно изометрическое при любом B. Для этого в свою очередь достаточно показать, что при любых x и y из E_0

$$(Sx - Sy)^2 = (S'Bx - S'By)^2.$$

Обозначим

$$\alpha(x) = 2x + e_0(1 + (Bx)^2 - x^2),$$
$$\beta(x) = 2Bx + e_0(1 - (Bx)^2 + x^2).$$

Покажем, что для любых x и y из E_0

$$\alpha(x)\alpha(y) = \beta(x)\beta(y).$$

Так как x и y перпендикулярны e_0, то

$$\alpha(x)\alpha(y) = 4xy + (1 + (Bx)^2 - x^2)(1 + (By)^2 - y^2),$$
$$\beta(x)\beta(y) = 4(Bx)(By) + (1 - (Bx)^2 + x^2)(1 - (By)^2 + y^2).$$

Если движение B разложить на вращение B^* и параллельный перенос на вектор C, то получим

$$(Bx)^2 = x^2 + 2C(B^*x) + C^2, \quad (By)^2 = y^2 + 2C(B^*y) + C^2,$$
$$(Bx)(By) = xy + C(B^*x + B^*y) + C^2.$$

Вводя эти выражения в $\alpha(x)$, $\alpha(y)$ и $\beta(x)$, $\beta(y)$, получим $\alpha(x)\alpha(y) = \beta(x)\beta(y)$.

Отсюда, принимая во внимание, что для любого z, в частности для $z = x$, $z = y$, имеем $(Sz)^2 = 1$, $(S'Bz)^2 = 1$, $Sz = \frac{\alpha(z)}{\sqrt{(\alpha(z))^2}}$, $S'Bz = \frac{\beta(z)}{\sqrt{(\beta(z))^2}}$ заключаем, что $(Sx - Sy)^2 = (S'Bx - S'By)^2$. Лемма доказана полностью.

Заметим, что соответствия пар конгруэнтных фигур в эллиптическом и евклидовом пространствах, устанавливаемые в леммах 2 и 4, взаимно обратны, т. е. если для пары конгруэнтных фигур F и F' эллиптического пространства построить пару конгруэнтных фигур Φ и Φ' в евклидовом пространстве по лемме 2, а затем построить пару конгруэнтных фигур в эллиптическом пространстве по лемме 4, то мы получим F и F'.

Деформация фигуры F при $t=0$ называется бесконечно малым движением, если расстояние между любыми двумя ее точками в момент $t=0$ стационарно. Так как стационарность расстояния между точками x и y эквивалентна стационарности выражения $(x-y)^2$ *), то поле скоростей бесконечно малого движения $\zeta = dx/dt$ удовлетворяет условию

$$(x - y)(\zeta(x) - \zeta(y)) = 0.$$

Обратно, всякая деформация фигуры, поле скоростей которой удовлетворяет этому условию, является бесконечно малым движением.

---

*) В евклидовом пространстве выражение $(x-y)^2$ обозначает квадрат расстояния d между точками x и y; в эллиптическом пространстве оно равно $4\sin^2\frac{d}{2}$.

Лемма 5. *Пусть $\zeta(x)$ — поле скоростей бесконечно малого движения фигуры F в эллиптическом пространстве R. Поставим в соответствие точке*

$$Tx = \frac{x - e_0(xe_0)}{(e_0x)}$$

евклидова пространства E_0 вектор

$$z(Tx) = \frac{\zeta - e_0(e_0\zeta)}{(e_0x)}.$$

Тогда поле $z(Tx)$ является полем скоростей бесконечно малого движения TF в евклидовом пространстве E_0.

Доказательство. Отображение A пространства R на себя, при котором точке $u = \rho(x + \varepsilon\zeta)$ сопоставляется точка $Au = \rho(x - \varepsilon\zeta)$, есть движение. Покажем это.

Отображение A непрерывно зависит от ε и при $\varepsilon = 0$ является тождественным. Таким образом, остается показать только, что A при любом ε является изометрическим отображением.

Так как $x^2 = 1$, то $x\zeta = 0$, и, следовательно, нормирующие множители ρ в выражениях u и Au одинаковы и

$$\frac{1}{\rho^2} = x^2 + \varepsilon^2\zeta^2.$$

Далее, так как

$$x\zeta(x) = y\zeta(y) = 0, \qquad (x - y)(\zeta(x) - \zeta(y)) = 0,$$

то

$$(x + \varepsilon\zeta(x))(y + \varepsilon\zeta(y)) = (x - \varepsilon\zeta(x))(y - \varepsilon\zeta(y)).$$

Если теперь принять еще во внимание, что $u^2 = Au^2 = 1$, то для любого u и v будем иметь

$$(u - v)^2 = (Au - Av)^2.$$

А это значит, что A является движением в пространстве R.

По лемме 1 преобразование евклидова пространства E_0, при котором его точке

$$w = \frac{u - e_0(e_0u)}{e_0(u + Au)}$$

сопоставляется точка

$$Bw = \frac{Au - e_0(e_0Au)}{e_0(u + Au)},$$

есть движение. Отсюда следует, что

$$z = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{w - Bw}{2\varepsilon} = \frac{\zeta - e_0(\zeta e_0)}{(e_0x)},$$

отнесенное точке

$$Tx = \frac{x - e_0(xe_0)}{(e_0x)},$$

есть поле скоростей бесконечно малого движения. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть $z(x)$ — поле скоростей бесконечно малого движения фигуры Φ в евклидовом пространстве E_0. Поставим в соответствие каждой точке*

$$Sx = \rho(x + e_0), \quad x \subset \Phi,$$

эллиптического пространства R вектор

$$\zeta(S(x)) = \frac{z - e_0(xz)}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Поле ζ в пространстве R является полем бесконечно малого движения.

Доказательство. Отображение B евклидова пространства на себя, при котором точке $u = x + \varepsilon z$ сопоставляется точка $Bu = x - \varepsilon z$, есть движение. Действительно, оно непрерывно по ε, тождественно при $\varepsilon = 0$ и при любых x и y

$$(x - y \pm \varepsilon(z(x) - z(y)))^2 = (x - y)^2 + \varepsilon^2(z(x) - z(y))^2,$$

т. е. для любых u и v

$$(u - v)^2 = (Bu - Bv)^2.$$

По лемме 4 движению B евклидова пространства соответствует движение A эллиптического пространства, которое переводит точку

$$w = \rho(2u + e_0(1 + (Bu)^2 - u^2))$$

в точку

$$Aw = \rho(2Bu + e_0(1 - (Bu)^2 + u^2)).$$

Отсюда следует, что

$$\xi = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{w - Aw}{4\varepsilon} = \frac{z - e_0(xz)}{\sqrt{1 + x^2}},$$

сопоставленное точке

$$Sx = \frac{x + e_0}{\sqrt{1 + x^2}},$$

представляет собой поле скоростей бесконечно малого движения в эллиптическом пространстве. Лемма доказана.

Соответствия фигур в эллиптическом и евклидовом пространствах и их бесконечно малых движений, устанавливаемые леммами 5 и 6, взаимно обратны.

Пусть в эллиптическом пространстве R имеем две прямые g' и g'', заданные уравнениями

$$x' = \rho(a' + \lambda\tau'),$$
$$x'' = \rho(a'' + \lambda\tau''),$$

причем выполняются условия

$$a'^2 = a''^2 = 1, \quad a'\tau' = a''\tau'' = 0, \quad \tau'^2 = \tau''^2 \neq 0.$$

Легко проверить, что при любых λ и μ

$$(x'(\lambda) - x'(\mu))^2 = (x''(\lambda) - x''(\mu))^2.$$

и, следовательно, отображение прямой g' на g'', при котором сопоставляются точки, отвечающие одним и тем же значениям параметра λ, есть движение.

По лемме 2 настоящего параграфа уравнениями

$$y' = \frac{x' - e_0(x'e_0)}{e_0(x' + x'')},$$
$$y'' = \frac{x'' - e_0(x''e_0)}{e_0(x' + x'')}$$

в евклидовом пространстве E_0 задаются две конгруэнтные фигуры h' и h'' По лемме 1 они являются прямыми линиями.

Так как нормирующие множители ρ в уравнениях прямых g' и g'' одинаковы, то правые части уравнеиий прямых h' и h'' представляют собой дробно-линейные выражения относительно λ.

Отображение прямой g' на прямую h' по равенству параметров λ есть гомеоморфизм. Поэтому производная y'_λ не может обращаться в нуль тождественно. И так как $y'(\lambda)$ представляет собой дробно-линейиую функцию λ, то $y'_\lambda \neq 0$ при всех λ. То же заключение надо сделать и относительно y''_λ.

По лемме 2 отображение прямой h' на прямую h'', при котором сопоставляются точки, отвечающие одним и тем же значениям параметра λ, есть движение. Отсюда следует, что

$$|y'_\lambda| = |y''_\lambda|.$$

Пусть теперь в евклидовом пространстве E_0 имеем две прямые h' и h'', заданные уравнениями

$$y' = b' + \mu t', \qquad y'' = b'' + \mu t'',$$

причем $|t'| = |t''| \neq 0$. Очевидно, отображение прямой h' на прямую h'' по равенству параметров μ есть движение.

По лемме 4 уравиеиия

$$x' = \rho(2y' + e_0(1 - y'^2 + y''^2)),$$
$$x'' = \rho(2y'' + e_0(1 - y''^2 + y'^2))$$

в эллиптическом пространстве R задают две конгруэнтные фигуры g' и g''. По лемме 3 оии оказываются прямыми линиями.

Так как выражения

$$2y' + e_0(1 - y'^2 + y''^2),$$
$$2y'' + e_0(1 - y''^2 + y'^2)$$

линейны относительно μ, и коэффициенты при μ отличны от нуля, то производные x'_μ и x''_μ нигде не обращаются в нуль.

Так как отображение прямой g' на прямую g'' по равенству параметров μ есть движение, то

$$|x'_\mu| = |x''_\mu|.$$

Аналогичные выводы мы сделаем для плоскостей.

Пусть в эллиптическом пространстве имеем две плоскости α' и α'', заданные уравнениями

$$x' = \rho(a' + \lambda\tau'_1 + \mu\tau'_2),$$
$$x'' = \rho(a'' + \lambda\tau''_1 + \mu\tau''_2),$$

причем выполняются условия

$$a'^2 = a''^2 = 1, \quad a'\tau'_1 = a''\tau''_1, \quad a'\tau'_2 = a''\tau''_2,$$
$$\tau'^2_1 = \tau''^2_1, \quad \tau'^2_2 = \tau''^2_2, \quad \tau'_1\tau'_2 = \tau''_1\tau''_2, \qquad (a'\tau'_1\tau'_2) \neq 0 \quad (a''\tau''_1\tau''_2) \neq 0.$$

Легко видеть, что отображение плоскости α' на α'' по равенству параметров λ и μ есть движение.

По лемме 1 и 2 уравнениями

$$y' = \frac{x' - e_0(x'e_0)}{e_0(x' + x'')}, \qquad y'' = \frac{x'' - e_0(x''e_0)}{e_0(x' + x'')}$$

в евклидовом пространстве задаются две плоскости — β' и β'', причем отображение одной плоскости на другую по равенству параметров λ, μ есть движение.

Так как $y'(\lambda, \mu)$ представляет собой дробно-линейное выражение относительно λ и μ, а отображение плоскости α' на плоскость β' есть гомеоморфизм, то векторы y'_λ и y'_μ при любых λ и μ независимы и отличны от нуля. То же надо сказать и относительно векторов y''_λ и y''_μ.

Так как соответствие между плоскостями β' и β'' по равенству параметров λ, μ изометрическое (лемма 2), то

$$y'^2_\lambda = y''^2_\lambda, \qquad y'_\lambda y'_\mu = y''_\lambda y''_\mu, \quad y'^2_\mu = y''^2_\mu.$$

Пусть теперь в евклидовом пространстве E_0 две плоскости β' и β'' задаются уравнениями

$$y' = b' + \lambda t'_1 + \mu t'_2,$$
$$y'' = b'' + \lambda t''_1 + \mu t''_2,$$

причем

$$t_1'^2 = t_1''^2, \quad t_2'^2 = t_2''^2, \quad t_1't_2' = t_1''t_2'',$$

$$t_1'^2 t_2'^2 - (t_1't_2')^2 \neq 0.$$

Очевидно, отображение плоскости β' на β'' по равенству параметров λ, μ есть движение. По лемме 3 и 4 уравнениями

$$x' = \rho\left(2y' + e_0\left(1 - y'^2 + y''^2\right)\right),$$
$$x'' = \rho\left(2y'' + e_0\left(1 - y''^2 + y'^2\right)\right)$$

в эллиптическом пространстве R задаются две плоскости α' и α'', соответствие между точками которых по равенству параметров λ и μ есть движение.

Легко видеть, что выражения

$$2y' + e_0\left(1 - y'^2 + y''^2\right),$$
$$2y'' + e_0\left(1 - y''^2 + y'^2\right)$$

линейны относительно λ и μ, причем коэффициенты при λ и μ в каждом из этих выражений независимы в силу независимости векторов τ_1', τ_2' и τ_1'', τ_2'' соответственно. Отсюда следует, что

$$(x'x_\lambda'x_\mu') \neq 0, \qquad (x''x_\lambda''x_\mu'') \neq 0.$$

Так как соответствие между точками плоскостей α' и α'' по равенству параметров λ, μ изометрическое, то имеют место равенства

$$x_\lambda'^2 = x_\lambda''^2, \quad x_\mu'x_\lambda' = x_\lambda''x_\mu'', \quad x_\mu'^2 = x_\mu''^2.$$

§ 4. Изометричные поверхности

Рассмотренный в предыдущем параграфе способ сопоставления каждой паре конгруэнтных фигур эллиптического пространства пары конгруэнтных фигур евклидова пространства и, обратно, каждой паре конгруэнтных фигур евклидова пространства пары конгруэнтных фигур в эллиптическом пространстве легко распространяется на случай конгруэнтности фигур в бесконечно малом, в частности на случай изометричных поверхностей. Настоящий параграф и посвящается рассмотрению этого вопроса.

Пусть в области R_0 $(x_0>0)$ эллиптического пространства R с кривизной $K=1$ даны две регулярные изометричные поверхности F' и F''. Введем на них какую-нибудь координатную сеть u, v так, чтобы соответствующим по изометрии точкам отвечали одинаковые значения параметров u, v. Пусть

$$x' = x'(u, v), \qquad x'' = x''(u, v)$$

— уравнения этих поверхностей, причем

$$(x'x'_u x'_v) \neq 0, \qquad (x''x''_u x''_v) \neq 0.$$

Рассмотрим в евклидовом пространстве E_0 ($x_0=0$) две поверхности Φ' и Φ'', задаваемые уравнениями

$$y = y'(u, v), \qquad y = y''(u, v),$$

где

$$y' = \frac{x' - e_0(x'e_0)}{e_0(x'+x'')}, \qquad y'' = \frac{x'' - e_0(x''e_0)}{e_0(x'+x'')}.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Поверхности Φ' и Φ'' регулярны, не имеют особенностей и изометричны. Они конгруэнтны тогда и только тогда, когда конгруэнтны поверхности F' и F''.*

Доказательство. Возьмем на поверхностях F' и F'' две соответствующие по изометрии точки A' и A''. Не ограничивая общности, можно считать, что они соответствуют значениям параметров $u=v=0$. Проведем в точках A' и A'' касательные плоскости α' и α'' соответственно. Эти плоскости можно задать уравнениями

$$x = \bar{x}'(u, v), \qquad x = \bar{x}''(u, v),$$

где

$$\bar{x}' = \rho\left(x'(0, 0) + ux'_u(0, 0) + vx'_v(0, 0)\right),$$
$$\bar{x}'' = \rho\left(x''(0, 0) + ux''_u(0, 0) + vx''_v(0, 0)\right).$$

Векторы в правых частях выражений $\bar{x}'$ и $\bar{x}''$, очевидно, удовлетворяют условиям

$$x'^2 = x''^2 = 1, \quad x'x'_u = x'x'_v = 0, \quad x''x''_u = x''x''_v = 0,$$
$$x'^2_u = x''^2_u, \quad x'_u x'_v = x''_u x''_v, \quad x'^2_v = x''^2_v.$$

Поэтому, согласно § 3, уравнениями

$$y = \bar{y}'(u, v), \qquad y = \bar{y}''(u, v),$$

где

$$\bar{y}' = \frac{\bar{x}' - e_0(\bar{x}'e_0)}{e_0(\bar{x}'+\bar{x}'')}, \qquad \bar{y}'' = \frac{\bar{x}'' - e_0(\bar{x}''e_0)}{e_0(\bar{x}'+\bar{x}'')},$$

в евклидовом пространстве E_0 задаются две плоскости β' и β''. Отображение плоскости α^i на плоскость β^i, при котором точке (u, v) плоскости α^i сопоставляется точка β^i с теми же координатами (u, v), является невырожденным проективным (геодезическим) отображением (§ 3). Отображение плоскости α' на плоскость α'' по равенству параметров u, v является движением.

Так как расстояние между соответствующими точками поверхности F^i и ее касательной плоскости α^i вблизи точки A^i имеет порядок по крайней мере u^2+v^2, то расстояние между соответствующими точками плоскости β^i и Φ^i вблизи точки B^i (соответствующей A^i) также имеет порядок не ниже u^2+v^2.

Отсюда следует, что каждая из фигур Φ^i действительно является поверхностью (вырождение исключается), плоскость β^i для поверхности Φ^i является касательной плоскостью, отображение поверхности Φ^i на плоскость β^i по равенству параметров u, v является изометрическим в точке B^i.

Так как отображение плоскости β' на β'' по равенству параметров u, v тоже изометрическое, то отображение поверхности Φ' на Φ'', при котором сопоставляются друг с другом точки с одинаковыми координатами u, v, является изометрическим при $u=v=0$. Но точка $u=v=0$ была взята совершенно произвольно. Следовательно, поверхности Φ' и Φ'' локально изометричны.

Как известно (§ 3), конгруэнтность фигур F' и F'' влечет за собой конгруэнтность фигур Φ' и Φ'' и, обратно, конгруэнтность Φ' и Φ'' влечет за собой конгруэнтность F' и F''. Теорема доказана полностью.

Пусть в евклидовом пространстве E_0 имеем две регулярные изометричные поверхности Φ' и Φ'', параметризованные так, что соответствующие по изометрии точки имеют одинаковые координаты u, v. Пусть

$$y=y'(u, v), \qquad y=y''(u, v)$$

— уравнения этих поверхностей, причем

$$y'_u \times y'_v \neq 0, \qquad y''_u \times y''_v \neq 0.$$

Рассмотрим две поверхности F' и F'' в эллиптическом пространстве R, задаваемые уравнениями

$$x = x'(u, v), \qquad x = x''(u, v),$$

где

$$x' = \rho\left(2y' + e_0\left(1 - y'^2 + y''^2\right)\right),$$
$$x'' = \rho\left(2y'' + e_0\left(1 - y''^2 + y'^2\right)\right).$$

Теорема 2. *Поверхности F' и F'' регулярны, не имеют особенностей и изометричны. Они конгруэнтны тогда и только тогда, когда конгруэнтны поверхности Φ' и Φ''.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1. Поэтому мы его приводить не будем.

Заметим, что если для пары изометричных поверхностей F' и F'' эллиптического пространства построить пару соответствующих изометричных поверхностей Φ' и Φ'' евклидова простран-

ства (теорема 1), а затем с помощью этих поверхностей построить пару изометричных поверхностей эллиптического пространства (теорема 2), то мы получим F' и F''.

По теореме 1 каждой паре изометричных поверхностей F' и F'' области R_0 эллиптического пространства R сопоставляется пара изометричных поверхностей Φ' и Φ'' евклидова пространства E_0. Оказывается, в некоторых случаях выпуклость поверхностей F' и F'' гарантирует выпуклость поверхностей Φ' и Φ''. Именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Если поверхности F' и F'' эллиптического пространства, о которых идет речь в теореме* 1, *локально выпуклы, одинаково ориентированы, причем из точки e_0* (1, 0, 0, 0) *каждая из поверхностей F' и F'' видна изнутри, то соответствующие поверхности Φ' и Φ'' евклидова пространства тоже локально выпуклы.*

Выражение «поверхность локально выпукла» мы употребляем в том смысле, что достаточно малая окрестность каждой точки поверхности является выпуклой поверхностью. Для того чтобы поверхность была локально выпуклой, достаточно, чтобы ее вторая квадратичная форма не принимала значений разных знаков.

Доказательство теоремы 3. Возьмем на поверхности Φ' произвольную точку y' и точку $y'+\Delta y'$, близкую к ней. Им соответствуют на поверхностях F' и F'' точки x', $x'+\Delta x'$ и x'', $x''+\Delta x''$ соответственно. Соединим точки x' и $x'+\Delta x'$ кратчайшей γ' на поверхности F', а точки x'' и $x''+\Delta x''$ — кратчайшей γ'' на поверхности F''.

Тогда, согласно § 1,

$$x'+\Delta x' = \rho\left(\left(1+\frac{\Delta s^2}{2}\right)x' + \Delta s\tau' + \frac{\Delta s^2}{2}k'\nu' + \ldots\right),$$

$$x''+\Delta x'' = \rho\left(\left(1+\frac{\Delta s^2}{2}\right)x'' + \Delta s\tau'' + \frac{\Delta s^2}{2}k''\nu'' + \ldots\right),$$

где τ' и τ'' — единичные касательные векторы геодезических γ' и γ'' в точках x' и x''; ν' и ν'' — единичные векторы главных нормалей этих кривых; k' и k'' — кривизны кривых γ' и γ'', а Δs — расстояние между точками x^i и $x^i+\Delta x^i$ на поверхности F^i. Не выписаны члены, имеющие порядок выше Δs^2. Подставим эти выражения в формулу для y'. Тогда получим

$$y'+\Delta y' = \frac{x'+\varepsilon'-e_0\,(e_0x'+e_0\varepsilon')}{e_0x'+e_0x''+(e_0\varepsilon'+e_0\varepsilon'')} + O\,(\Delta s^3),$$

где для краткости обозначено

$$\varepsilon' = \Delta s\tau' + \frac{\Delta s^2}{2}k'\nu', \quad \varepsilon'' = \Delta s\tau'' + \frac{\Delta s^2}{2}k''\nu''.$$

Выделяя в выражеиии $y'+\Delta y'$ главную часть с точиостью до величин порядка Δs^2, получим

$$\Delta y' = \frac{\Delta s}{e_0(x'+x'')}\{-y'(e_0\tau'+e_0\tau'')+\tau'-e_0(e_0\tau')\}+$$
$$+\Delta s^2\frac{e_0(\tau'+\tau'')}{e_0(x'+x'')}\{y'(e_0\tau'+e_0\tau'')-\tau'+e_0(e_0\tau')\}+$$
$$+\frac{\Delta s^2}{2e_0(x'+x'')}\{-(k'e_0\nu'+k''e_0\nu'')+k'\nu'-k'e_0(e_0\nu')\}+O(\Delta s^3).$$

Умиожим $\Delta y'$ иа едииичиый вектор n' иормали поверхиости Φ' в точке y'. Тогда мы должны получить величину порядка не ниже Δs^2. Отсюда следует, что

$$n'\{-y'(e_0\tau'+e_0\tau'')+\tau'-e_0(e_0\tau')\}=0.$$

И для $n'\Delta y'$ получается

$$n'\Delta y' = \frac{\Delta s^2 k'}{2e_0(x'+x'')}(-y'(e_0\nu')+\nu')n' -$$
$$-\frac{\Delta s^2 k''}{2e_0(x'+x'')}(e_0\nu'')(y'n')+O(\Delta s^3).$$

Так как оба выражения

$$\frac{\Delta s^2 k'}{2e_0(x'+x'')},\qquad \frac{\Delta s^2 k''}{2e_0(x'+x'')}$$

положительиы, то для локальной выпуклости поверхности Φ' достаточио показать, что выражения

$$(-y'(e_0\nu')+\nu')n',\qquad -(e_0\nu'')(y'n') \tag{$*$}$$

нмеют один и тот же знак независимо от выбора точки y' и близкой к ией точки $y'+\Delta y'$ на поверхности Φ'.

Установление того, что эти выражения всегда одного знака, сопряжено с некоторым счетом. Поэтому мы выделяем его специальной леммой, доказательство которой будет дано ииже.

Пусть α' и α'' — две плоскости эллиптического пространства R, поставленные в изометрическое соответствие, β' и β'' — соответствующие им плоскости евклидова пространства E_0 (§ 3). Обозначим a_0 и b_0 две соответствующие точки плоскостей α' и α'', a_3 и b_3 — соответствующие единичные нормали в этих точках и, иаконец, c_0 и c_3 — соответственно точку и иормаль плоскости β'.

Л е м м а 1. *Если обе плоскости α' и α'' в области R_0 обращены к точке e_0 одной и той же стороной, то выражения*

$$A=c_3(-(e_0a_3)c_0+a_3),\qquad B=-(e_0b_3)(c_0c_3)$$

одного знака. При движении плоскостей α' и α'' знаки этих выражений не изменяются *).

Изометрическое соответствие поверхиостей F' и F'' естественным образом ииДуцирует изометрическое соответствие в их касательиых плоскостях α' и α'' в точках x' и x''. И то, что выражеиия (*) имеют одииаковые знаки, следует из леммы 1.

Локальиая выпуклость поверхиости Φ'' устаиавливается аиалогичио. Теорема доказаиа.

Доказательство леммы 1. Обозначим a_1 и a_2 едииичиые перпеидикуляриые векторы в точке a_0 плоскости α', b_1 и b_2 — соответствующие едииичные векторы в плоскости α'', а c_1 и c_2 — соответствующие векторы в плоскости β'. Тогда

$$a_3 = (a_0 a_1 a_2), \quad b_3 = (b_0 b_1 b_2), \quad c_3 = (e_0 c_1 c_2).$$

Чтобы иайти выражеиие для векторов c_1 и c_2, обратимся к уравнеиию плоскости β'

$$y = \frac{x_1 - e_0\,(x_1 e_0)}{e_0\,(x_1 + x_2)},$$

где x_1 и x_2 — соответствующие по изометрии точки плоскостей α' и α''. Дифференцируя y по иаправлеииям, соответствующим c_1 и c_2 в точке c_0, получим

$$c_1 = \frac{1}{\lambda_0^2}(a_1\lambda_0 - a_0\lambda_1) + e_0(*),$$

$$c_2 = \frac{1}{\lambda_0^2}(a_2\lambda_0 - a_0\lambda_2) + e_0(*),$$

где для краткости обозиачеио

$$\lambda_0 = e_0(a_0 + b_0), \quad \lambda_1 = e_0(a_1 + b_1), \quad \lambda_2 = e_0(a_2 + b_2).$$

Подставляя эти выражеиия для c_1 и c_2 в $c_3 = (e_0 c_1 c_2)$, получим

$$c_3 = \frac{1}{\lambda_0^4}(e_0,\ a_1\lambda_0 - a_0\lambda_1,\ a_2\lambda_0 - a_0\lambda_2) =$$

$$= \frac{1}{\lambda_0^3}\{\lambda_0(e_0 a_1 a_2) - \lambda_1(e_0 a_0 a_2) - \lambda_2(e_0 a_1 a_0)\}.$$

Обратимся теперь к выражеииям A и B. Имеем

$$B = -(e_0 b_3)(c_0 c_3), \quad (e_0 b_3) = (e_0 b_0 b_1 b_2).$$

Так как

$$c_0 = \frac{a_0}{\lambda_0} + e_0(*),$$

*) Соответствие сторон плоскостей осуществляется обычным образом через изометрическое соответствие, установленное между ними.

то

$$(c_0c_3) = -\frac{1}{\lambda_0^3}(e_0a_0a_1a_2).$$

По условию леммы обе плоскости α' и α'' из точки e_0 видны с одной и той же стороны. Аналитически это значит, что выражения $(e_0b_0b_1b_2)$, $(e_0a_0a_1a_2)$ одного знака. Отсюда следует, что

$$B = \frac{1}{\lambda_0^3}(e_0a_0a_1a_2)(e_0b_0b_1b_2) > 0.$$

Рассмотрим теперь выражение

$$A = c_3(a_3 - (e_0a_3)c_0).$$

Во-первых,

$$-(e_0a_3)(c_0c_3) = \frac{1}{\lambda_0^3}(e_0a_0a_1a_2)^2.$$

Далее,

$$(c_3a_3) = \frac{1}{\lambda_0^3}\{\lambda_0(e_0a_1a_2)(a_0a_1a_2) - \lambda_1(e_0a_0a_2)(a_0a_1a_2) - \lambda_2(e_0a_1a_0)(a_0a_1a_2)\}.$$

Применяя к каждому из скалярных произведений в фигурных скобках векторные тождества § 1, будем иметь

$$(a_0a_1a_2)(e_0a_1a_2) = (e_0a_0),$$
$$(a_0a_1a_2)(e_0a_0a_2) = -(e_0a_1),$$
$$(a_0a_1a_2)(e_0a_1a_0) = -(e_0a_2).$$

Таким образом,

$$(c_3a_3) = \frac{1}{\lambda_0^3}(\lambda_0(e_0a_0) + \lambda_1(e_0a_1) + \lambda_2(e_0a_2)).$$

Вводя сюда выражения для λ_0, λ_1, λ_2, получим

$$(c_3a_3) = \frac{1}{\lambda_0^3}\{(e_0a_0)^2 + (e_0a_1)^2 + (e_0a_2)^2 + \\ + (e_0a_0)(e_0b_0) + (e_0a_1)(e_0b_1) + (e_0a_2)(e_0b_2)\}.$$

Отсюда, замечая, что

$$2|(e_0a_i)(e_0b_i)| \leqslant (e_0a_i)^2 + (e_0b_i)^2,$$

получаем

$$(c_3a_3) \geqslant \frac{1}{2\lambda_0^3}\{(e_0a_0)^2 + (e_0a_1)^2 + (e_0a_2)^2 - (e_0b_0)^2 - (e_0b_1)^2 - (e_0b_2)^2\}.$$

И так как

$$(e_0a_0)^2 + (e_0a_1)^2 + (e_0a_2)^2 + (e_0a_3)^2 = (e_0b_0)^2 + (e_0b_1)^2 + (e_0b_2)^2 + (e_0b_3)^2,$$

то

$$(c_3a_3) \geqslant \frac{1}{2\lambda_0^3}((e_0b_3)^2 - (e_0a_3)^2) = \frac{1}{2\lambda_0^3}((e_0b_0b_1b_2)^2 - (e_0a_0a_1a_2)^2).$$

Принимая во внимание выражеиие для $-(e_0a_3)(c_0c_3)$ и оценку снизу для (c_3a_3), получаем

$$A \geqslant \frac{1}{2\lambda_0^3}((e_0b_0b_1b_2)^2 + (e_0a_0a_1a_2)^2) > 0.$$

Лемма доказана полностью.

По теореме 2 каждой паре изометричных поверхностей Φ' и Φ'' евклидова пространства E_0 сопоставляется пара изометричных поверхностей F' и F'' эллиптического пространства R. Этот результат может быть дополиеи следующей теоремой.

Теорема 4. *Если поверхности Φ' и Φ'' евклидова пространства E_0, о которых идет речь в теореме 2, локально выпуклы, противоположно ориентированы и с точки* (1, 0, 0, 0) *видны изнутри, то соответствующие им поверхности F' и F'' эллиптического пространства локально выпуклы.*

Доказательство. Возьмем на поверхности F' произвольную точку x' и точку $x'+\Delta x'$, близкую к ией. Им соответствуют на поверхностях Φ' и Φ'' точки y', $y'+\Delta y'$ и y'', $y''+\Delta y''$. Соединим точки y' и $y'+\Delta y'$ кратчайшей γ' на поверхиости Φ', а точки y'' и $y''+\Delta y''$ — соответствующей кратчайшей γ'' иа поверхности Φ''. Имеем

$$\Delta y' = \Delta s\tau' + \frac{\Delta s^2}{2} k'\nu' + \ldots$$

$$\Delta y'' = \Delta s\tau'' + \frac{\Delta s^2}{2} k''\nu'' + \ldots,$$

где τ' и τ'' — едииичные векторы касательиых геодезических γ' и γ'' в точках y' и y'' соответствеино, k' и k'' — кривизны, а ν' и ν'' — главные нормали этих кривых.

Прииимая во внимание выражение x' через y' и y''

$$x' = \rho(2y' + e_0(1 - y'^2 + y''^2)),$$

для $\Delta x'$ получим следующее выражеиие:

$$\Delta x' = \frac{\Delta\rho}{\rho} x' + \rho\,\Delta\Omega + \Delta\rho\Delta\Omega,$$

где

$$\Delta\Omega = 2\,\Delta s\,\{\tau' + e_0(-y'\tau' + y''\tau'')\} + \\ + \Delta s^2\{k'\nu' + e_0(-k'\nu'y' + k''\nu''y'')\} + O(\Delta s^3).$$

Умножим $\Delta x'$ на единичный вектор n' нормали поверхности F' в точке x'. Так как $n'x'=0$, а $\Delta x'n'$ должно иметь порядок не ниже Δs^2, то

$$n'(\tau' + e_0(-y'\tau' + y''\tau'')) = 0$$

и, следовательно,

$$\Delta x'n' = \Delta s^2 k'(n'\nu' - (n'e_0)(\nu'y')) + \Delta s^2 k''(n'e_0)(\nu''y'') + \ldots$$

Не выписаны члены порядка выше Δs^2.

Для того чтобы закончить доказательство теоремы — установить локальную выпуклость поверхности F', — достаточно показать, что выражения

$$n'\nu' - (e_0 n')(\nu'y') \quad \text{и} \quad (e_0 n')(\nu''y'')$$

одного знака. Так же, как и в доказательстве предыдущей теоремы, это связано со счетом, который удобно провести в более симметричных обозначениях для векторов. В связи с этим мы сформулируем одну лемму для изометричных плоскостей, доказательство которой приводится ниже.

Пусть в евклидовом пространстве E_0 имеем две плоскости β' и β'', поставленные в изометрическое соответствие. Согласно § 3 в эллиптическом пространстве R им соответствуют две плоскости α' и α'', тоже находящиеся в изометрическом соответствии.

Лемма 2. *Пусть a_0 и b_0 — две соответствующие по изометрии точки плоскостей β' и β'', a_3 и b_3 — соответствующие единичные нормали плоскостей в этих точках, а c_0, c_3 — соответственно точка и нормаль плоскости α'. Тогда, если обе плоскости β' и β'' обращены к началу координат противоположными сторонами, то выражения*

$$A = (c_3 a_3) - (e_0 c_3)(a_0 a_3), \qquad B = (e_0 c_3)(b_0 b_3)$$

отличны от нуля и имеют одинаковые знаки.

С помощью этой леммы легко закончить доказательство теоремы 4. Действительно, изометрическое соответствие поверхностей Φ' и Φ'' индуцирует изометрическое соответствие их касательных плоскостей β' и β'' в точках y' и y''. Соответствующие плоскостям β' и β'' плоскости эллиптического пространства являются касательными плоскостями поверхностей F' и F''. Именно, плоскость α' касается F' в точке x'. Выражения

$$n'\nu' - (e_0 n')(\nu'y'), \qquad (e_0 n')(\nu''y'')$$

представляют собой не что иное, как величины A и B, о которых идет речь в лемме, а следовательно, они одного знака. Таким образом, поверхность F' локально выпукла. Выпуклость поверхности F'' устанавливается аналогично.

Теорема доказана.

Доказательство леммы 2. Обозначим a_1 и a_2 единичные перпендикулярные векторы в точке a_0 плоскости β', b_1 и b_2 — соответствующие по изометрии единичные векторы в плоскости β'', а c_1 и c_2 — соответствующие векторы в плоскости α'. Тогда

$$a_3 = (e_0 a_1 a_2), \qquad b_3 = (e_0 b_1 b_2), \qquad c_3 = (c_0 c_1 c_2).$$

Уравнение плоскости α'

$$x' = \rho\left(2y' + e_0\left(1 - y'^2 + y''^2\right)\right).$$

Дифференцируя x' по соответствующим направлениям, получаем для c_1 и c_2 следующие выражения:

$$c_1 = \frac{\rho'}{\rho} c_0 + 2\rho\left(a_1 + e_0\left(-a_0 a_1 + b_0 b_1\right)\right),$$

$$c_2 = \frac{\rho'}{\rho} c_0 + 2\rho\left(a_2 + e_0\left(-a_0 a_2 + b_0 b_2\right)\right).$$

Отсюда

$$c_3 = 4\rho^2\left(c_0,\ a_1 + e_0\left(-a_0 a_1 + b_0 b_1\right),\ a_2 + e_0\left(-a_0 a_2 + b_0 b_2\right)\right).$$

Рассмотрим выражение

$$B = (e_0 c_3)(b_0 b_3).$$

Принимая во внимание полученное выражение для c_3 и

$$c_0 = \rho\left(2a_0 + e_0\left(1 - a_0^2 + b_0^2\right)\right),$$

получим

$$(e_0 c_3) = 8\rho^3 (a_0 a_1 a_2 e_0) = -8\rho^3 (a_0 a_3),$$

и, следовательно,

$$B = -8\rho^3 (a_0 a_3)(b_0 b_3).$$

Так как плоскости β' и β'' обращены к началу координат противоположными сторонами, то выражения $(a_0 a_3)$ и $(b_0 b_3)$ разных знаков. Следовательно,

$$B > 0.$$

Рассмотрим теперь выражение A:

$$A = (a_3 c_3) - (e_0 c_3)(a_0 a_3).$$

Имеем

$$-(e_0 c_3)(a_0 a_3) = 8\rho^3 (e_0 a_0 a_1 a_2)^2.$$

Применяя к правой части этого равенства векторное тождество из § 1, получим

$$(e_0 c_3)(a_0 a_3) = 8\rho^3\left(a_0^2 - (a_0 a_1)^2 - (a_0 a_2)^2\right).$$

Аналогично,

$$(a_3 c_3) = 4\rho^3 (e_0 a_1 a_2)(2a_0 + e_0(1 - a_0^2 + b_0^2),$$

$$a_1 + e_0(-a_0 a_1 + b_0 b_1), \quad a_2 + e_0(-a_0 a_2 + b_0 b_2)) =$$

$$= 4\rho^3 \{1 - a_0^2 + b_0^2 + 2(a_0 a_1)^2 + 2(a_0 a_2)^2 - 2(a_0 a_1)(b_0 b_1) - 2(a_0 a_2)(b_0 b_2)\}.$$

И получается следующее выражение для A:

$$A = 4\rho^3 (1 + a_0^2 + b_0^2 - 2(a_0 a_1)(b_0 b_1) - 2(a_0 a_2)(b_0 b_2)).$$

Принимая во внимание, что

$$2|(a_0 a_1)(b_0 b_1)| \leqslant (a_0 a_1)^2 + (b_0 b_1)^2,$$

$$2|(a_0 a_2)(b_0 b_2)| \leqslant (a_0 a_2)^2 + (b_0 b_2)^2,$$

получим

$$A \geqslant 4\rho^3 (1 + a_0^2 + b_0^2 - (a_0 a_1)^2 - (a_0 a_2)^2 - (b_0 b_1)^2 - (b_0 b_2)^2).$$

И так как

$$a_0^2 = (a_0 a_1)^2 + (a_0 a_2)^2 + (a_0 a_3)^2, \quad b_0^2 = (b_0 b_1)^2 + (b_0 b_2)^2 + (b_0 b_3)^2,$$

то

$$A \geqslant 4\rho^3 (1 + (a_0 a_3)^2 + (b_0 b_3)^2) > 0.$$

Лемма доказана полностью.

§ 5. Бесконечно малые изгибания поверхностей в эллиптическом пространстве

В этом параграфе будет установлено взаимно однозначное соответствие между поверхностями евклидова и эллиптического пространства и их бесконечно малыми изгибаниями. Таким образом, вопрос о бесконечно малых изгибаниях поверхности в эллиптическом пространстве будет сведен к вопросу о бесконечно малых изгибаниях соответствующей поверхности евклидова пространства.

Пусть поверхность F эллиптического пространства подвергается бесконечно малой деформации и τ — поле ее скоростей. Эта деформация называется бесконечно малым изгибанием, если длины кривых на поверхности стационарны. Стационарность длин кривых на поверхности влечет за собой стационарность ее линейного элемента. Отсюда, как и в евклидовом пространстве, получается уравнение бесконечно малого изгибания путем дифференцирования линейного элемента по параметру деформации

$$\frac{\delta}{\delta t} dx^2 = 0,$$

или

$$dx\, d\tau = 0,$$

где $\tau = \delta x/\delta t$ — поле скоростей деформации. Точно такой же вид имеет уравнение бесконечно малых изгибаний поверхности в евклидовом пространстве.

Пусть в евклидовом пространстве имеем две близкие изометричные поверхности Φ_1 и Φ_2, заданные уравнениями в декартовых координатах:

$$y_1 = y_1(u, v), \qquad y_2 = y_2(u, v),$$

причем соответствующим по изометрии точкам отнесены одни и те же значения параметров u, v.

Хорошо известно, что векторное поле

$$z = y_1 - y_2$$

является полем бесконечно малого изгибания поверхности Φ:

$$y = y_1 + y_2.$$

Действительно,

$$dy\, dz = dy_1^2 - dy_2^2 = 0$$

в силу равенства линейных элементов поверхностей Φ_1 и Φ_2.

Пусть теперь имеем поверхность Φ:

$$y = y(u, v)$$

и z — поле ее бесконечно малого изгибания. Тогда уравнениями

$$y_1 = y + \lambda z, \qquad y_2 = y - \lambda z$$

при достаточно малом λ задаются две изометричные поверхности, так как

$$dy_1^2 = dy^2 + \lambda^2 dz^2, \qquad dy_2^2 = dy^2 + \lambda^2 dz^2.$$

Оба эти результата распространяются на случай поверхностей в эллиптическом пространстве. Именно, пусть в эллиптическом пространстве имеем две близкие изометричные поверхности F_1 и F_2, заданные уравнениями в вейерштрассовых координатах:

$$x = x_1(u, v), \qquad x = x_2(u, v),$$

причем изометрическое соответствие между поверхностями осуществляется по равенству параметров. Тогда для поверхности F:

$$x = \rho(x_1 + x_2)$$

векторное поле

$$\zeta = \rho(x_1 - x_2)$$

является полем бесконечно малого изгибания.

Действительно,

$$dx = d\rho\,(x_1 + x_2) + \rho\,(dx_1 + dx_2),$$
$$d\zeta = d\rho\,(x_1 - x_2) + \rho\,(dx_1 - dx_2).$$

Отсюда, принимая во внимание, что

$$x_1^2 = x_2^2 = 1, \quad x_1\,dx_1 = x_2\,dx_2 = 0, \quad dx_1^2 = dx_2^2,$$

получаем

$$dx\,d\zeta = 0,$$

т. е. поле ζ является полем бесконечно малого изгибания поверхности F.

Пусть теперь F: $x=x(u,\ v)$ — поверхность эллиптического пространства и ζ — поле ее бесконечно малого изгибания. Тогда при малом λ уравнениями

$$x_1 = \rho(x+\lambda\zeta), \qquad x_2 = \rho(x-\lambda\zeta)$$

задаются две изометричные поверхности F_1 и F_2. Действительно,

$$dx_1 = d\rho(x+\lambda\zeta) + \rho(dx+\lambda\,d\zeta),$$
$$dx_2 = d\rho(x-\lambda\zeta) + \rho(dx-\lambda\,d\zeta).$$

Принимая во внимание, что

$$x\zeta = 0, \qquad d(x\zeta) = x\,d\zeta + \zeta\,dx = 0, \qquad dx\,d\zeta = 0,$$

получаем

$$dx_1^2 = dx_2^2,$$

т. е. поверхности F_1 и F_2 изометричны.

Так как задание поля бесконечно малого изгибания поверхности по существу представляет собой задание бесконечно близкой изометричной поверхности, а между парами изометричных поверхностей эллиптического и евклидова пространств установлено соответствие в § 4, то между поверхностями и их бесконечно малыми изгибаниями эллиптического и евклидова пространств тоже устанавливается соответствие. Именно, имеют место следующие две теоремы:

Теорема 1. *Если ζ является полем бесконечно малого изгибания поверхности F: $x=x(u,\ v)$ эллиптического пространства R, то*

$$z = \frac{\zeta - e_0(\zeta e_0)}{(e_0 x)}$$

является полем бесконечно малого изгибания поверхности Φ:

$$y = \frac{x - e_0(x e_0)}{(e_0 x)}$$

евклидова пространства E_0. Поле z является тривиальным тогда и только тогда, когда тривиально поле ζ.

Теорема 2. *Если z является полем бесконечно малого изгибания поверхности Φ: $y=y(u, v)$ евклидова пространства E_0, то*

$$\zeta = \frac{z - e_0 (yz)}{\sqrt{1+y^2}}$$

является полем бесконечно малого изгибания поверхности F:

$$x = \frac{y + e_0}{\sqrt{1+y^2}}$$

эллиптического пространства R. Поле ζ тривиально тогда и только тогда, когда тривиально поле z.

Доказательство теоремы 1. Как показано выше, уравнениями

$$x_1 = \rho(x + \lambda\zeta), \qquad x_2 = \rho(x - \lambda\zeta)$$

при малом λ задаются две изометричные поверхности F_1 и F_2 в эллиптическом пространстве R. По теореме 1 § 4 поверхности Φ_1 и Φ_2 евклидова пространства E_0, задаваемые уравнениями

$$y_1 = \frac{x_1 - e_0 (x_1 e_0)}{e_0 (x_1 + x_2)}, \qquad y_2 = \frac{x_2 - e_0 (x_2 e_0)}{e_0 (x_1 + x_2)},$$

изометричны. При малом λ они близки. А тогда векторное поле

$$z = y_1 - y_2$$

является полем бесконечно малого изгибания поверхности Φ евклидова пространства, заданной уравнением

$$y = y_1 + y_2.$$

Очевидно, поле

$$z = \frac{1}{\lambda}(y_1 - y_2)$$

тоже является полем бесконечно малого изгибания поверхности Φ.

В пределе, когда $\lambda=0$, поверхность Φ задается уравнением

$$y = \frac{x - e_0 (xe_0)}{(e_0 x)},$$

а ее поле бесконечно малого изгибания — вектором

$$z = \frac{\zeta - e_0 (\zeta e_0)}{(e_0 x)}.$$

По лемме 5 § 3, если поле ζ тривиально, т. е. является полем скоростей бесконечно малого движения, то z является также тривиальным.

Прежде чем закончить доказательство теоремы и заключать о тривиальности поля ζ из тривиальности поля z, мы докажем теорему 2.

Доказательство теоремы 2. Так как поле z является полем бесконечно малого изгибания поверхности Φ:

$$y=y(u,\ v),$$

то при малом λ уравнениями

$$y_1=\frac{1}{2}\,y+\lambda z,\qquad y_2=\frac{1}{2}\,y-\lambda z$$

задаются две изометричные поверхности Φ_1 и Φ_2 евклидова пространства E_0. По теореме 2 предыдущего параграфа в эллиптическом пространстве R им соответствуют изометричные поверхности F_1 и F_2, задаваемые уравнениями

$$x_1=\rho\left(2y_1+e_0\left(1-y_1^2+y_2^2\right)\right),$$
$$x_2=\rho\left(2y_2+e_0\left(1-y_2^2+y_1^2\right)\right).$$

При достаточно малом λ поверхности F_1 и F_2 близки. Отсюда следует, что поверхность F эллиптического пространства, задаваемая уравнением

$$x=\rho\left(x_1+x_2\right),$$

имеет поле

$$\zeta=\rho\left(x_1-x_2\right)$$

в качестве поля бесконечно малого изгибания. Вместе с тем полем бесконечно малого изгибания ее будет также

$$\zeta=\frac{1}{\lambda}\,\rho\left(x_1-x_2\right).$$

Переходя к пределу при $\lambda\to 0$, мы получаем поверхность F, заданную уравнением

$$x=\frac{y+e_0}{\sqrt{1+y^2}},$$

и ее поле бесконечно малого изгибания равно

$$\zeta=\frac{z-e_0\,(yz)}{\sqrt{1+y^2}}.$$

По лемме 6 § 3, если поле z тривиально, то поле ζ также тривиально.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что сопоставления поверхностей и их бесконечно малых изгибаний, устанавливаемые теоремами 1 и 2, взаимно обратны. Отсюда следует,

что поле ζ в теореме 2 тривиально только тогда, когда тривиально поле z, а поле z в теореме 1 тривиально только тогда, когда тривиально поле ζ.

Обе теоремы доказаны полностью.

Теорема 1 позволяет перенести многие результаты, относящиеся к бесконечно малым изгибаниям поверхностей в евклидовом пространстве, на поверхности эллиптического пространства.

Заметим, что соответствие поверхностей эллиптического и евклидова пространств, определяемое теоремами 1 и 2, осуществляется вне зависимости от их бесконечно малых изгибаний и получается при геодезическом отображении одного пространства на другое (§ 1).

При геодезическом отображении эллиптического пространства на евклидово (проективная модель эллиптического пространства) выпуклые поверхности эллиптического пространства переходят в выпуклые поверхности евклидова пространства.

Так как замкнутые выпуклые поверхности в евклидовом пространстве, не содержащие плоских кусков, являются жесткими, т. е. не допускают иных бесконечно малых изгибаний, кроме тривиальных, то замкнутые выпуклые поверхности эллиптического пространства, не содержащие плоских кусков, тоже являются жесткими. Для доказательства этого утверждения достаточно воспользоваться теоремой 1.

Вообще, если замкнутая, не обязательно выпуклая, поверхность F эллиптического пространства при геодезическом отображении в евклидово пространство имеет жесткий образ, то она является жесткой.

Примеры. Назовем поверхностью *типа* T в эллиптическом пространстве всякую поверхность F, выпуклая часть которой лежит целиком на ее выпуклой оболочке. (*Выпуклой оболочкой* называется наименьшая выпуклая поверхность, содержащая F.) В евклидовом пространстве при геодезическом отображении поверхности типа T соответствует также поверхность типа T. А. Д. Александров доказал, что аналитические поверхности типа T в евклидовом пространстве жесткие [4]. По теореме 1 отсюда следует жесткость аналитических поверхностей типа T в эллиптическом пространстве.

Известно, что если выпуклая поверхность в евклидовом пространстве, не содержащая кусков плоскости, однозначно проектируется из некоторой точки O, отделена от нее плоскостью и расстояния точек края поверхности от точки O стационарны, то поверхность жесткая. В эллиптическом пространстве имеет место соответствующая теорема. Стационарность расстояний точек края до точки O при переходе к евклидову пространству следует из леммы 5 § 3 в применении к прямолинейным отрезкам, соединяющим точки края поверхности и O. Отсюда следует, в

частности, что выпуклые шапки в классе шапок в эллиптическом пространстве жесткие.

И. Н. Векуа доказал, что строго выпуклая поверхность в евклидовом пространстве при условии стационарности кривизны ограничивающих ее кривых жесткая. Эта теорема переносится и на строго выпуклые поверхности эллиптического пространства. Она также следует из теоремы 1. Для доказательства заметим, что при бесконечно малом изгибании со стационарностью кривизны ограничивающих поверхность кривых соприкасающиеся круги этих кривых совершают бесконечно малые движения и по лемме 5 § 3 соответствующие этим кругам кривые евклидова пространства тоже совершают движения. Так как порядок соприкосновения при геодезическом отображении сохраняется, то кривизна края поверхности евклидова пространства будет стационарна. И теорема о жесткости для поверхностей эллиптического пространства следует из теоремы И. Н. Векуа [28].

С. Э. Кон-Фоссен построил примеры нежестких замкнутых поверхностей в евклидовом пространстве [41]. Теорема 2 позволяет перенести эти примеры в эллиптическое пространство.

Н. В. Ефимов доказал существование поверхностей, жестких «в малом», т. е. жестких в сколь угодно малой окрестности данной точки [35]. По теореме 2 отсюда следует существование таких поверхностей в эллиптическом пространстве.

Зауер доказал, что, зная бесконечно малые изгибания поверхности F евклидова пространства, можно явно найти бесконечно малые изгибания любой поверхности, получаемой проективным преобразованием из F. Так как при геодезическом соответствии эллиптического и евклидова пространств проективные преобразования фигур соответствуют друг другу, то этот результат Зауера переносится и на поверхности эллиптического пространства.

В евклидовом пространстве известны все бесконечно малые изгибания поверхностей второго порядка. Так как при геодезическом отображении евклидова пространства на эллиптическое поверхности второго порядка переходят в поверхности второго порядка, то теорема 2 позволяет найти все бесконечно малые изгибания поверхностей второго порядка в эллиптическом пространстве.

В случае общих выпуклых поверхностей в пространстве постоянной кривизны имеет место теорема, соответствующая теореме А. Д. Александрова для поверхностей евклидова пространства (§ 1 гл. IV). Именно, *для того чтобы поле z было изгибающим для поверхности F, необходимо и достаточно, чтобы оно в каждой компактной области на поверхности удовлетворяло условию Липшица и почти всюду на поверхности было* $dx\,dz=0$,

Доказательство этой теоремы принципиально не отличается от доказательства, приведенного для выпуклых поверхностей в евклидовом пространстве.

Теоремы 1, 2, доказанные для регулярных поверхностей и регулярных изгибающих полей, легко распространяются на общие выпуклые поверхности. Действительно, из выполнимости условия Липшица для z следует его выполнимость для ζ, а выполнимость $dr\,d\zeta=0$ почти всюду на Φ следует из того, что $dx\,dz=0$ почти всюду на F.

Из теорем 1, 2 и теоремы 1 § 8 гл. IV следует, что если регулярная поверхность с положительной внешней кривизной принадлежит классу $C^{n+\alpha}$ ($n\geqslant 2$, $0<\alpha<1$), то любое ее изгибающее поле принадлежит классу $C^{n+\alpha'}$, $0<\alpha'<\alpha$. Для доказательства достаточно заметить, что при геодезическом отображении эллиптического пространства в евклидово пространство поверхностям класса $C^{n+\alpha}$ соответствуют поверхности класса $C^{n+\alpha}$.

§ 6. Однозначная определенность общих выпуклых поверхностей в эллиптическом пространстве

Теорема 1 § 4 о преобразовании регулярных изометричных поверхностей эллиптического пространства распространяется и на общие выпуклые поверхности. Это позволяет получить различные теоремы об однозначной определенности в эллиптическом пространстве как следствие соответствующих теорем для выпуклых поверхностей евклидова пространства.

Мы будем говорить, что плоскость α, пересекающая выпуклую поверхность F, пересекает ее ребра, если в каждой ребристой точке поверхности F, лежащей в плоскости α, ребро касательного двугранного угла пересекает плоскость α (а не лежит в ней). Имеет место следующая лемма.

Лемма 1. *Почти все плоскости, пересекающие выпуклую поверхность F в эллиптическом пространстве, пересекают ее ребра.*

Доказательство. Во-первых, заметим, что лемму достаточно доказать для выпуклых поверхностей евклидова пространства. Чтобы в этом убедиться, достаточно перейти к рассмотрению поверхности евклидова пространства, соответствующей F при геодезическом отображении эллиптического пространства на евклидово.

Далее, очевидно, лемму достаточно доказать для достаточно малых кусков поверхности. И, следовательно, не ограничивая общности, можно считать, что поверхность F однозначно проектируется на плоскость xy в квадрат K: $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$.

Зададимся малыми числами σ и ω, удовлетворяющими условию $\omega\ll\sigma$. Разобьем квадрат K на малые квадраты k прямыми

$x = \frac{m'}{2^n}$, $y = \frac{m''}{2^n}$, $m', m'' < 2^n$. Кусок поверхности F, проектирующийся в квадрат k, будем обозначать F_k. Обозначим K_ω совокупность тех квадратов k, в которые проектируются конические точки поверхности F с кривизной, большей ω. Часть квадрата K, не покрытую квадратами K_ω, подвергнем еще более мелкому подразделению на квадраты k' и обозначим K_σ совокупность квадратов k', внутрь которых проектируются ребристые точки поверхности F с внешним углом при ребре, большем σ.

Направления ребер с углом, большим σ, на куске $F_{k'}$ отличаются друг от друга мало, если достаточно мало ω и достаточно малы квадраты k'. Действительно, в противном случае на части поверхности $F - F_{K_\omega}$ найдутся конические точки с кривизной, большей ω, что невозможно.

Отсюда следует, что мера множества плоскостей, пересекающих кусок $F_{k'}$ поверхности и содержащих хотя бы одно ребро с углом, большим σ, не больше $c\varepsilon\delta$, где δ — сторона квадрата k', c — постоянная, зависящая только от наибольшего угла наклона опорных плоскостей F к плоскости xy, а ε мало вместе с ω и δ.

Величина

$$\sum_{k' \subset K_\sigma} \delta\sigma$$

ограничена некоторой постоянной M, зависящей только от интеграла средней кривизны поверхности (§ 6 гл. III). Отсюда следует, что мера μ_σ множества плоскостей, пересекающих поверхность $F - F_{K_\omega}$ и содержащих хотя бы одно ребро с внешним углом, большим σ, не превосходит $\frac{cM\varepsilon}{\sigma}$. И так как ε сколь угодно мало, то $\mu_\sigma = 0$.

Переходя ко все более мелким подразделениям на квадраты k, заключаем, что мера множества плоскостей, пересекающих поверхность F и содержащих ребра с углом, большим σ, равна нулю.

Последний предельный переход при $\sigma \to 0$ дает, что почти все плоскости, пересекающие поверхность, пересекают ее ребра. Лемма доказана.

Мы будем обозначать F_1 и F_2 две изометричные, одинаково ориентированные выпуклые поверхности в области R_0 эллиптического пространства R, однозначно проектирующиеся из точки e_0 (1, 0, 0, 0) и видные из этой точки изнутри. Будем обозначать Φ_1 и Φ_2 соответствующие им поверхности евклидова пространства E_0, задаваемые уравнениями

$$y_1 = \frac{x_1 - e_0(x_1 e_0)}{e_0(x_1 + x_2)}, \qquad y_2 = \frac{x_2 - e_0(x_2 e_0)}{e_0(x_1 + x_2)}, \qquad (*)$$

где x_1 и x_2 — соответствующие по изометрии точки поверхностей F_1 и F_2.

Так как из точки e_0 поверхности F_1 и F_2 проектируются однозначно, то поверхности Φ_1 и Φ_2 из начала координат тоже проектируются однозначно. Действительно, любая прямая в R, проходящая через точку e_0, задается уравнением

$$x=\rho(e_0+\lambda a) \qquad (\lambda \text{ — параметр}),$$

а любая прямая в E_0, проходящая через начало координат, — уравнением

$$y=\mu b \qquad (\mu \text{ — параметр}).$$

Легко видеть, что если уравнение относительно λ

$$x_1=\rho(e_0+\lambda a)$$

при любом a имеет не более одного решения, то уравнение относительно μ

$$\frac{x_1-e_0(x_1e_0)}{e_0(x_1+x_2)}=\mu b$$

при любом b также имеет не более одного решения. А это значит, что поверхность Φ_1 однозначно проектируется из O. Тот же вывод можно сделать и относительно поверхности Φ_2.

Пусть F_1 и F_2 — регулярные поверхности. Тогда, как установлено в § 4, поверхности Φ_1 и Φ_2 локально выпуклы. Покажем, что каждая из этих поверхностей обращена к точке O внутренней стороной, т. е. видна изнутри из этой точки.

Обозначим a_0 произвольную точку поверхности F_1, a_1 и a_2 — единичные касательные векторы в этой точке, а a_3 — внешнюю нормаль. Соответствующие векторы для поверхностей F_2 и Φ_1 обозначим b_0, b_1, b_2, b_3 и c_0, c_1, c_2, c_3. Имеем (§ 4)

$$c_0=\frac{1}{\lambda_0}(a_0-e_0(a_0e_0)), \qquad c_3=\frac{1}{\lambda_0^4}(e_0,\ \lambda_0a_1-a_0\lambda_1,\ a_2\lambda_0-a_0\lambda_2).$$

Отсюда

$$(c_0c_3)=\frac{1}{\lambda_0^3}(e_0a_0a_1a_2)=-\frac{1}{\lambda_0^3}(a_3e_0).$$

Так как из точки e_0 поверхность F_1 видна изнутри, то $(e_0a_3)<0$ и, следовательно, $c_0c_3>0$. А это значит, что поверхность Φ_1 видна изнутри из точки O. Аналогично показывается, что и поверхность Φ_2 видна изнутри из точки O.

Пусть теперь F_1 и F_2 — два изометричных, одинаково ориентированных двугранных угла, A_1 и A_2 — точки на ребрах углов, соответствующие по изометрии (ребра углов при изометрии друг другу могут и не соответствовать). Нанесем на поверхность

угла F_1 линию, соответствующую ребру угла F_2, а на поверхность угла F_2 — линию, соответствующую ребру угла F_1. При этом каждый из двугранных углов F_1 и F_2 разобьется на четыре плоских угла с вершинами A_1 и A_2 соответственно.

По формулам (*) двугранным углам F_1 и F_2 в евклидовом пространстве соответствуют четырехгранные углы Φ_1 и Φ_2 (они могут вырождаться в двугранные, если ребра F_1 и F_2 соответствуют по изометрии). Утверждается, что четырехгранные углы Φ_1 и Φ_2 выпуклые и видны из точки O изнутри.

Доказательство просто. Углы F_1 и F_2 приближаются регулярными цилиндрическими изометричными поверхностями $\tilde{F}_1$ и $\tilde{F}_2$. Соответствующие им выпуклые поверхности $\tilde{\Phi}_1$ и $\tilde{\Phi}_2$ евклидова пространства видны изнутри из точки O. При переходе к пределу, когда $\tilde{F}_1 \to F_1$, а $\tilde{F}_2 \to F_2$, поверхности $\tilde{\Phi}_1$ и $\tilde{\Phi}_2$ должны сходиться к выпуклым поверхностям, видным из O изнутри. Но предельные для $\tilde{\Phi}_1$ и $\tilde{\Phi}_2$ поверхности представляют собой четырехгранные углы Φ_1 и Φ_2.

Пусть F_1 и F_2 — два изометричных выпуклых конуса. Утверждаем, что соответствующие им поверхности Φ_1 и Φ_2 евклидова пространства E_0 суть выпуклые конусы, каждый из которых виден из начала координат O изнутри.

То, что Φ_1 и Φ_2 — конусы, очевидно, так как прямым, поставленным в изометрическое соответствие формулами (*), сопоставляются прямые (§ 3). Аппроксимируем конусы F_1 и F_2 изометричными конусами $\tilde{F}_1$ и $\tilde{F}_2$ с регулярной поверхностью. В евклидовом пространстве им соответствуют регулярные выпуклые конусы, видные из точки O изнутри. Соответствующее заключение для конусов Φ_1 и Φ_2 получается предельным переходом $\tilde{F}_1 \to F_1$ и $\tilde{F}_2 \to F_2$.

Рассмотрим теперь случай общих выпуклых поверхностей F_1 и F_2 вблизи соответствующих по изометрии конических точек A_1 и A_2. Покажем, что поверхности Φ_1 и Φ_2 в соответствующих точках B_1 и B_2 являются локально выпуклыми.

Построим касательные конусы V_1 и V_2 поверхностей F_1 и F_2 в точках A_1 и A_2. Изометрия поверхностей индуцирует изометрию конусов. Пусть x_1 — точка поверхности F_1, близкая к A_1, а x_2 — соответствующая по изометрии точка F_2. Соединим точки A_1 и x_1 кратчайшей и на ее полукасательной в точке A_1 отложим отрезок Δs, равный расстоянию между A_1 и x_1. Пусть x_{I} — конец этого отрезка. Как показано в § 1,

$$x_{\mathrm{I}} = \bar{x}_{\mathrm{I}} + \varepsilon_1 \Delta s,$$

где $\varepsilon_{\mathrm{I}} \to 0$, когда $x_{\mathrm{I}} \to A$. Выполняя соответствующее построение на поверхности F_2, получим

$$x_2 = \bar{x}_2 + \varepsilon_2 \Delta s,$$

Подставляя эти выражения для x_1 и x_2 в формулы (*), получим

$$y_1 = \frac{\bar{x}_1 - e_0(\bar{x}_1 e_0)}{e_0(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)} + \bar{\varepsilon}_1 \Delta s, \quad y_2 = \frac{\bar{x}_2 - e_0(\bar{x}_2 e_0)}{e_0(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)} + \bar{\varepsilon}_2 \Delta s.$$

Так как первые члены правых частей дают точки конусов, соответствующих V_1 и V_2, а вторые члены имеют более высокий порядок малости чем Δs, то эти конусы будут касательными конусами поверхностей Φ_1 и Φ_2 в точках B_1 и B_2, соответствующих A_1 и A_2.

Отсюда следует, что поверхности Φ_1 и Φ_2 в точках, соответствующих коническим точкам поверхностей F_1 и F_2, являются локально выпуклыми. Очевидно, тот же вывод надо сделать и в случае ребристых точек A_1 и A_2, если направления ребер не соответствуют по изометрии.

Если же ребра в точках A_1 и A_2 соответствуют по изометрии, то мы можем все же утверждать локальную выпуклость плоского сечения поверхности Φ_1 в точке B_1, если ребро касательного двугранного угла в B_1 не лежит в секущей плоскости.

Мы будем говорить, что поверхность Φ_i слабо выпукла в точке B и обращена к точке O внутренней стороной, если через точку B можно провести плоскость β такую, что любая сфера, касающаяся β в B и расположенная по другую от точки O сторону плоскости β, является локально опорной, т. е. достаточно малая окрестность точки B поверхности лежит вне сферы.

Покажем, что поверхность Φ_1 является слабо выпуклой в гладкой точке B_1 и обращена внутренней стороной к точке O. Для этого прежде всего заметим, что соответствующие B_1 точки A_1 и A_2 поверхностей F_1 и F_2 должны быть гладкими.

Для удобства предстоящих выкладок точки A_1 и A_2 поверхностей F_1 и F_2 будем обозначать их векторами x_1 и x_2. Возьмем на поверхности F_1 точку $x_1 + \Delta x_1$, близкую к x_1, а на поверхности F_2 — соответствующую по изометрии точку $x_2 + \Delta x_2$. Соединим точки x_1 и $x_1 + \Delta x_1$ кратчайшей γ_1 на поверхности F_1, а точки x_2 и $x_2 + \Delta x_2$ — соответствующей кратчайшей γ_2 на поверхности F_2.

Принимая во внимание свойства кратчайшей на выпуклой поверхности, изложенные в § 1, можем записать следующие разложения для векторов $x_1 + \Delta x_1$ и $x_2 + \Delta x_2$:

$$x_1 + \Delta x_1 = \rho\left(\left(1 + \frac{\Delta s^2}{2}\right) x_1 + \Delta s \tau_1 + \delta_1 \nu_1 + \varepsilon_1\right),$$

$$x_2 + \Delta x_2 = \rho\left(\left(1 + \frac{\Delta s^2}{2}\right) x_2 + \Delta s \tau_2 + \delta_2 \nu_2 + \varepsilon_2\right),$$

где τ_1 и τ_2 — единичные касательные векторы геодезических в точках x_1 и x_2; ν_1 и ν_2 — внутренние единичные нормали

поверхностей F_1 и F_2 в этих точках; δ_1 и δ_2 — расстояния точек $x_1+\Delta x_1$ и $x_2+\Delta x_2$ от касательных плоскостей поверхностей F_1 и F_2 в точках x_1 и x_2, причем ε_1/δ_1 и ε_2/δ_2 стремятся к нулю вместе с Δs — длинами кратчайших γ_1 и γ_2.

Подставляя эти выражения в формулы (*), получим

$$\Delta y_1 = \frac{\Delta s}{e_0(x_1+x_2)}\{-y_1(e_0\tau_1+e_0\tau_2)+\tau_1-e_0(e_0\tau_1)\}+ \\ +\frac{\Delta s^2 e_0(\tau_1+\tau_2)}{e_0(x_1+x_2)}\{y_1(e_0\tau_1+e_0\tau_2)-\tau_1+e_0(e_0\tau_1)\}+ \\ +\frac{1}{e_0(x_1+x_2)}\{-(\delta_1 e_0\nu_1+\delta_2 e_0\nu_2)y_1+\delta_1\nu_1-\delta_1 e_0(e_0\nu_1)\}+ \\ +\varepsilon'\delta_1+\varepsilon''\delta_2+\varepsilon\Delta s^2,$$

где ε', ε'', ε стремятся к нулю вместе с Δs.

Для того чтобы убедиться в том, что поверхность Φ_1 слабо выпукла в точке B_1, достаточно показать, что $(n\Delta y_1)$, где n — нормаль Φ_1 в точке B_1, с точностью до величины порядка $\varepsilon\Delta s^2$ сохраняет знак, какова бы ни была точка $x_1+\Delta x_1$, достаточно близкая к x_1, т. е. при достаточно малом Δs.

Умножая Δy_1 на нормаль n поверхности Φ_1 в точке B_1, мы должны получить величину более высокого порядка малости, чем Δs. Отсюда, принимая во внимание, что

$$\delta_1/\Delta s\to 0 \quad \text{и} \quad \delta_2/\Delta s\to 0 \quad \text{при } \Delta s\to 0,$$

заключаем

$$n\{-y_1(e_0\tau_1+e_0\tau_2)+\tau_1-e_0(e_0\tau_1)\}=0.$$

И для $(n\Delta y_1)$ получается

$$(n\Delta y_1)=\frac{\delta_1}{e_0(x_1+x_2)}(-y_1(e_0\nu_1)+\nu_1)n+\frac{\delta_2}{e_0(x_1+x_2)}(e_0\nu_2)(y_1 n)+\varepsilon\Delta s^2.$$

Как установлено в § 4, выражения

$$(-y_1(e_0\nu_1)+\nu_1)n, \qquad -(e_0\nu_2)(y_1 n)$$

отличны от нуля и имеют одинаковые знаки. И мы можем заключить о слабой выпуклости поверхности Φ_1 в точке B_1.

То, что Φ_1 обращена внутренней стороной к O в точке B_1, следует из того, что это имеет место в случае регулярных поверхностей F_1 и F_2. Действительно, возьмем две изометричные регулярные выпуклые поверхности $\tilde F_1$ и $\tilde F_2$, соприкасающиеся с F_1 и F_2 в точках A_1, A_2 и обращенные внутренней стороной к e_0. Тогда поверхность $\tilde\Phi_1$ будет выпуклой и обращенной внутренней стороной к O. А так как выражения

$$(-y_1(e_0\nu_1)+\nu_1)n, \qquad -(e_0\nu_2)(y_1 n)$$

в случае поверхностей $\tilde F_1$ и $\tilde F_2$ будут те же, что и в случае F_1, F_2, то поверхность Φ_1, так же как и $\tilde\Phi_1$, обращена в точке B_1 внутренней стороной к O.

Локальная выпуклость поверхности Φ_2 в гладкой точке устанавливается аналогично.

Отобразим область R_0 эллиптического пространства на евклидово пространство E_0, сопоставляя точке x с вейерштрассовыми координатами x_0, x_1, x_2, x_3 точку с декартовыми координатами x_1/x_0, x_2/x_0, x_3/x_0. В евклидовом пространстве E_0 поверхности F_1 и F_2 изображаются поверхностями, однозначно проектирующимися из начала координат и обращенными к нему внутренней стороной. Соответствие между точками поверхностей F_1 и Φ_1, F_2 и Φ_2, определяемое формулами (*), здесь осуществляется простым проектированием из начала координат.

Мы утверждаем, что кусок Φ' поверхности $\Phi_1(\Phi_2)$, проектируемый из начала координат выпуклым конусом V, представляет собой выпуклую поверхность. Чтобы не вводить новых обозначений, будем предполагать, что $\Phi' \equiv \Phi_1$. Очевидно, выпуклость поверхности Φ_1 будет доказана, если будет установлено, что любая плоскость α, пересекающая конус V, пересекает поверхность Φ_1 по выпуклой кривой, обращенной выпуклостью от вершины конуса.

Предположим, что плоскость α пересекает ребра поверхности F_1. Тогда во всех точках линии γ пересечения плоскости α с поверхностью Φ_1 эта поверхность является по крайней мере слабо выпуклой.

Обозначим $\bar{\gamma}$ выпуклую оболочку кривой γ. Точками соприкосновения с образующими конуса V, лежащими в плоскости α, она разбивается на две части. Ту из этих частей, которая дальше от точки O, назовем γ'. Требуется доказать, что γ совпадает с γ'.

Если γ не совпадает с γ', то часть γ', не принадлежащая γ, состоит из прямолинейных отрезков с концами на кривой γ. Пусть g — один из таких отрезков и $\tilde{\gamma}'$ — соответствующий ему по центральному проектированию из O отрезок кривой γ'.

Возьмем на продолжении отрезка g по разные стороны от него две точки P и Q и проведем через них дугу окружности настолько большого радиуса, чтобы область, ограниченная ею и отрезком PQ, содержала точку O. Представим себе теперь, что окружность деформируется так, что ее центр движется в направлении, перпендикулярном отрезку g, и во все время деформации она проходит через точки P, Q. Тогда, очевидно, наступит момент, когда окружность внутренней стороной коснется кривой $\tilde{\gamma}'$. А это невозможно в силу слабой выпуклости поверхности Φ_1 вдоль кривой γ. Мы пришли к противоречию. Итак, кривая γ является выпуклой.

Относительно плоскости α мы предполагали, что она пересекает ребра поверхности F_1. Теперь мы избавимся от этого ограничения. Пусть α — произвольная плоскость. По лемме 1

сколь угодно малым смещением поверхности F_1 можно добиться того, что α будет пересекать ребра поверхности F_1. И так как Φ_1 непрерывно зависит от положения F_1, то любая плоскость α пересекает Φ_1 по выпуклой кривой. Таким образом, выпуклость поверхности Φ_1 доказана.

Выпуклость поверхности Φ_2 устанавливается аналогично.

Докажем теперь, что поверхности Φ_1 и Φ_2 изометричны. Возьмем на поверхности Φ_1 произвольную спрямляемую кривую $\bar{\gamma}_1$. Так как полный угол проектирующего ее конуса из точки O конечен, то ей на F_1 соответствует спрямляемая кривая γ_1. (Соответствие точек Φ_1 — образа F_1 в E_0 — осуществляется проектированием из точки O).

По изометрии кривой γ_1 на поверхности F_2 соответствует спрямляемая кривая γ_2. Отсюда следует, что на поверхности Φ_2 кривая $\bar{\gamma}_2$, соответствующая $\bar{\gamma}_1$, будет спрямляемой. Покажем, что кривые $\bar{\gamma}_1$ и $\bar{\gamma}_2$ имеют одинаковые длины. Этим будет установлена изометрия поверхностей Φ_1 и Φ_2.

Так как кривая γ_1 на F_1 спрямляема, то вектор-функция $x_1(s)$, где s — дуга вдоль кривой γ_1, удовлетворяет условию Липшица. По той же причине вектор-функция $x_2(s)$ удовлетворяет условию Липшица. Отсюда следует, что вектор-функции $y_1(s)$ и $y_2(s)$, определяемые формулами $(*)$, тоже удовлетворяют условию Липшица и длины кривых $\bar{\gamma}_1$ и $\bar{\gamma}_2$ находятся с помощью интегралов

$$\int\left|\frac{dy_1}{ds}\right|ds, \qquad \int\left|\frac{dy_2}{ds}\right|ds.$$

Для того чтобы показать, что длины кривых $\bar{\gamma}_1$ и $\bar{\gamma}_2$ одинаковы, достаточно показать, что $|y_1'(s)|=|y_2'(s)|$ почти для всех s.

Пусть в соответствующих точках $x_1(s)$ и $x_2(s)$ кривых γ_1 и γ_2 существуют производные $x_1'(s)$ и $x_2'(s)$. Покажем, что тогда существуют производные $y_1'(s)$, $y_2'(s)$ и $|y_1'(s)|=|y_2'(s)|$.

Существование производных $x_1'(s)$ и $x_2'(s)$ указывает на то, что кривые γ_1 и γ_2 в точках x_1 и x_2 имеют касательные. Отобразим кривые γ_1 и γ_2 на касательные t_1 и t_2 в точках x_1 и x_2, сопоставляя точки, отвечающие одинаковым дугам, причем с точкой $x_i(s)$ сопоставляется точка $\bar{x}_i(s)$ касательной t_i. При этом изометрическое соответствие кривых γ_1 и γ_2 порождает изометрическое соответствие между касательными t_1 и t_2.

Пусть $\bar{x}_1(s)$ и $\bar{x}_2(s)$ — точки касательных, отвечающие дуге s. Уравнениями

$$\bar{y}_1=\frac{\bar{x}_1-e_0\,(\bar{x}_1e_0)}{e_0\,(\bar{x}_1+\bar{x}_2)}, \qquad \bar{y}_2=\frac{\bar{x}_2-e_0\,(\bar{x}_2e_0)}{e_0\,(\bar{x}_1+\bar{x}_2)}$$

в евклидовом пространстве E_0 задаются две прямые (§ 3), причем соответствие между ними по равенству параметров является изометрическим. Отсюда следует, что

$$|\bar{y}_1'(s)| = |\bar{y}_2'(s)|.$$

Принимая теперь во внимание, что

$$x_1(s) = \bar{x}_1(s), \quad x_2(s) = \bar{x}_2(s), \quad x_1'(s) = \bar{x}_1'(s), \quad x_2'(s) = \bar{x}_2'(s),$$

и сопоставляя производные $y_1'(s)$ и $\bar{y}_1'(s)$, $y_2'(s)$ и $\bar{y}_2'(s)$, выраженные через x_1, x_1', $\bar{x}_1'$, x_2, x_2', $\bar{x}_2'$, получаем $y_1'(s) = \bar{y}_1'(s)$, $y_2'(s) = \bar{y}_2'(s)$. Следовательно,

$$|y_1'(s)| = |y_2'(s)|$$

почти всюду, и кривые $\bar{\gamma}_1$, $\bar{\gamma}_2$ имеют одинаковые длины.

Так как кривая γ_1 была взята произвольно, то поверхности Φ_1 и Φ_2 изометричны.

Теорема 1. *Замкнутые изометричные выпуклые поверхности в эллиптическом пространстве равны.*

Доказательство. Пусть F_1 и F_2 — две замкнутые изометричные выпуклые поверхности в эллиптическом пространстве R. Не ограничивая общности, можно считать, что эти поверхности одинаково ориентированы, расположены в области R_0 пространства и содержат внутри точку e_0.

Такое расположение поверхностей может быть получено следующим образом. Если поверхности противоположно ориентированы, то одна из них подвергается зеркальному отражению. После этого обе поверхности движением переводятся в область R_0 пространства.

Если при этом какая-нибудь из поверхностей, например F_1, не содержит внутри точку e_0, то мы соединяем ее с e_0 кратчайшим отрезком g прямой в R_0. Пусть A_1 — конец этого отрезка, принадлежащий поверхности. Проводим в R_0 две опорные плоскости поверхности, перпендикулярные прямой g. Они пересекаются по некоторой прямой h, принадлежащей границе R_0. Около этой прямой поверхность F_1 вращается до совмещения точки A_1 с e_0. При этом поверхность остается, очевидно, в R_0. Из этого положения поверхность сколь угодно малым движением переводится в положение, когда точка e_0 находится внутри нее.

Как установлено выше, из каждой поверхности Φ_1 и Φ_2 выпуклый конус V с вершиной в точке O вырезает выпуклую

поверхность. Отсюда следует, что поверхности Φ_1 и Φ_2 суть замкнутые выпуклые поверхности.

Поверхности Φ_1 и Φ_2 изометричны. Согласно теореме об однозначной определенности для общих выпуклых поверхностей (§ 6 гл. III) поверхности Φ_1 и Φ_2 конгруэнтны. А отсюда по лемме 4 § 3 следует конгруэнтность поверхностей F_1 и F_2. Теорема доказана.

Теорема 2. *Выпуклые изометричные шапки в эллиптическом пространстве равны.*

Действительно, если F_1 и F_2 — две изометричные выпуклые шапки, то, дополняя каждую из них ее зеркальным изображением в плоскости края, получим две замкнутые изометричные выпуклые поверхности. По теореме 1 эти поверхности равны. Следовательно, равны и шапки.

Теорема 3. *Пусть в области R_0 эллиптического пространства имеем две изометричные выпуклые поверхности F_1 и F_2, каждая из которых видна из точки e_0 изнутри (снаружи), причем точка e_0 находится вне выпуклых оболочек этих поверхностей.*

Тогда, если соответствующие по изометрии точки границ поверхностей F_1 и F_2 одинаково отстоят от e_0, то поверхности F_1 и F_2 равны.

Эта теорема, так же как и теорема § 4, сводится к соответствующей теореме для поверхностей евклидова пространства. Мы рассмотрим случай, когда поверхности F_1 и F_2 из e_0 видны изнутри. Для рассмотрения случая, когда они видны снаружи, потребовалось бы несколько видоизменить вспомогательные рассмотрения, приведенные выше.

Поверхности Φ_1 и Φ_2 евклидова пространства, соответствующие F_1 и F_2, изометричны, выпуклы в достаточно малой окрестности каждой точки и обращены внутренней стороной к точке O. Покажем, что соответствующие по изометрии точки границ поверхностей Φ_1 и Φ_2 одинаково удалены от O.

Изометрия поверхностей F_1 и F_2 продолжается естественным образом в изометрию прямолинейных отрезков, соединяющих точку e_0 с соответствующими точками границ. По формулам (*) прямолинейным отрезкам, соединяющим e_0 с границей F_1 и F_2, соответствуют равные прямолинейные отрезки, соединяющие начало координат O с соответствующими точками границ поверхностей Φ_1 и Φ_2 (§ 3).

Точка O лежит вне выпуклых оболочек поверхностей Φ_1 и Φ_2. Это потому, что формулы (*) в применении к отрезкам сводятся к проектированию последних на E_0 и растяжению.

По теореме А. Д. Александрова и Е. П. Сенькина (§ 7 гл. III) поверхности Φ_1 и Φ_2 конгруэнтны. Отсюда следует конгруэнтность поверхностей F_1 и F_2.

§ 7. Регулярность выпуклых поверхностей с регулярной метрикой

В этом параграфе будет рассмотрен следующий вопрос. В какой степени регулярность внутренней метрики выпуклой поверхности, т. е. регулярность функций $E(u, v)$, $F(u, v)$, $G(u, v)$ ее линейного элемента влечет за собой регулярность самой поверхности — регулярность $x_0(u, v)$, $x_1(u, v)$, $x_2(u, v)$, $x_3(u, v)$?

Пусть F — регулярная поверхность в эллиптическом пространстве и ζ — какая-нибудь из вейерштрассовых координат произвольной точки на поверхности. Составим уравнение, которому удовлетворяет ζ, если линейный элемент поверхности равен

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Для этого обратимся к деривационным формулам. Имеем

$$x_{uu} = \Gamma^1_{11}x_u + \Gamma^2_{11}x_v - Ex + L\xi,$$

$$x_{uv} = \Gamma^1_{12}x_u + \Gamma^2_{12}x_v - Fx + M\xi,$$

$$x_{vv} = \Gamma^1_{22}x_u + \Gamma^2_{22}x_v - Gx + N\xi.$$

Умножая эти равенства на единичный координатный вектор e, соответствующий оси ζ, получим

$$\zeta_{uu} = \Gamma^1_{11}\zeta_u + \Gamma^2_{11}\zeta_v - E\zeta + L(\xi e),$$

$$\zeta_{uv} = \Gamma^1_{12}\zeta_u + \Gamma^2_{12}\zeta_v - F\zeta + M(\xi e), \qquad (*)$$

$$\zeta_{vv} = \Gamma^1_{22}\zeta_u + \Gamma^2_{22}\zeta_v - G\zeta + N(\xi e).$$

Перенесем все члены из правых частей этих равенств, кроме последних, налево, перемножим первое и третье равенства и вычтем из него второе, возведенное в квадрат. При этом получим

$$(\zeta_{uu} - \Gamma^1_{11}\zeta_u - \Gamma^2_{11}\zeta_v + E\zeta)(\zeta_{vv} - \Gamma^1_{22}\zeta_u - \Gamma^2_{22}\zeta_v + G\zeta) -$$
$$- (\zeta_{uv} - \Gamma^1_{12}\zeta_u - \Gamma^2_{12}\zeta_v + F\zeta)^2 = (LN - M^2)(e\xi)^2.$$

Выразим теперь $(\xi e)^2$ через ζ. Имеем

$$\xi = \frac{(xx_ux_v)}{|xx_ux_v|}, \qquad (\xi e)^2 = \frac{(exx_ux_v)^2}{(xx_ux_v)^2}.$$

Применяя к числителю и знаменателю выражения $(\xi e)^2$ векторные тождества из § 1, получим

$$(xx_ux_v)^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & E & F \\ 0 & F & G \end{vmatrix} = EG - F^2,$$

$$(exx_ux_v)^2 = \begin{vmatrix} 1 & \zeta & \zeta_u & \zeta_v \\ \zeta & 1 & 0 & 0 \\ \zeta_u & 0 & E & F \\ \zeta_v & 0 & F & G \end{vmatrix} = (1-\zeta^2)(EG-F^2) - (E\zeta_v^2 - 2F\zeta_u\zeta_v + G\zeta_u^2).$$

Замечая теперь, что

$$\frac{LN-M^2}{EG-F^2} = K - 1,$$

где K — гауссова кривизна поверхности, получим уравнение для ζ в следующей форме:

$$\begin{aligned}(\zeta_{uu} - \Gamma_{11}^1\zeta_u - \Gamma_{11}^2\zeta_v + E\zeta)(\zeta_{vv} - \Gamma_{22}^1\zeta_u - \Gamma_{22}^2\zeta_v + G\zeta) - \\ - (\zeta_{uv} - \Gamma_{12}^1\zeta_u - \Gamma_{12}^2\zeta_v + F\zeta)^2 = \\ = (K-1)\{(1-\zeta^2)(EG-F^2) - (E\zeta_v^2 - 2F\zeta_u\zeta_v + G\zeta_u^2)\}.\end{aligned}$$

Коэффициенты этого уравнения выражаются через коэффициенты линейного элемента E, F, G и их производные.

В это уравнение мы вводим новую функцию z вместо ζ, связанную с ζ равенством

$$\zeta = \sin z.$$

Легко видеть, что z имеет простой геометрический смысл. С точностью до знака z есть расстояние точки поверхности от плоскости $\zeta=0$. Замечая, что

$$z_u = \frac{\zeta_u}{\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad z_v = \frac{\zeta_v}{\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad \operatorname{tg} z = \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}},$$

$$\frac{\zeta_{uu}}{\sqrt{1-\zeta^2}} = z_{uu} - z_u^2 \operatorname{tg} z, \qquad \frac{\zeta_{uv}}{\sqrt{1-\zeta^2}} = z_{uv} - z_u z_v \operatorname{tg} z,$$

$$\frac{\zeta_{vv}}{\sqrt{1-\zeta^2}} = z_{vv} - z_v^2 \operatorname{tg} z,$$

получим уравнение для z в следующей форме:

$$\begin{aligned}\{z_{uu} - \Gamma_{11}^1 z_u - \Gamma_{11}^2 z_v + (E - z_u^2)\operatorname{tg} z\}\{z_{vv} - \Gamma_{22}^1 z_u - \Gamma_{22}^2 z_v^2 + (G - z_v^2)\operatorname{tg} z\} - \\ - \{z_{uv} - \Gamma_{12}^1 z_u - \Gamma_{12}^2 z_v + (F - z_u z_v)\operatorname{tg} z\}^2 = \\ = (K-1)\{(E - z_u^2)(G - z_v^2) - (F - z_u z_v)^2\}.\end{aligned}$$

Заметим, что это уравнение отличается от уравнения изгибания для поверхностей евклидова пространства только последними членами в фигурных скобках левой части равенства и -1 в выражении $(K-1)$ правой части.

Если произвести в формулах (*) замену ζ на z, то для коэффициентов L, M, N второй квадратичной формы поверхности получим выражения

$$L=\frac{1}{Q}\left\{z_{uu}-\Gamma_{11}^{1}z_u-\Gamma_{11}^{2}z_v+\left(E-z_u^2\right)\operatorname{tg} z\right\},$$

$$M=\frac{1}{Q}\left\{z_{uv}-\Gamma_{12}^{1}z_u-\Gamma_{12}^{2}z_v+\left(F-z_uz_v\right)\operatorname{tg} z\right\},$$

$$N=\frac{1}{Q}\left\{z_{vv}-\Gamma_{22}^{1}z_u-\Gamma_{22}^{2}z_v+\left(G-z_v^2\right)\operatorname{tg} z\right\},$$

где

$$Q^2=\frac{\left(E-z_u^2\right)\left(G-z_v^2\right)-\left(F-z_uz_v\right)^2}{EG-F^2}.$$

Пусть теперь параметризация u, v поверхности полугеодезическая и, следовательно, линейный элемент поверхности

$$ds^2=du^2+c^2dv^2.$$

При этом символы Христоффеля имеют следующие значения:

$$\Gamma_{11}^{1}=0, \qquad \Gamma_{11}^{2}=0,$$

$$\Gamma_{12}^{1}=0, \qquad \Gamma_{12}^{2}=\frac{c_u}{c},$$

$$\Gamma_{22}^{1}=-cc_u, \qquad \Gamma_{22}^{2}=\frac{c_v}{c}.$$

Уравнение изгибания принимает вид

$$\left(r+(1-p^2)\operatorname{tg} z\right)\left(t+cc_up-\frac{c_v}{c}q+(c^2-q^2)\operatorname{tg} z\right)-$$
$$-\left(s-\frac{c_u}{c}q-pq\operatorname{tg} z\right)^2=(K-1)(c^2-c^2p^2-q^2).$$

А коэффициенты L, M, N выражаются по формулам

$$L=c\,\frac{r+(1-p^2)\operatorname{tg} z}{(c^2-c^2p^2-q^2)^{1/2}},$$

$$M=c\,\frac{s-\frac{c_u}{c}q-pq\operatorname{tg} z}{(c^2-c^2p^2-q^2)^{1/2}},$$

$$N=c\,\frac{t+cc_up-\frac{c_v}{c}q+(c^2-q^2)\operatorname{tg} z}{(c^2-c^2p^2-q^2)^{1/2}},$$

где r, s, t, p, q — монжевы обозначения для производных функции z.

Лемма 1. *Пусть F — регулярная выпуклая шапка в эллиптическом пространстве. Пусть гауссова кривизна шапки всюду больше кривизны пространства.*

Тогда для нормальной кривизны шапки в точке x можно дать оценку в зависимости только от внутренней метрики шапки и расстояния $h(x)$ точки x от плоскости основания шапки.

Доказательство. Пусть x — произвольная точка шапки и γ — произвольная, исходящая из x геодезическая. Обозначим $\varkappa_\gamma(x)$ нормальную кривизну шапки в точке x в направлении γ и рассмотрим функцию

$$w_\gamma(x) = h(x)\varkappa_\gamma(x).$$

Функция $w_\gamma(x)$ неотрицательна и обращается в нуль на границе шапки. В некоторой внутренней точке шапки x_0 для некоторой геодезической γ_0, исходящей из этой точки, она достигает максимума. Обозначим w_0 величину этого максимума.

Проведем через точку x_0 геодезическую $\bar\gamma_0$, перпендикулярную γ_0, и введем в окрестности точки x_0 полугеодезическую координатную сеть u, v, приняв геодезические, перпендикулярные $\bar\gamma_0$, за линии u. В качестве параметров u и v примем дуги геодезических γ_0 и $\bar\gamma_0$, отсчитываемые от точки x_0.

Обозначим $\gamma(x)$ геодезическую семейства u, проходящую через точку x, близкую x_0, и введем в рассмотрение функцию

$$w(x) = w_{\gamma(x)}(x).$$

Эта функция, очевидно, также достигает максимума в точке x_0, и этот максимум равен ω_0.

Составим уравнение изгибания для F, приняв за плоскость $z=0$ касательную плоскость шапки в точке x_0. Для определенности будем считать, что шапка находится в полупространстве $z>0$. Полагая

$$\alpha = (1-p^2)\operatorname{tg} z, \quad \beta = -\frac{c_u}{c}q - pq\operatorname{tg} z,$$

$$\gamma = cc_u p - \frac{c_v}{c}q + (c^2-q^2)\operatorname{tg} z, \quad \delta = \left(\frac{c_{uu}}{c}+1\right)(c^2-c^2p^2-q^2),$$

запишем уравнение изгибания в виде

$$(r+\alpha)(t+\gamma)-(s+\beta)^2+\delta=0.$$

Выразим нормальную кривизну $\varkappa_{\gamma(x)}$ через z. Для этого воспользуемся формулой для коэффициента L второй квадратичной формы. Получим

$$\varkappa_{\gamma(x)} = c\,\frac{r+(1-p^2)\operatorname{tg} z}{(c^2-c^2p^2-q^2)^{1/2}}.$$

Отсюда

$$w = hc\,\frac{r + (1-p^2)\operatorname{tg} z}{(c^2 - c^2p^2 - q^2)^{1/2}}.$$

Решая это равенство относительно r, получим

$$r = \frac{w}{h}\left(1 - p^2 - \frac{q^2}{c^2}\right)^{1/2} - (1-p^2)\operatorname{tg} z.$$

Исходя из этого выражения для r, найдем его первые и вторые производные по u и v в точке x_0. При этом будем иметь в виду следующее. По выбору системы координат

$$c=1, \quad c_u = c_v = c_{uv} = c_{vv} = 0, \quad c_{uu} = -K,$$

где K — гауссова кривизна поверхности. Производные p, q равны нулю, так как плоскость $z=0$ касается поверхности. Производная $s=0$, так как $M=0$ (направления координатных линий в точке x_0 являются главными направлениями). Наконец, $w_u=0$, $w_v=0$, потому что w достигает максимума в точке x_0.

Имеем

$$r_u = \left(\frac{1}{h}\right)_u w, \quad r_v = \left(\frac{1}{h}\right)_v w,$$

$$r_{uu} = \frac{w_{uu}}{h} + w\left(\left(\frac{1}{h}\right)_{uu} - \frac{r^2}{h}\right) - r,$$

$$r_{vv} = \frac{w_{vv}}{h} + w\left(\left(\frac{1}{h}\right)_{vv} - \frac{t^2}{h}\right) - t.$$

Дифференцируя уравнение изгибания в точке x_0 по u, получим

$$rt_u + tr_u - K_u = 0.$$

Отсюда

$$t_u = \frac{K_u - tr_u}{r}.$$

Дифференцируя уравнение изгибания по u дважды, получим

$$r_{uu}t + t_{uu}r + 2r_ut_u - 2s_u^2 - r^2 + 2K^2 - K - 1 - K_{uu} = 0.$$

Введем в это равенство полученные выше значения r_u, r_v, t_u, $s_u = r_v$, r_{uu} и $t_{uu} = r_{vv}$. Заменим, кроме того, w его значением в точке x_0, равным rh. Тогда получим

$$\frac{1}{h}(w_{uu}t + w_{vv}r) - h(K-1)(r^2+t^2) - 2r^2h^2\left(\left(\frac{1}{h}\right)_u^2 + \left(\frac{1}{h}\right)_v^2\right) + \\ + h(K-1)\left(\left(\frac{1}{h}\right)_{uu} + \left(\frac{1}{h}\right)_{vv}\right) + \\ + 2\left(\frac{1}{h}\right)_u hK_u - r^2 + 2K^2 - 3K + 1 - K_{uu} = 0. \quad (**)$$

Оценим вторые производные h_{uu} и h_{vv}. Для этого примем в формулах для L и N за плоскость $z=0$ плоскость оснoвания шапки. Тогда главные кривизны в точке x_0, равные r и t, выражаются через h по формулам

$$r=-\frac{h_{uu}+\left(1-h_u^2\right)\operatorname{tg} h}{\left(1-h_u^2-h_v^2\right)^{1/2}}, \quad t=-\frac{h_{vv}+\left(1-h_v^2\right)\operatorname{tg} h}{\left(1-h_u^2-h_v^2\right)^{1/2}}.$$

Отсюда получаются выражения для h_{uu} и h_{vv}, которые мы подставим в равенство (**).

Принимая во внимание, что первые три слагаемых левой части равенства (**) неположительны, приходим к следующему неравенству:

$$-r^2h^2+Arh+B\geqslant 0,$$

где A и B — известные ограниченные выражения, содержащие гауссову кривизну K и ее производные, h и ее первые производные h_u, h_v. Так как $rh=w$, то получается, таким образом, что

$$-w_0^2+Aw_0+B\geqslant 0.$$

Отсюда следует, что для w_0 может быть установлен верхний предел. Если его обозначить $\overline{w}_0$, то нормальная кривизна шапки в точке, отстоящей от ее основания на h, не превосходит $\overline{w}_0/h$. Лемма доказана.

Пусть F — выпуклая поверхность в эллиптическом пространстве. Удельной внешней кривизной поверхности F на множестве M мы будем называть отношение $\omega(M)/s(M)$, где $\omega(M)$ — внешняя кривизна поверхности на множестве M, а $s(M)$ — площадь поверхности на этом множестве. Мы будем говорить, что удельная кривизна поверхности ограничена сверху (снизу), если существует положительная постоянная c такая, что для любого борелевского множества M на поверхности $\omega(M)/s(M)\leqslant c$ (соответственно, $\omega(M)/s(M)\geqslant c$).

Для поверхностей ограниченной удельной кривизны в евклидовом пространстве А. Д. Александровым доказаны следующие две теоремы (§ 3 гл. II):

1) *выпуклые поверхности ограниченной сверху удельной кривизны не содержат ни ребристых, ни конических точек;*

2) *выпуклые поверхности ограниченной снизу удельной кривизны строго выпуклые, т. е. не могут содержать прямолинейных отрезков.*

Мы хотим распространить эти теоремы на случай выпуклых поверхностей ограниченной удельной кривизны в эллиптическом пространстве.

Обозначим R_ρ сферу радиуса $\rho<\pi/2$ с центром $e_0(1,0,0,0)$ в эллиптическом пространстве R. Пусть F — любая выпуклая поверхность, содержащаяся внутри сферы R_ρ.

Отобразим эллиптическое пространство R геодезически на евклидово пространство $x_0=1$, сопоставляя точке x эллиптического пространства точку $x/(xe_0)$ евклидова пространства. Если эллиптическое пространство интерпретировать с помощью трехмерной сферы, то это отображение заключается в проектировании сферы из ее центра на касательную гиперплоскость в точке e_0. При этом отображении выпуклой поверхности F в R будет соответствовать выпуклая поверхность $\bar{F}$ в евклидовом пространстве.

Будем обозначать внешнюю кривизну и площадь на множестве M поверхности F через $\omega(M)$ и $S(M)$, а кривизну и площадь на соответствующем множестве $\bar{M}$ поверхности $\bar{F}$ через $\bar{\omega}(\bar{M})$ и $\bar{S}(\bar{M})$. Тогда имеет место следующая лемма.

Лемма 2. *Существуют положительные постоянные A_1, B_1 и A_2, B_2, зависящие только от ρ, такие, что для любого открытого множества M на поверхности F имеют место неравенства*

$$A_1 \leqslant \frac{S(M)}{\bar{S}(\bar{M})} \leqslant B_1, \qquad A_2 \leqslant \frac{\omega(M)}{\bar{\omega}(\bar{M})} \leqslant B_2.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать поверхность F замкнутой, так как любую выпуклую поверхность можно дополнить до замкнутой. Возьмем на поверхности F достаточно густую сеть точек и построим их выпуклую оболочку. Она представляет собой выпуклый многогранник P. Установим соответствие точек P и F путем проектирования из некоторой точки O внутри поверхности F. По мере того как густота сети точек на F увеличивается, многогранник P сходится к F. При этом, если образ M на P при указанном проектировании обозначить M_P, то

$$S(M_P) \to S(M), \qquad \omega(M_P) \to \omega(M).$$

При геодезическом отображении многограннику P будет соответствовать евклидов многогранник $\bar{P}$, между точками которого и точками $\bar{F}$ установлено соответствие проектированием из точки $\bar{O}$ — образа O при геодезическом отображении, причем когда $P \to F$, $\bar{P} \to \bar{F}$,

$$\bar{S}(\bar{M}_P) \to \bar{S}(\bar{M}), \qquad \bar{\omega}(\bar{M}_P) \to \bar{\omega}(\bar{M}).$$

Отсюда следует, что лемму достаточно доказать для случая многогранников. Кроме того, так как площадь и кривизна — аддитивные функции множества, то первое из неравенств, указанных в лемме, достаточно установить для множества, лежащего в одной грани, а второе неравенство — для кривизны в одной вершине.

Обратимся к проективной модели эллиптического пространства в евклидовом пространстве $x_0=1$. Здесь многогранник P изображается евклидовским многогранником $\bar{P}$. Так как масштаб перехода от расстояний в евклидовой метрике к расстояниям в эллиптической метрике в ограниченной части пространства находится в положительных пределах, то масштаб перехода от площади в евклидовой метрике к площади в эллиптической метрике также находится в положительных пределах. Отсюда следует первое из указанных в лемме неравенств.

Второе неравенство устанавливается аналогично. Так как масштаб перехода от угла между плоскостями в евклидовой метрике к углу между ними в эллиптической метрике заключен в положительных пределах, то масштаб перехода от кривизны вершины в евклидовой метрике к кривизне в эллиптической метрике тоже заключен в положительных пределах, что и требовалось доказать.

Из леммы 2 с помощью указанных выше теорем А. Д. Александрова следует:

1. *Выпуклые поверхности ограниченной сверху удельной кривизны в эллиптическом пространстве не содержат ни ребристых, ни конических точек.*

2. *Выпуклые поверхности ограниченной снизу удельной кривизны строго выпуклы, т. е. не содержат прямолинейных отрезков.*

Мы будем говорить, что метрика поверхности регулярна (k раз дифференцируема), если на поверхности может быть введена координатная сеть u, v так, что коэффициенты E, F, G линейного элемента поверхности, как функции координат u, v, будут регулярными (k раз дифференцируемыми функциями).

Регулярность поверхности влечет за собой регулярность ее метрики. Именно, если поверхность k раз дифференцируема, то ее метрика дифференцируема по крайней мере $k-1$ раз. Обратное, вообще говоря, неверно, поверхность может иметь регулярную, даже аналитическую метрику и не быть регулярной. Однако имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если выпуклая поверхность F в эллиптическом пространстве имеет регулярную (k раз дифференцируемую, $k\geqslant 5$) метрику и гауссова кривизна поверхности больше кривизны пространства, то сама поверхность регулярна (по крайней мере $k-1$ раз дифференцируема). Если же метрика поверхности аналитическая, то поверхность аналитическая.*

Доказательство. В достаточно малой окрестности G произвольной точки x на поверхности F ее гауссова кривизна K_i удовлетворяет неравенству

$$1<a\leqslant K_i\leqslant b,$$

Так как внутренняя кривизна поверхности F отличается от ее внешней кривизны на величину площади

$$\omega(M) = \iint\limits_{M} K_i\,ds - S(M),$$

то удельная внешняя кривизна поверхности в G заключена в положительных пределах, т. е.

$$a - 1 \leqslant \frac{\omega(M)}{S(M)} \leqslant b - 1.$$

Отсюда следует, что поверхность F гладкая и строго выпуклая.

Докажем регулярность поверхности F в окрестности произвольной точки x. Рассмотрим сначала случай аналитической метрики.

Отрежем от поверхности F плоскостью α маленькую шапку ω, содержащую точку x, настолько малую, чтобы любая плоскость β, пересекающая F по ω, отсекала бы шапку. Отрезание такой шапки ω возможно благодаря гладкости и строгой выпуклости поверхности F.

Так как край γ шапки ω имеет на любом участке неотрицательный поворот, то его можно приблизить аналитической кривой γ^* с положительной всюду геодезической кривизной. Эта кривая ограничивает на ω некоторую область, которую мы обозначим ω^*.

Из двух экземпляров поверхности ω^* можно «склеить» замкнутое многообразие Ω путем отождествления точек их границ, соответствующих по изометрии. Это многообразие будет иметь аналитическую метрику всюду, кроме линии склеивания. Однако это склеивание можно производить не непосредственно, а через узкий регулярный поясок регулярно в смысле внутренней метрики, переходящей в ω^*, причем, так как геодезическая кривизна края ω^* положительна, этот поясок можно выбрать так, чтобы его гауссова кривизна была всюду больше 1 (кривизны пространства).

В гл. VI будет доказано, что в эллиптическом пространстве существует регулярная замкнутая выпуклая поверхность Ω^*, изометричная Ω. Обозначим на ней через $\tilde{\omega}^*$ область, соответствующую ω^*.

Из теоремы об однозначной определенности замкнутых выпуклых поверхностей (§ 6) следует, что по мере того как ширина пояска неограниченно убывает, а $\gamma^* \to \gamma$, Ω^* сходится к замкнутой выпуклой поверхности, которая образуется шапкой ω и ее зеркальным изображением в плоскости края. Это значит, что при указанных условиях $\tilde{\omega}^* \to \omega$.

Сместим плоскость α в сторону шапки ω в положение α', и отрезаемые плоскостью α' шапки от поверхностей ω и $\tilde{\omega}^*$ обозначим ω' и $\tilde{\omega}'$ соответственно.

Пусть $\tilde{G}$ — замкнутая область на $\tilde{\omega}'$, удаленная от плоскости α' на расстояние, большее $h_0>0$. В этой области для нормальных кривизн $\tilde{\omega}'$ может быть дана оценка сверху в зависимости только от внутренней метрики поверхности F.

Оценка нормальных кривизн равносильна оценке первых и вторых производных координат x_i точки поверхности. А это позволяет с помощью уравнения изгибания, представляющего собой уравнение эллиптического типа для x_i, установить оценки производных x_i всех порядков.

Существование внутренних оценок для всех производных x_i позволяет заключить, что в области $G=\lim \tilde{G}$ поверхность F неограниченно дифференцируема. А отсюда в силу эллиптичности уравнения изгибания следует аналитичность координат x_i как функций u, v, т. е. аналитичность поверхности F.

Путь теперь метрика поверхности F дифференцируема k раз. Аппроксимируем метрику F в ω аналитической метрикой, а кривую γ^* — аналитической кривой. При этом мы получим аналитическое многообразие с внутренне выпуклым краем. По теореме А. Д. Александрова это многообразие изометрично шапке, которая по доказанному является аналитической. Возможность указать априорные оценки для k-х производных координат точки этой шапки позволяет заключить, что предельная шапка, являющаяся в силу однозначной определенности выпуклых шапок областью на F, будет $k-1$ раз дифференцируемой. И даже более того, $(k-1)$-е производные координат ее точек удовлетворяют условию Гёльдера. Теорема доказана.

Подобно тому как в случае поверхностей евклидова пространства (§ 10 гл. II), теорему 1 можно усилить, если воспользоваться оценками Е. Хейнца для вторых производных решения уравнения Дарбу. Именно таким путем А. А. Дубровин, отправляясь от результата, содержащегося в теореме 1, доказал, что если метрика поверхности принадлежит классу C^n, $n \geqslant 2$, то поверхность принадлежит классу $C^{n-1+\nu}$, $0<\nu<1$, [32].

Как следствие теоремы 1 и теоремы А. Д. Александрова о реализуемости многообразий кривизны не меньше K в эллиптическом пространстве кривизны K, получаются теоремы 2 и 3.

Теорема 2. *Замкнутое двумерное многообразие кривизны, большей K, с регулярной метрикой изометрично регулярной замкнутой выпуклой поверхности в эллиптическом пространстве кривизны K. Если метрика многообразия k раз дифференцируема, $k \geqslant 2$, то поверхность $k-1$ раз дифференцируема. Если метрика аналитическая, то поверхность аналитическая.*

Теорема. *Каждая точка двумерного многообразия кривизны, большей K, с регулярной метрикой имеет окрестность, изометричную регулярной выпуклой шапке в эллиптическом пространстве кривизны K, причем, если метрика многообразия $k \geqslant 2$ раз дифференцируема, то шапка дифференцируема $k - 1$ раз. Если метрика многообразия аналитическая, то шапка аналитическая.*

В заключение заметим, что теорема о регулярности выпуклой поверхности с регулярной метрикой позволяет применять, так же как и в евклидовом пространстве, синтетические методы теории общих выпуклых поверхностей А. Д. Александрова, в частности, теорему «о склеивании» к решению различных задач классической теории поверхностей, рассматривающей обычно достаточно регулярные объекты.

§ 8. О регулярности выпуклых поверхностей с регулярной метрикой в пространстве Лобачевского

В настоящем параграфе мы рассмотрим вопрос о регулярности выпуклой поверхности с регулярной метрикой в пространстве Лобачевского. Мы это делаем по двум причинам. Во-первых, формальное применение метода, изложенного в § 7, для поверхностей пространства Лобачевского дает неполное решение проблемы [62]. Оценки для вторых производных во внутренних точках шапки этим методом удается получить только в предположении положительности гауссовой кривизны поверхности, в то время как естественным было бы условие положительности внешней кривизны. Во-вторых, сам результат используется в следующей главе при решении проблемы погружения двумерного риманова многообразия в трехмерное риманово пространство.

Теорема 1. *Если выпуклая поверхность в пространстве Лобачевского имеет регулярную (k раз дифференцируемую, $k \geqslant 5$) метрику и гауссова кривизна поверхности больше кривизны пространства, то сама поверхность регулярна (по крайней мере $k - 1$ раз дифференцируема). Если же метрика поверхности аналитическая, то поверхность аналитическая.*

Для доказательства теоремы 1 воспользуемся идеей, которая лежит в основе доказательства соответствующей теоремы для случая евклидова пространства (§ 10, гл. II). При этом особо выделим те моменты доказательства, которые требуют существенных изменений. Остальная часть, допускающая простое перенесение евклидова случая, будет дана описательно.

Прежде всего мы докажем теорему для случая, когда метрика поверхности аналитическая. Пусть F — такая поверхность и O — произвольная точка на ней,

В случае евклидова пространства выпуклая поверхность с регулярной метрикой и положительной кривизной гладкая и строго выпуклая. Аналогичная теорема имеет место и в пространстве постоянной кривизны, если гауссова кривизна поверхности больше кривизны пространства. Для эллиптического пространства доказательство содержится в § 7. Это доказательство дословно переносится и на случай выпуклых поверхностей в пространстве Лобачевского.

Так как поверхность F гладкая и строго выпуклая, то в точке O существует единственная опорная плоскость — касательная плоскость поверхности. Она не имеет других общих точек с поверхностью, кроме точки O. Плоскостью, перпендикулярной нормали поверхности в точке O, отсечем от поверхности F маленькую шапку ω. Теперь для доказательства аналитичности поверхности F достаточно доказать следующие два утверждения:

1. Существует аналитическая выпуклая шапка $\tilde{\omega}$, изометричная ω.

2. Изометричные выпуклые шапки в пространстве Лобачевского равны.

Доказательство второго из этих утверждений может быть основано на тех же соображениях, что и для евклидовых шапок в работе [59]. Именно таким путем однозначная определенность выпуклых шапок в пространстве Лобачевского была доказана И. А. Данеличем [31].

Доказательство первого утверждения сводится к решению краевой задачи для уравнения изгибания (уравнения Дарбу), к которому редуцируется построение поверхности, реализующей метрику, заданную линейным элементом. Уравнение Дарбу выводится в пространстве Лобачевского так же, как и в эллиптическом пространстве. Опуская вывод, приведем окончательный результат.

Пусть регулярная поверхность F с линейным элементом $ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$ однозначно проектируется на плоскость σ и $z(u,v)$ — расстояние точки (u,v) поверхности от этой плоскости, взятое с соответствующим знаком. Тогда, если кривизна пространства Лобачевского $K_0=-1$, то функция $z(u,v)$ удовлетворяет уравнению

$$(r+\alpha)(t+\gamma)-(s+\beta)^2+\delta=0, \tag{*}$$

где α, β, γ, δ имеют следующие значения:

$$\alpha=-\Gamma_{11}^1 z_u-\Gamma_{11}^2 z_v-\left(E-z_u^2\right)\operatorname{th} z,$$
$$\beta=-\Gamma_{12}^1 z_u-\Gamma_{12}^2 z_v-\left(F-z_u z_v\right)\operatorname{th} z,$$
$$\gamma=-\Gamma_{22}^1 z_u-\Gamma_{22}^2 z_v-\left(G-z_v^2\right)\operatorname{th} z,$$
$$\delta=(K+1)\left\{\left(E-z_u^2\right)\left(G-z_v^2\right)-\left(F-z_u z_v\right)^2\right\};$$

Γ_{ij}^k — символы Христоффеля для поверхности, K — гауссова кривизна поверхности, r, s, t — вторые производные функции $z(u, v)$.

Так же, как и в евклидовом случае, $r+\alpha$, $s+\beta$ и $t+\gamma$ с точностью до некоторого множителя равны коэффициентам L, M, N второй квадратичной формы поверхности. Именно, если положить

$$Q^2 = \frac{\left(E - z_u^2\right)\left(G - z_v^2\right) - \left(F - z_u z_v\right)^2}{EG - F^2},$$

то

$$L = \frac{1}{Q}(r + \alpha), \quad M = \frac{1}{Q}(s + \beta), \quad N = \frac{1}{Q}(t + \gamma).$$

Подобно тому как в случае евклидовых шапок, построим выпуклую (с положительной геодезической кривизной) аналитическую кривую, близкую к краю шапки ω, и обозначим ω' ограничиваемую ею область на поверхности F. Покажем, что существует аналитическая область $\tilde{\omega}'$, изометричная ω'. Для этого достаточно доказать разрешимость задачи Дирихле для уравнения (*) в области G' плоскости u, v, соответствующей ω', при условии $z=0$ на границе области. Существование такого решения гарантируется известной теоремой С. Н. Бернштейна при условии возможности получения априорных оценок для предполагаемого решения и его производных до второго порядка.

Оценка модуля решения и его первых производных p и q не составляет труда. В самом деле, $|z|$ не превосходит внутреннего диаметра области ω', а

$$|p| \leqslant \max_{\omega'} \frac{1}{\sqrt{E}}, \quad |q| \leqslant \max_{\omega'} \frac{1}{\sqrt{G}}.$$

Оценки вторых производных решения $z(u, v)$ получаются сначала на границе области G'. Для этого вдоль края области ω', внутри ω', вводится полугеодезическая система координат u, v, содержащая край области ω' в качестве линии $u=0$. При этом линейный элемент поверхности принимает вид

$$ds^2 = du^2 + c^2 dv^2,$$

а коэффициенты уравнения (*) получают следующие значения:

$$\alpha = -\left(1 - p^2\right) \operatorname{th} z, \quad \beta = pq \operatorname{th} z - \frac{c_u}{c} q,$$

$$\gamma = -\left(c^2 - q^2\right) \operatorname{th} z + c c_u p - \frac{c_v}{c} q,$$

$$\delta = -(K + 1)\left(c^2 - c^2 p^2 - q^2\right).$$

Так как переход к новым координатам u, v осуществляется чисто

внутренним образом, то установление априорных оценок для вторых производных z в любой из этих двух систем координат суть эквивалентные задачи.

В полугеодезических координатах вдоль края $\tilde{\omega}'$ имеем $t = z_{vv} = 0$. Поэтому достаточно установить оценки только для s и r. Так же, как и в евклидовом случае, начинаем с оценки s.

Определим область ω_0': $u \leqslant u_0$ вдоль края $\tilde{\omega}'$ условием

$$|p| < 1, \quad |q| < 2.$$

Очевидно, u_0 ограничено снизу независимо от формы аналитической шапки $\tilde{\omega}'$, изометричной ω'. Теперь в прямоугольных декартовых координатах u, v, ζ рассмотрим поверхность Φ, заданную уравнением $\zeta = \zeta(u, v)$, где $\zeta(u, v)$ — периодическая по v функция, совпадающая с $q(u, v)$ в пределах одного периода. Поверхность Φ имеет форму бесконечной ленты, проектирующейся на полосу $0 \leqslant u \leqslant u_0$ с одним краем на оси $u=0$. Проведем через ось $u=0$ плоскость σ, образующую наименьший угол с плоскостью uv и так, чтобы поверхность Φ была под этой плоскостью. При этом могут представиться две возможности: либо плоскость σ упирается в край $u=u_0$ поверхности Φ, либо она касается поверхности Φ в некоторой точке.

В первом случае

$$\zeta_u \leqslant \frac{1}{u_0} \max_v |q(u_0, v)|,$$

и, следовательно, для производной s вдоль края шапки получается оценка

$$s \leqslant \frac{1}{u_0} \max_v |q(u_0, v)| < \frac{2}{u_0}.$$

Аналогично получается оценка s снизу

$$-\frac{1}{u_0} \max_v |q(u_0, v)| \leqslant s.$$

А следовательно,

$$|s| < \frac{2}{u_0}.$$

Рассмотрим второй случай, когда плоскость σ касается поверхности Φ в некоторой точке. Дифференцируя уравнение (*) по v, будем иметь

$$q_{uu}(t+\gamma) - 2q_{uv}(s+\beta) + q_{vv}(r+\alpha) - \alpha_v(t+\gamma) - \\ - 2\beta_v(s+\beta) + \gamma_v(r+\alpha) + \delta_v = 0. \quad (**)$$

Для u и v, отвечающих точке касания плоскости σ с поверхностью Φ,

$$q_{uu}(t+\gamma) - 2q_{uv}(s+\beta) + q_{vv}(r+\alpha) \leqslant 0,$$

а $q_v=t=0$. Поэтому из уравнений (*) и (**) получается

$$\alpha_v\gamma-2\beta_v(s+\beta)+\gamma_v\frac{(s+\beta)^2-\delta}{\gamma}+\delta_v\geqslant 0. \qquad (***)$$

Выражения α_v, β_v, γ_v и δ_v содержат вторые производные z линейно и притом только s и r, а $t=0$. Таким образом, выражение

$$\alpha_v\gamma-2\beta_v(s+\beta)+\delta_v$$

при больших s имеет порядок не больше чем s^2.

Что касается предпоследнего члена неравенства, то здесь существенно заметить следующее:

$$\gamma_v=cc_us+\dots,$$

где не выписаны члены, не содержащие s. Так как на границе шапки $\tilde{\omega}'$ имеем $c_u=-\varkappa_0$, где $\varkappa_0$ — геодезическая кривизна края, то при малом u_0 можно считать, что $c_u<-\varkappa_0/2$. В таком случае величина

$$\gamma_v\,\frac{(s+\beta)^2-\delta}{\gamma}$$

при большом s имеет порядок $-\varkappa_0s^3/4\gamma$. В точке касания $\gamma>0$, так как $t+\gamma>0$, а $t=0$. Умножая теперь неравенство (***) на γ, получим

$$-\frac{\varkappa_0s^3}{4}+O(s^2)\geqslant 0,$$

где $O(s^2)$ обозначает выражение второй степени относительно s с ограниченными коэффициентами. Отсюда следует существование априорной оценки для $q_u=s$ в точке касания, а следовательно и на границе $\tilde{\omega}'$, где она имеет не большее значение.

Остается получить оценку производной r. Эту оценку мы можем получить из самого уравнения (*), если сумеем оценить снизу коэффициент γ положительным числом. Действительно, на границе шапки

$$r=-\alpha+\frac{(s+\beta)^2-\delta}{\gamma}.$$

Так как на границе шапки $\tilde{\omega}'$

$$\gamma=cc_up,\quad c=1,\quad c_u=-\varkappa_0,$$

то для оценки γ остается оценить снизу p. Эта оценка получается так же, как и в случае евклидова пространства. Таким образом, мы доказали существование априорных оценок вторых производных на границе шапки $\tilde{\omega}'$. Существование оценок вторых производных на поверхности всей шапки $\tilde{\omega}'$ будет доказано ниже. В предположении, что такие оценки получены, продолжим доказательство теоремы для случая поверхности с аналитической метрикой.

Установление априорных оценок для решения уравнения $(\ast)$ позволяет утверждать существование аналитической шапки $\tilde{\omega}'$, изометричной ω'. Пусть область ω' расширяется и переходит в ω. При этом, не ограничивая общности, можно считать, что шапки $\tilde{\omega}'$ сходятся к некоторой шапке $\tilde{\omega}$, изометричной ω.

Остается доказать, что свойство аналитичности шапки $\tilde{\omega}'$ сохраняется при переходе к пределу $\omega' \to \omega$. Это действительно так, и оно вытекает из возможности установить равномерные относительно предельного перехода априорные оценки для производных функции z любого порядка на множестве точек $\tilde{\omega}'$, удаленных от плоскости края на расстояние, большее $\varepsilon > 0$. Установление таких оценок будет дано дальше.

Таким образом, для завершения доказательства теоремы нам остается:

1) установить априорные оценки для производных r, s, t на всей шапке $\tilde{\omega}'$ в предположении, что оценки для этих величин получены на границе шапки;

2) установить априорные оценки для производных z на некотором удалении от плоскости края шапки $\tilde{\omega}'$ без каких-либо предположений о геометрии края.

Доказательство теоремы в случае k раз дифференцируемой метрики поверхности F получается с помощью аналитического приближения метрики шапки и предельным переходом, как в евклидовом случае.

Для того чтобы оценить вторые производные z решения уравнения $(\ast)$, достаточно оценить нормальную кривизну k_n шапки $\tilde{\omega}'$. Действительно,

$$k_n = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}.$$

Если $|k_n| \leqslant C$, то

$$|L| \leqslant CE, \quad |N| \leqslant CG, \quad |M| \leqslant \frac{C}{2}(E + 2|F| + G).$$

Отсюда, принимая во внимание выражения для L, M, N, приведенные выше, получаем оценки для r, s, t — вторых производных z по u, v.

Оценку для нормальной кривизны шапки $\tilde{\omega}'$ мы получим сначала на границе шапки. Так как оценки для производных на границе шапки получены, то для того, чтобы оценить нормальную кривизну, достаточно установить оценку снизу выражения

$$Q = \left(\frac{(E - z_u^2)(G - z_v^2) - (F - z_u z_v)^2}{EG - F^2}\right)^{1/2},$$

которое стоит в знаменателе коэффициентов второй квадратичной формы L, M, N. Это выражение имеет простой геометрический смысл и представляет собой косинус угла, который образует нормаль шапки с перпендикуляром, опущенным на ее основание. Вдоль края шапки это косинус угла между касательной плоскостью шапки и плоскостью ее основания.

В § 7 гл. II получена оценка снизу для величины Q в случае евклидовых шапок. Этот способ установления оценки почти дословно переносится на случай шапок в пространстве Лобачевского. Поэтому можно считать установленным существование положительной оценки снизу для Q, а следовательно, и оценки сверху для нормальной кривизны шапки $\tilde{\omega}'$ вдоль ее края.

Переходим к получению оценки для нормальной кривизны на поверхности всей шапки $\tilde{\omega}'$ в предположении существования такой оценки на краю шапки. Обозначим $\vartheta(X)$ меньший из углов, образуемых нормалью шапки в точке X и перпендикуляром, опущенным из этой точки на плоскость основания шапки. Максимальную из нормальных кривизн в точке X обозначим $\bar{\varkappa}(X)$ и рассмотрим функцию

$$\bar{w}(X) = \frac{\bar{\varkappa}(X)}{(\cos\vartheta(X))^{\mu}},$$

где μ — положительная постоянная, которую мы определим позже. Очевидно, чтобы оценить нормальную кривизну шапки, достаточно оценить функцию $\bar{w}(X)$.

Функция $\bar{w}(X)$ на поверхности шапки $\tilde{\omega}'$ достигает абсолютного максимума в некоторой точке X_0. При этом могут представиться два случая:

1. Точка X_0 принадлежит краю шапки.
2. Точка X_0 является внутренней точкой шапки.

В первом случае для функции $\bar{w}$ оценка получается очевидным образом, так как мы имеем оценку сверху нормальной кривизны на краю шапки и оценку снизу для величины $\cos\vartheta$.

Таким образом, нам остается только оценить $\bar{w}$ во втором случае, когда точка X_0, в которой максимум $\bar{w}$ достигается, является внутренней точкой шапки.

Введем в окрестности точки X_0 на поверхности шапки $\tilde{\omega}'$ полугеодезическую координатную сеть u, v, приняв за линию u геодезическую, проходящую через точку X_0 в направлении максимальной нормальной кривизны, а за линию v — перпендикулярную геодезическую. В качестве параметров u и v возьмем дуги этих геодезических. При этом линейный элемент шапки примет вид

$$ds^2 = du^2 + c^2 dv^2,$$

В точке X_0 имеем $c=1$, $c_u=c_v=0$, $c_{uu}=-K$. $c_{uv}=0$, $c_{vv}=0$, K — гауссова кривизна шапки в точке X_0.

Обозначим теперь $\varkappa(X)$ нормальную кривизну шапки в точке X в направлении u и введем в рассмотрение функцию

$$w(X)=\frac{\varkappa(X)}{(\cos\vartheta(X))^{\mu}}.$$

Так как $\varkappa(X)\leqslant\bar{\varkappa}(X)$, а $\varkappa(X_0)=\bar{\varkappa}(X_0)$, то функция $w(X)$ тоже достигает максимума в точке X_0, и наша задача сводится к оценке $w(X)$ в точке X_0.

Чтобы несколько упростить предстоящие выкладки, мы возьмем в качестве плоскости $z=0$ не плоскость основания шапки, как это было до сих пор, а касательную плоскость шапки в точке X_0. При этом уравнение изгибания, сохраняя свою форму, значительно упрощается в самой точке X_0, так как в этой точке $z=0$, $p=0$, $q=0$, а следовательно, $\alpha=\beta=\gamma=0$.

Принимая во внимание выражение для L:

$$L=\frac{1}{Q}(r+\alpha),\quad \alpha=-(1-p^2)\operatorname{th}z,\quad Q=\left(1-p^2-\frac{q^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

и то, что $E=1$, будем иметь

$$\varkappa(X)=\frac{r-(1-p^2)\operatorname{th}z}{\left(1-p^2-\frac{q^2}{c^2}\right)^{1/2}}.$$

Заметим, что нормальная кривизна в направлении v равна

$$\varkappa'(X)=\frac{t+\gamma}{c^2\left(1-p^2-\frac{q^2}{c^2}\right)^{1/2}}.$$

И так как в точке X_0 имеем $\varkappa'\leqslant\varkappa$, $\alpha=\gamma=0$, $c=1$, то в этой точке $t\leqslant r$. Кроме того, в точке X_0 коэффициент $M=0$, а следовательно, $s=0$.

Обратимся теперь к уравнению изгибания

$$(r+\alpha)(t+\gamma)-(s+\beta)^2+\delta=0, \tag{$*$}$$

$$\alpha=-(1-p^2)\operatorname{th}z,\quad \beta=pq\operatorname{th}z-\frac{c_u}{c}q,$$

$$\gamma=-(c^2-q^2)\operatorname{th}z+cc_up-\frac{c_v}{c}q,\quad \delta=-(1+K)(c^2-c^2p^2-q^2).$$

В точке X_0 имеем $c=1$, $c_u=1$, $c_u=c_v=0$, $c_{uv}=c_{vv}=0$, $c_{uu}=-K$, $z=0$, $p=q=0$, $s=0$. Отсюда следует, что в этой точке

$$\alpha=0,\qquad \beta=0,\qquad \gamma=0,\qquad \delta=-(1+K),$$

$$\alpha_u=0,\qquad \beta_u=0,\qquad \gamma_u=0,\qquad \delta_u=-K_u,$$

$$\alpha_{uu}=-r,\quad \beta_{uu}=0,\quad \gamma_{uu}=-r(1+2K),$$

$$\delta_{uu}=-K_{uu}+2K(1+K)-2r^2(1+K).$$

Уравнение изгибания в точке X_0 принимает вид

$$rt+\delta=0.$$

Дифференцируя уравнение (*) по u, в точке X_0 будем иметь

$$r_u t+t_u r+\delta_u=0.$$

Отсюда для t_u в точке X_0 получается выражение

$$t_u=-\frac{1}{r}(\delta_u+r_u t).$$

Дифференцируя уравнение (*) по u дважды, в точке X_0 получим

$$(r_{uu}+\alpha_{uu})(t+\gamma)-2(s_{uu}+\beta_{uu})(s+\beta)+(t_{uu}+\gamma_{uu})(r+\alpha)+$$
$$+2(r_u+\alpha_u)(t_u+\gamma_u)-2(s_u+\beta_u)^2+\delta_{uu}=0.$$

Или, подставляя сюда значения производных коэффициентов α, β, γ, δ в точке X_0, будем иметь

$$r_{uu}t+r_{vv}r+2r_u t_u-2s_u^2+\alpha_{uu}t+\gamma_{uu}r+\delta_{uu}=0.$$

Положим для краткости

$$\lambda=\frac{1}{(\cos\vartheta)^{\mu}}.$$

Тогда

$$w=\lambda\frac{r-(1-p^2)\operatorname{th}z}{\left(1-p^2-\frac{q^2}{c^2}\right)^{1/2}},$$

откуда

$$r=\frac{w}{\lambda}\left(1-p^2-\frac{q^2}{c^2}\right)^{1/2}+(1-p^2)\operatorname{th}z.$$

Так как в точке X_0 имеем $w_u=0$, $w_v=0$, то в этой точке

$$r_u=w\left(\frac{1}{\lambda}\right)_u,\quad r_v=w\left(\frac{1}{\lambda}\right)_v,$$

$$r_{uu}=\frac{w_{uu}}{\lambda}+w\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{uu}-\frac{w}{\lambda}r^2+r,$$

$$r_{vv}=\frac{w_{vv}}{\lambda}+w\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{vv}-\frac{w}{\lambda}t^2+t.$$

Подставим в уравнение, полученное двукратным дифференцированием по u уравнения (*), выражения для производных r_u, r_v, r_{uu}, r_{vv}. Тогда после простых преобразований получим

$$\left(\frac{w_{uu}}{\lambda}+w\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{uu}\right)t+\left(\frac{w_{vv}}{\lambda}+w\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{vv}\right)r-\frac{2w^2t}{r}\left(\frac{1}{\lambda}\right)_u^2-2w^2\left(\frac{1}{\lambda}\right)_v^2+$$
$$+\frac{2w}{r}K_u\left(\frac{1}{\lambda}\right)_u+Ar^2+2Br+C=0,$$

где A, B, C — ограниченные выражения, зависящие только от кривизны K и ее производных до второго порядка. Замечая, что

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{uu} - 2\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right)_u^2 = -\frac{\lambda_{uu}}{\lambda^2}, \qquad \left(\frac{1}{\lambda}\right)_{vv} - 2\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right)_v^2 = -\frac{\lambda_{vv}}{\lambda^2},$$

мы можем преобразовать наше уравнение к виду

$$\frac{1}{\lambda}(w_{uu}t + w_{vv}r) - (1+K)\frac{\lambda_{uu}}{\lambda} - r^2\frac{\lambda_{vv}}{\lambda} + 2K_u\frac{\lambda_u}{\lambda} + O(r^2) = 0,$$

где $O(r^2)$ — квадратный трехчлен относительно r с ограниченными коэффициентами.

Так как w достигает в точке X_0 максимума и, следовательно, $w_{uu} \leqslant 0$, $w_{vv} \leqslant 0$, то

$$-(1+K)\frac{\lambda_{uu}}{\lambda} - r^2\frac{\lambda_{vv}}{\lambda} + 2K_u\frac{\lambda_u}{\lambda} + O(r^2) \geqslant 0.$$

Это неравенство в дальнейшем будем называть *основным*.

Займемся теперь вычислением производных λ. Если обозначить через h расстояние произвольной точки шапки $\tilde{\omega}'$ от плоскости ее основания, то

$$\lambda = \frac{1}{\Delta^{\mu}}, \qquad \Delta = 1 - h_u^2 - \frac{h_v^2}{c^2}.$$

Отсюда видно, что интересующие нас производные λ выражаются через производные h до третьего порядка. В связи с этим мы начнем с вычисления этих производных.

Так как коэффициенты L, M, N второй квадратичной формы поверхности не зависят от выбора плоскости $z=0$, то должны иметь место равенства

$$\frac{r - (1-p^2)\,\mathrm{th}\, z}{\left(1 - p^2 - \frac{q^2}{c^2}\right)^{1/2}} = -\frac{h_{uu} - (1-h_u^2)\,\mathrm{th}\, h}{\left(1 - h_u^2 - \frac{h_v^2}{c^2}\right)^{1/2}},$$

$$\frac{s + pq\,\mathrm{th}\, z - \frac{c_u}{c}q}{\left(1 - p^2 - \frac{q^2}{c^2}\right)^{1/2}} = -\frac{h_{uv} + h_u h_v\,\mathrm{th}\, h - \frac{c_u}{c}h_v}{\left(1 - h_u^2 - \frac{h_v^2}{c^2}\right)^{1/2}}.$$

$$\frac{t - (c^2 - q^2)\,\mathrm{th}\, z + cc_u p - \frac{c_v}{c}q}{\left(1 - p^2 - \frac{q^2}{c^2}\right)^{1/2}} = -\frac{h_{vv} - (c^2 - h_v^2)\,\mathrm{th}\, h + cc_u h_u - \frac{c_v}{c}h_v}{\left(1 - h_u^2 - \frac{h_v^2}{c^2}\right)^{1/2}}.$$

Отсюда для вторых производных функции h в точке X_0 получаются следующие выражения:

$$h_{uu}=(1-h_u^2)\operatorname{th}h-r(1-h_u^2-h_v^2)^{1/2},$$
$$h_{uv}=-h_uh_v\operatorname{th}h-s(1-h_u^2-h_v^2)^{1/2},$$
$$h_{vv}=(1-h_v^2)\operatorname{th}h-t(1-h_u^2-h_v^2)^{1/2}.$$

Так как в точке X_0 имеем $s=0$, а $rt=1+K$, то при больших r

$$h_{uu}=-r\Delta^{1/2}+\ldots,\quad h_{uv}=0+\ldots,\quad h_{vv}=0+\ldots,$$

где не выписаны члены, имеющие порядок $O(1)$.

Дифференцируя $1/\lambda$ по u и v, в точке X_0 получим

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)_u=2\mu\Delta^{\mu-1/2}h_ur+\ldots,\qquad \left(\frac{1}{\lambda}\right)_v=0+\ldots,$$

где выписаны только главные по r члены.

Вычислим теперь главную часть (по r) третьих производных h_{uuu}, h_{uuv}. Имеем

$$h_{uuu}=-r_u\Delta^{1/2}+r\Delta^{-1/2}h_uh_{uu}+\ldots,$$
$$r_u=w\left(\frac{1}{\lambda}\right)_u=2\mu\lambda h_u\Delta^{\mu-1/2}r^2+\ldots$$

Следовательно,

$$h_{uuu}=-(2\mu+1)h_ur^2+\ldots,$$

где не выписаны члены порядка ниже r^2.

Аналогично

$$h_{uuv}=-r_v\Delta^{1/2}+\ldots,\qquad r_v=w\left(\frac{1}{\lambda}\right)_v=0+\ldots$$

Таким образом,

$$h_{uuv}=0+\ldots,$$

не выписаны члены порядка ниже r^2.

Теперь мы можем найти главную часть производной λ_{uu}. Имеем

$$\lambda_{uu}=\left(\frac{1}{\Delta^{\mu}}\right)_{uu}=\mu(\mu+1)\Delta^{-\mu-2}\Delta_u^2-\mu\Delta^{-\mu-1}\Delta_{uu}=$$
$$=4\mu(\mu+1)\Delta^{-\mu-2}(h_uh_{uu})^2+2\mu\Delta^{-\mu-1}(h_{uu}^2+h_uh_{uuu})+\ldots$$

Отсюда

$$\lambda_{uu}=2\mu\Delta^{-\mu}r^2+2\mu\Delta^{-\mu-1}h_u^2r^2+\ldots,$$

где не выписаны члены порядка ниже r^2.

Займемся теперь производной λ_{vv}. В связи с этим сначала вычислим соответствующие производные h. Заметим, что в точке X_0

$$h_{uu} = -\Delta^{1/2} r + O(1),$$
$$h_{uv} = -h_u h_v \operatorname{th} h,$$
$$h_{vv} = (1 - h_v^2) \operatorname{th} h + O\left(\frac{1}{r}\right).$$

Имеем

$$h_{vvu} = \left((1 - h_v^2) \operatorname{th} h\right)_u - t_u \Delta^{1/2} + t\Delta^{-1/2} h_u h_{uu} + K h_u + O\left(\frac{1}{r}\right),$$
$$-t_u \Delta^{1/2} = 2\mu h_u (1 + K) + O\left(\frac{1}{r}\right),$$
$$t\Delta^{-1/2} h_u h_{uu} = -(1 + K) h_u + O\left(\frac{1}{r}\right),$$
$$\left((1 - h_v^2) \operatorname{th} h\right)_u = -2h_v h_{uv} \operatorname{th} h + (1 - h_v^2) \frac{h_u}{\operatorname{ch}^2 h} =$$
$$= 2h_u h_v^2 \operatorname{th}^2 h + (1 - h_v^2)(1 - \operatorname{th}^2 h) h_u.$$

Отсюда

$$h_u h_{vvu} = 2h_u^2 h_v^2 \operatorname{th}^2 h + (1 - h_v^2)(1 - \operatorname{th}^2 h) h_u^2 +$$
$$+ 2\mu h_u^2 (1 + K) - h_u^2 + O\left(\frac{1}{r}\right).$$

Следовательно, при достаточно большом μ

$$h_u h_{vvu} = (*)^2 + O\left(\frac{1}{r}\right),$$

где через $(*)^2$ обозначено неотрицательное выражение.

Вычислим теперь $h_v h_{vvv}$. Имеем

$$h_{vvv} = \left((1 - h_v^2) \operatorname{th} h\right)_v - t_v \Delta^{1/2} + O\left(\frac{1}{r}\right),$$
$$t_v = -\frac{1}{r}(\delta_v + r_v t) + O\left(\frac{1}{r}\right),$$
$$\left((1 - h_v^2) \operatorname{th} h\right)_v = -2h_v(1 - h_v^2) \operatorname{th}^2 h + (1 - h_v^2)(1 - \operatorname{th}^2 h) h_v + O\left(\frac{1}{r}\right).$$

Отсюда

$$h_v h_{vvv} = h_v^2 (1 - h_v^2)(1 - 3\operatorname{th}^2 h) + O\left(\frac{1}{r}\right).$$

И так как высота шапки $\tilde{\omega}'$ мала, то

$$h_v h_{vvv} = (*)^2 + O\left(\frac{1}{r}\right).$$

Обратимся теперь к производной λ_{vv}. Имеем

$$\lambda_{vv} = \mu(\mu+1)\Delta^{-\mu-2}\Delta_v^2 - \mu\Delta^{-\mu-1}\Delta_{vv} =$$
$$= 4\mu(\mu+1)\Delta^{-\mu-2}(h_u h_{uv} + h_v h_{vv})^2 +$$
$$+ 2\mu\Delta^{-\mu-1}(h_{uv}^2 + h_{vv}^2 + h_u h_{vvu} + h_v h_{vvv}).$$

Отсюда, принимая во внимание выражения для $h_u h_{vvu}$ и $h_v h_{vvv}$, заключаем, что

$$\lambda_{vv} = (*)^2 + O\left(\frac{1}{r}\right).$$

Подставляя теперь найденные выражения для производных λ в основное неравенство, получим

$$-2\mu(1+K)r^2 + Ar^2 + O(r) \geqslant 0,$$

где A ограничено сверху некоторой постоянной A_0, зависящей от кривизны поверхности и ее производных, а $O(r)$ имеет порядок r. Умножая неравенство на λ^2, получим

$$-2\mu(K+1)w^2 + Aw^2 + O(w) \geqslant 0.$$

Пусть μ, кроме условий, которым оно было подчинено в ходе предыдущих рассуждений, удовлетворяет неравенству

$$-2\mu(K+1) + A_0 < 1.$$

Тогда из нашего неравенства получается

$$-w^2 + O(w) \geqslant 0.$$

Отсюда следует, что w не может быть слишком большим, что и доказывает существование для него оценки w_0.

Оценка для w является вместе с тем оценкой для нормальной кривизны $\varkappa$, так как

$$\varkappa(x) = w(\cos\vartheta)^\mu \leqslant w.$$

Установлением априорных оценок для нормальных кривизн закончено доказательство существования аналитической шапки $\tilde{\omega}'$, изометричной области ω' на шапке ω. Пусть теперь область ω' расширяется и переходит в ω. Тогда в силу однозначной определенности шапок в классе шапок поверхность $\tilde{\omega}'$ сходится к выпуклой шапке $\tilde{\omega}$, равной ω. Не ограничивая общности, можно считать, что этой шапкой является сама ω.

Для того чтобы заключить об аналитичности $\tilde{\omega}$, достаточно в окрестности произвольной ее точки установить равномерные оценки производных до четвертого порядка функций z, задающих сходящиеся к $\tilde{\omega}$ шапки $\tilde{\omega}'$. Действительно, как и в случае евклидовых шапок отсюда следует трехкратная дифференцируемость

предельной шапки $\tilde{\omega}$. А по теореме С. Н. Бернштейна об аналитичности решений уравнений эллиптического типа в применении к уравнению изгибания отсюда вытекает аналитичность $\tilde{\omega}$. Как и в евклидовом случае, установление оценок третьих и четвертых производных, после того как оценки вторых производных найдены, получается из общих соображений, применяемых к уравнению изгибания. Таким образом, задача состоит в установлении оценок первых и вторых производных для функций z, задающих шапки $\tilde{\omega}'$. Первые производные оцениваются тривиальным образом. А чтобы оценить вторые производные, мы оценим сначала нормальную кривизну.

Сместим плоскость σ основания шапки ω в положение σ'' так, чтобы она отсекала от ω шапку ω'' с краем, лежащим вне плоскости σ. При достаточной близости $\tilde{\omega}'$ к $\tilde{\omega} \equiv \omega$ плоскость σ'' отсекает от $\tilde{\omega}'$ шапку $\tilde{\omega}''$, причем касательные плоскости вдоль ее края образуют с плоскостью σ'' углы, меньшие $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Это свойство для нас существенно. Чтобы не вводить новых обозначений, мы будем предполагать, что им обладают шапки $\tilde{\omega}'$. Итак, пусть касательные плоскости шапок $\tilde{\omega}'$ образуют с плоскостью основания σ углы, меньшие $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$, причем $\varepsilon > 0$ и оно одно и то же для всех шапок $\tilde{\omega}'$, достаточно близких к ω.

Сохраняя введенные выше обозначения, будем рассматривать вспомогательную функцию

$$\bar{w}(X) = \frac{h(X)\bar{\varkappa}(X)}{(\cos\vartheta(X))^{\mu}},$$

где h — расстояние точки X шапки $\tilde{\omega}'$ от плоскости основания σ. Эта функция неотрицательна, обращается в нуль на краю шапки, а следовательно, достигает абсолютного максимума в некоторой внутренней точке X_0. Вводя полугеодезическую систему координат на поверхности шапки в окрестности точки X_0, рассмотрим функцию

$$w(X) = \frac{h(X)\varkappa(X)}{(\cos\vartheta(X))^{\mu}}.$$

Она также достигает максимума в точке X_0. Полагая

$$\lambda = \frac{h}{(\cos\vartheta)^{\mu}},$$

дословно повторяем предыдущие рассуждения вплоть до установления основного неравенства

$$-(1+K)\frac{\lambda_{uu}}{\lambda} - r^2\frac{\lambda_{vv}}{\lambda} + 2K_u\frac{\lambda_u}{\lambda} + O(r^2) \geqslant 0.$$

Затем последовательно находим выражения для h_{uu}, h_{uv}, h_{vv}, h_{uuu}, h_{uuv}. Имеем

$$\lambda_{uu} = 2h\mu\Delta^{-\mu}r^2 + 2h\mu\Delta^{-\mu-1}h_u^2 r^2 + \ldots,$$

где не выписана подчиненная по порядку величины относительно r часть λ_{uu}.

Несколько подробнее мы рассмотрим выражение λ_{vv}. Имеем

$$\lambda_{vv} = \left(\frac{h}{\Delta^{\mu}}\right)_{vv} = \frac{h_{vv}}{\Delta^{\mu}} + 2h_v(-\mu)\Delta^{-\mu-1}\Delta_v + h\left(\frac{1}{\Delta}\right)_{vv}.$$

В точке X_0

$$h_{vv} = (1 - h_v^2)\operatorname{th} h - t\Delta^{\frac{1}{2}}, \quad \text{а} \quad t = \frac{1}{r}(K+1).$$

Следовательно,

$$\frac{h_{vv}}{\Delta^{\mu}} = (*)^2 + O\left(\frac{1}{r}\right).$$

Далее,

$$\Delta_v\big|_{X_0} = -h_u h_{uv} - h_v h_{vv}.$$

Поэтому

$$2h_v(-\mu)\Delta^{-\mu-1}\Delta_v = 2\mu\Delta^{-\mu-1}(1 - h_u^2 - h_v^2)h_v^2 \operatorname{th} h + O\left(\frac{1}{r}\right) = \\ = (*)^2 + O\left(\frac{1}{r}\right)$$

Что касается $(1/\Delta^{\mu})_{vv}$, то уже было показано, что в точке X_0

$$\left(\frac{1}{\Delta^{\mu}}\right)_{vv} = (*)^2 + O\left(\frac{1}{r}\right).$$

Таким образом,

$$\lambda_{vv} = (*)^2 + O\left(\frac{1}{r}\right).$$

Подставляя теперь в основное неравенство выражения для λ_{uu} и λ_{vv} и переходя от r к w, получим

$$-2\mu(K+1)w^2 + Aw^2 + O(w) \geqslant 0.$$

Отсюда заключаем о существовании оценки для w: $w \leqslant w_0$.

Если теперь рассматриваемая окрестность точки $\tilde{X}$ удалена от плоскости основания σ на расстояние, не меньшее $\tilde{h} > 0$, то для нормальных кривизн шапки в этой окрестности получается

оценка

$$\varkappa \leqslant \frac{w_0 (\cos\vartheta)^\mu}{\tilde{h}} \leqslant \frac{w_0}{\tilde{h}},$$

что и требовалось доказать.

Как следствие теоремы 1 и теоремы А. Д. Александрова о реализуемости гомеоморфного сфере многообразия кривизны, не меньшей K, замкнутой выпуклой поверхностью в пространстве Лобачевского кривизны K получается следующая теорема.

Теорема 2. *Заданная на сфере регулярная метрика с кривизной, всюду большей K, реализуется регулярной выпуклой поверхностью в пространстве Лобачевского кривизны K. Если метрика принадлежит классу C^n, $n \geqslant 5$, то поверхность принадлежит классу C^{n-1}. Если метрика аналитическая, то поверхность аналитическая.*

Глава VI

Выпуклые поверхности в римановом пространстве

В 1916 г. Г. Вейль поставил следующую проблему [26].

Пусть на сфере или многообразии, гомеоморфном сфере, задана риманова метрика линейным элементом

$$ds^2 = g_{ij}\,du^i\,du^j.$$

Пусть гауссова кривизна многообразия, вычисленная по обычной формуле дифференциальной геометрии через коэффициенты g_{ij} его линейного элемента, положительна. Спрашивается, существует ли замкнутая поверхность в евклидовом пространстве и такая ее параметризация u^i (система параметризаций), при которой линейный элемент поверхности совпадал бы с заданным (ds^2)? Или, что то же самое, существует ли изометрическое погружение заданного двумерного риманова многообразия в трехмерное евклидово пространство?

Эта проблема принципиально была решена самим Вейлем в цитированной работе. Во всяком случае, в работе содержится описание основных этапов решения проблемы. В этом плане оно было завершено Г. Леви [43] (см. также [52]). Окончательный результат гласит: двумерное замкнутое, гомеоморфное сфере риманово многообразие с аналитической метрикой и положительной гауссовой кривизной допускает изометрическое погружение в евклидово пространство в виде замкнутой аналитической поверхности.

Новое решение проблемы Вейля получается из теоремы А. Д. Александрова о реализации метрики положительной кривизны, заданной на гомеоморфном сфере многообразии, выпуклой поверхностью и из теоремы о регулярности выпуклой поверхности с регулярной метрикой (§ 10 гл. II). Теорема А. Д. Александрова о реализации метрики с гауссовой кривизной, большей K, выпуклой поверхностью в пространстве постоянной кривизны K и теорема о регулярности выпуклой поверхности с регулярной метрикой дают решение проблемы Вейля для случая пространств постоянной кривизны (§§ 7 и 8 гл. V).

В связи с этими результатами автором была поставлена и решена проблема изометрического погружения гомеоморфного

сфере риманова многообразия в общее трехмерное риманово пространство [63, 58]. Изложение полученного результата составляет основное содержание настоящей главы.

Кроме этого основного вопроса, в данной главе рассматривается проблема бесконечно малых изгибаний регулярных замкнутых выпуклых поверхностей в трехмерном римановом пространстве. Доказывается существование априорных оценок для нормальных кривизн замкнутой выпуклой поверхности в зависимости от величин, характеризуемых только метрикой поверхности и метрикой пространства.

В § 11 теорема об изометрическом погружении применяется для решения одного вопроса, поставленного Кон-Фоссеном, об изометрических преобразованиях пунктированной выпуклой поверхности (поверхности с проколами) в евклидовом пространстве.

§ 1. Поверхности в римановом пространстве

В трехмерном римановом пространстве может быть построена теория кривых и поверхностей, во многом напоминающая теорию кривых и поверхностей евклидова пространства. В настоящем параграфе мы напомним некоторые факты этой теории, необходимые для дальнейшего. Более подробное изложение читатель может найти в книге Э. Картана [38].

Пусть в трехмерном римановом пространстве R с линейным элементом

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

дана регулярная поверхность F: $x^i = x^i(u^1, u^2)$, где u^1, u^2 — координаты на поверхности. Обозначая $x(u^1, u^2)$ точку поверхности с координатами u^1, u^2, будем употреблять для уравнений поверхности сокращенную запись

$$x = x(u^1, u^2).$$

Подобно тому как для поверхностей евклидова пространства, будем рассматривать две квадратичные дифференциальные формы, связанные с поверхностью:

$$\begin{gathered} \mathrm{I} = (dx)^2 = \tilde{g}_{ij}\, du^i\, du^j, \\ \mathrm{II} = -dx \cdot Dn = \lambda_{ij}\, du^i\, du^j, \end{gathered}$$

где знаком D обозначено абсолютное дифференцирование в пространстве, n — единичный вектор нормали к поверхности *).

*) Под абсолютным дифференциалом Da вектора a мы будем понимать главную часть разности между вектором $a(x+dx)$, параллельно перенесенным в точку x, и вектором $a(x)$.

Первая квадратичная форма поверхности является ее линейным элементом.

Для поверхностей в трехмерном римановом пространстве может быть определено понятие нормальной кривизны в данном направлении как нормальной кривизны этой поверхности в соприкасающемся евклидовом пространстве. При этом для нее получается обычная формула

$$\varkappa = \frac{\lambda_{ij}\, du^i\, du^j}{\tilde{g}_{ij}\, du^i\, du^j}.$$

На поверхности риманова пространства определяется понятие главных направлений как направлений, в которых нормальная кривизна достигает экстремальных значений. Главные направления находятся по обычным формулам с помощью коэффициентов первой и второй квадратичных форм. Для абсолютного дифференцирования вдоль главного направления имеет место формула Родрига

$$Dn = -\varkappa\, dx,$$

где $\varkappa$ — нормальная кривизна в этом направлении.

Для поверхностей в римановом пространстве определяется понятие внешней (полной) кривизны K_e как кривизны в соприкасающемся евклидовом пространстве. Определяемая таким образом внешняя кривизна вычисляется по обычной формуле

$$K_e = \frac{\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2}{\tilde{g}_{11}\tilde{g}_{22} - \tilde{g}_{12}^2}.$$

В отличие от поверхностей евклидова пространства внешняя кривизна поверхности риманова пространства не равна внутренней (гауссовой) кривизне K_i и отличается от нее на кривизну K_R пространства в направлении двумерной площадки, касающейся поверхности, т. е. $K_e = K_i - K_R$.

Для поверхностей риманова пространства можно составить формулы, аналогичные деривационным формулам Гаусса — Вейнгартена в случае поверхностей евклидова пространства.

Касательные векторы поверхности в точке x

$$x_1 = \frac{\partial x}{\partial u^1}, \qquad x_2 = \frac{\partial x}{\partial u^2}$$

и единичный вектор n нормали к поверхности образуют базис. Поэтому любой вектор в точке x допускает представление в виде линейной комбинации векторов x_1, x_2 и n. В частности,

$$\begin{aligned} D_i x_j &= A_{ij}^k x_k + a_{ij} n, \\ D_i n &= B_i^k x_k + b_i n, \end{aligned} \qquad (*)$$

где знаком D_i обозначается абсолютное дифференцирование в пространстве по u^i.

Коэффициенты этих формул находятся так же, как в случае евклидова пространства. Именно, умножая скалярно первое равенство на n и принимая во внимание, что

$$n^2=1, \qquad nx_j=0,$$
$$nD_ix_j=D_i(nx_j)-x_jD_in=\lambda_{ij},$$

получаем $a_{ij}=\lambda_{ij}$.

Далее, умножая скалярно первое равенство на вектор x_α ($\alpha=1, 2$) и замечая, что

$$x_kx_\alpha=\tilde{g}_{k\alpha}, \qquad D_ix_j=D_jx_i,$$

получаем

$$\tilde{\Gamma}_{i\alpha j}=A^k_{ij}\tilde{g}_{k\alpha},$$

где $\tilde{\Gamma}_{i\alpha j}$ — символы Христоффеля первого рода для поверхности:

$$\tilde{\Gamma}_{i\alpha j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\tilde{g}_{i\alpha}}{\partial u^j}+\frac{\partial\tilde{g}_{\alpha j}}{\partial u^i}-\frac{\partial\tilde{g}_{ij}}{\partial u^\alpha}\right).$$

Умножая полученное равенство на $\tilde{g}^{\alpha\beta}$ и суммируя по α, находим

$$A^\beta_{ij}=\tilde{\Gamma}^\beta_{ij},$$

где $\tilde{\Gamma}^\beta_{ij}$ — символы Христоффеля второго рода для поверхности.

Умножая второе из равенств (*) на n скалярно, находим $b_i=0$.

Умножая второе из равенств (*) на x_α и замечая, что

$$x_\alpha D_in=-\lambda_{i\alpha},$$

получим

$$-\lambda_{i\alpha}=B^k_i\tilde{g}_{k\alpha}.$$

Если теперь это равенство умножить на $\tilde{g}^{\alpha\beta}$ и просуммировать по α, то найдем

$$B^\beta_i=-\lambda_{i\alpha}\tilde{g}^{\alpha\beta}.$$

Таким образом, для поверхностей в римановом пространстве имеет место следующая система деривационных формул:

$$\begin{aligned} D_ix_j&=\tilde{\Gamma}^k_{ij}x_k+\lambda_{ij}n,\\ D_in&=-\lambda_{i\alpha}\tilde{g}^{\alpha k}x_k. \end{aligned} \tag{**}$$

Коэффициенты этих формул выражаются через коэффициенты первой и второй квадратичных форм точно так же, как и

для поверхностей евклидова пространства. В этом нет ничего удивительного, так как формулы (**) представляют собой обычные деривационные формулы для поверхности в соприкасающемся евклидовом пространстве.

Основными уравнениями теории поверхностей в евклидовом пространстве обычно называют формулу Гаусса и уравнения Петерсона — Кодацци. Аналогичные уравнения можно получить для поверхностей риманова пространства. Мы будем называть их основными уравнениями теории поверхностей в римановом пространстве.

Вычислим выражение

$$\omega_{ij\alpha}=(D_iD_j-D_jD_i)\,x_\alpha.$$

Для этого введем в пространстве в окрестности рассматриваемой поверхности полугеодезическую систему координат v^i. Именно, в качестве координат v^i произвольной точки пространства, близкой к поверхности, мы примем взятое со знаком расстояние (v^3) точки от поверхности и координаты u^1, u^2 основания геодезического перпендикуляра, опущенного на поверхность (v^1, v^2). При такой параметризации пространства векторы x_1, x_2 и n совпадают с векторами e_1, e_2, e_3 локального базиса, определяемого параметризацией пространства.

Имеем

$$D_je_\alpha=\Gamma^k_{j\alpha}e_k,$$

$$D_iD_je_\alpha=\left(\frac{\partial\Gamma^\beta_{j\alpha}}{\partial v^i}+\Gamma^k_{j\alpha}\Gamma^\beta_{ik}\right)e_\beta.$$

Отсюда

$$\omega_{ij\alpha}=(D_iD_j-D_jD_i)\,e_\alpha=\left(\frac{\partial\Gamma^\beta_{j\alpha}}{\partial v^i}-\frac{\partial\Gamma^\beta_{i\alpha}}{\partial v^j}+\Gamma^k_{j\alpha}\Gamma^\beta_{ik}-\Gamma^k_{i\alpha}\Gamma^\beta_{jk}\right)e_\beta.$$

Но, как хорошо известно, выражение в скобках представляет собой компоненту $R^{\cdot\beta}_{\alpha\cdot ij}$ смешанного тензора Римана — Христоффеля. Таким образом,

$$\omega_{ij\alpha}=R^{\cdot\beta}_{\alpha\cdot ij}e_\beta.$$

С другой стороны, выражение $\omega_{ij\alpha}$ можно вычислить, используя при этом известным образом деривационные формулы. Именно, если в выражении

$$\omega_{ij\alpha}=D_i(D_jx_\alpha)-D_j(D_ix_\alpha)$$

заменить D_jx_α и D_ix_α согласно деривационным формулам и после формального дифференцирования D_i и D_j еще раз воспользоваться такой заменой, то получим

$$\omega_{ij\alpha}=P^\beta_{\alpha ij}x_\beta+Q_{ij\alpha}n,$$

где

$$P^{\beta}_{\alpha i j} = \frac{\partial \tilde{\Gamma}^{\beta}_{j\alpha}}{\partial u^i} - \frac{\partial \tilde{\Gamma}^{\beta}_{i\alpha}}{\partial u^j} + \tilde{\Gamma}^{s}_{j\alpha}\tilde{\Gamma}^{\beta}_{is} - \tilde{\Gamma}^{s}_{i\alpha}\tilde{\Gamma}^{\beta}_{js} + (\lambda_{i\alpha}\lambda_{jk} - \lambda_{j\alpha}\lambda_{ik})\,\tilde{g}^{k\beta},$$

$$Q_{ij\alpha} = \frac{\partial \lambda_{j\alpha}}{\partial u^i} - \frac{\partial \lambda_{i\alpha}}{\partial u^j} + \tilde{\Gamma}^{s}_{j\alpha}\lambda_{is} - \tilde{\Gamma}^{s}_{i\alpha}\lambda_{js}.$$

Очевидно, первые четыре слагаемых $P^{\beta}_{\alpha ij}$ представляют собой не что иное, как компоненту $\tilde{R}^{\cdot\beta}_{\alpha\cdot ij}$ смешанного тензора Римана — Христоффеля для поверхности.

Полагая i, j, α, $\beta<3$, сравним в полученных двух выражениях для $\omega_{ij\alpha}$ коэффициенты при $e_{\beta}=x_{\beta}$. Получим

$$R^{\cdot\beta}_{\alpha\cdot ij} = \tilde{R}^{\cdot\beta}_{\alpha\cdot ij} + (\lambda_{i\alpha}\lambda_{jk} - \lambda_{j\alpha}\lambda_{ik})\,\tilde{g}^{k\beta}.$$

Так как при i, $j<3$, $g_{ij}=\tilde{g}_{ij}$ и $g_{i3}=0$, то из этого равенства очевидным образом получается

$$R_{\alpha\beta ij} = \tilde{R}_{\alpha\beta ij} + (\lambda_{i\alpha}\lambda_{j\beta} - \lambda_{j\alpha}\lambda_{i\beta}).$$

Все эти соотношения, не являющиеся тождествами, эквивалентны равенству

$$R_{1212} = \tilde{R}_{1212} + (\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2).$$

Если его разделить на $\tilde{g}_{11}\tilde{g}_{22} - \tilde{g}_{12}^2 = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$, то получим

$$-K_R = -K_i + K_e, \qquad (***)$$

где K_i — гауссова кривизна поверхности, K_e — внешняя кривизна поверхности и K_R — кривизна пространства в направлении двумерной площадки, касающейся поверхности.

В случае евклидова пространства соотношение (***) представляет собой известную формулу Гаусса, дающую выражение для полной кривизны поверхности только через коэффициенты первой квадратичной формы и их производные.

Сравнивая в полученных двух выражениях $\omega_{ij\alpha}$ коэффициенты при $e_3=n$, получим

$$R^{\cdot 3}_{\alpha\cdot ij} = \frac{\partial \lambda_{j\alpha}}{\partial u^i} - \frac{\partial \lambda_{i\alpha}}{\partial u^j} + \tilde{\Gamma}^{s}_{j\alpha}\lambda_{is} - \tilde{\Gamma}^{s}_{i\alpha}\lambda_{js}.$$

Среди этих соотношений различных два. Если принять во внимание, что $g_{23}=g_{31}=0$, $g_{33}=1$ и, следовательно, $R^{\cdot 3}_{\alpha\cdot ij} = R_{\alpha 3ij}$, то эти соотношения можно записать так:

$$R_{1312} = \frac{\partial \lambda_{12}}{\partial u^1} - \frac{\partial \lambda_{11}}{\partial u^2} + \tilde{\Gamma}^{s}_{12}\lambda_{1s} - \tilde{\Gamma}^{s}_{11}\lambda_{2s},$$

$$R_{2312} = \frac{\partial \lambda_{22}}{\partial u^1} - \frac{\partial \lambda_{12}}{\partial u^2} + \tilde{\Gamma}^{s}_{22}\lambda_{1s} - \tilde{\Gamma}^{s}_{12}\lambda_{2s}.$$

В случае поверхности евклидова пространства эти соотношения представляют собой уравнения Петерсона — Кодацци.

Другие соотношения, которые можно было бы получить аналогичным рассмотрением выражения

$$(D_i D_j - D_j D_i) n,$$

мы выводить не будем, так как они не потребуются.

Во многих вопросах дальнейшего изложения мы будем пользоваться полугеодезической параметризацией пространства в окрестности рассматриваемой поверхности. В связи с этим мы изучим ее подробнее.

Как было уже отмечено, в полугеодезической параметризации $g_{13}=g_{23}=0$, $g_{33}=1$.

Вычислим вторую квадратичную форму базисной поверхности (поверхности $v^3=0$). Согласно определению

$$\mathrm{II} = -dx \cdot Dn.$$

Но

$$dx = e_i\, du^i, \qquad i<3, \qquad dn = \Gamma^l_{3k}\, du^k\, e_l, \qquad k<3.$$

Отсюда

$$\mathrm{II} = -\Gamma^l_{3k} g_{il}\, du^i\, du^k = -\Gamma_{3ik}\, du^i\, du^k,$$

$$\Gamma_{3ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{3i}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial v^3} - \frac{\partial g_{3k}}{\partial u^i}\right).$$

Так как $g_{3i}=g_{3k}=0$ при i, $k<3$, то

$$\Gamma_{3ik} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial v^3}.$$

Таким образом, вторая квадратичная форма поверхности равна

$$\mathrm{II} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial v^3}\, du^i\, du^k$$

и, следовательно, коэффициенты второй квадратичной формы суть

$$\lambda_{ij} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial v^3}.$$

Заметим, что если внешняя кривизна поверхности положительна, то квадратичная форма II является определенной. Можно считать, что она является положительно определенной. Достаточно выбрать надлежащим образом направление отсчета v^3.

§ 2. Априорные оценки для нормальной кривизны поверхности

При рассмотрении вопроса об изометрическом погружении двумерного риманова многообразия, гомеоморфного сфере, в трехмерное риманово пространство решающее значение имеет возможность указать для замкнутой поверхности в римановом пространстве при выполнении некоторых условий оценку для ее нормальных кривизн в зависимости только от метрики поверхности и метрики пространства. Доказательству существования такой оценки мы и посвящаем настоящий параграф.

Пусть F — поверхность в римановом пространстве и X_0 — точка на ней. Пусть точка X_0 не является шаровой, что означает, что главные нормальные кривизны поверхности в точке X_0 различны. В этом случае на поверхности в окрестности X_0 можно взять в качестве координатных линий линии кривизны. Примем в качестве параметров u^1 и u^2 дуги координатных линий, проходящих через точку X_0.

Введем в пространстве в окрестности X_0 полугеодезическую параметризацию (v^i), приняв F за базисную поверхность. Таким образом, координаты v^i точки пространства суть: v^3 — взятое со знаком расстояние до базисной поверхности (F) и координаты u^1, u^2 — основания геодезического перпендикуляра, опущенного на поверхность F. Параметризация (v^i) вдоль поверхности F является ортогональной.

Вычислим символы Христоффеля первого рода для пространства вдоль поверхности F.

Так как на поверхности F

$$\frac{\partial g_{12}}{\partial v^3} = -2\lambda_{12} = 0, \qquad \frac{\partial g_{i3}}{\partial v^j} = 0,$$

то $\Gamma_{ijk} = 0$, если все три индекса i, j, k различны.

В случае двух равных рядом расположенных индексов

$$\Gamma_{iik} = \Gamma_{kii} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{ii}}{\partial u^k}.$$

Если крайние индексы равны друг другу, но не равны среднему, то

$$\Gamma_{iki} = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{ii}}{\partial u^k}.$$

Для удобства предстоящих выкладок выпишем символы Христоффеля в виде таблицы:

$$
\begin{array}{lll}
\Gamma_{111}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} & \Gamma_{211}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} & \Gamma_{311}=-\lambda_{11} \\
\Gamma_{112}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} & \Gamma_{212}=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} & \Gamma_{312}=0 \\
\Gamma_{113}=-\lambda_{11} & \Gamma_{213}=0 & \Gamma_{313}=0 \\
\Gamma_{121}=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} & \Gamma_{221}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} & \Gamma_{321}=0 \\
\Gamma_{122}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} & \Gamma_{222}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} & \Gamma_{322}=-\lambda_{22} \\
\Gamma_{123}=0 & \Gamma_{223}=-\lambda_{22} & \Gamma_{323}=0 \\
\Gamma_{131}=\lambda_{11} & \Gamma_{231}=0 & \Gamma_{331}=0 \\
\Gamma_{132}=0 & \Gamma_{232}=\lambda_{22} & \Gamma_{332}=0 \\
\Gamma_{133}=0 & \Gamma_{233}=0 & \Gamma_{333}=0
\end{array}
$$

Так как параметризация пространства вдоль поверхности F ортогональная, то $g^{ij}=0$ при $i\neq j$, а $g^{ii}=\frac{1}{g_{ii}}$. И, следовательно, легко вычислить символы Христоффеля второго рода. Имеем

$$\Gamma_{ij}^{k}=\Gamma_{i\alpha j}g^{\alpha k}=\frac{\Gamma_{ikj}}{g_{kk}}.$$

Выпишем символы Христоффеля второго рода также в виде таблицы:

$$
\begin{array}{lll}
\Gamma_{11}^{1}=\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} & \Gamma_{21}^{1}=\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} & \Gamma_{31}^{1}=-\frac{1}{g_{11}}\lambda_{11} \\
\Gamma_{12}^{1}=\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} & \Gamma_{22}^{1}=-\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} & \Gamma_{32}^{1}=0 \\
\Gamma_{13}^{1}=-\frac{1}{g_{11}}\lambda_{11} & \Gamma_{23}^{1}=0 & \Gamma_{33}^{1}=0 \\
\Gamma_{11}^{2}=-\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} & \Gamma_{21}^{2}=\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} & \Gamma_{31}^{2}=0 \\
\Gamma_{12}^{2}=\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} & \Gamma_{22}^{2}=\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} & \Gamma_{32}^{2}=-\frac{1}{g_{22}}\lambda_{22} \\
\Gamma_{13}^{2}=0 & \Gamma_{23}^{2}=-\frac{1}{g_{22}}\lambda_{22} & \Gamma_{33}^{2}=0 \\
\Gamma_{11}^{3}=\lambda_{11} & \Gamma_{21}^{3}=0 & \Gamma_{31}^{3}=0 \\
\Gamma_{12}^{3}=0 & \Gamma_{22}^{3}=\lambda_{22} & \Gamma_{32}^{3}=0 \\
\Gamma_{13}^{3}=0 & \Gamma_{23}^{3}=0 & \Gamma_{33}^{3}=0
\end{array}
$$

Оценим производные g_{11} и g_{22} в точке, где нормальная кривизна достигает максимума. Пусть нормальная кривизна поверхности достигает абсолютного максимума в точке X_0. Введем в окрестности этой точки полугеодезическую параметризацию (v), как это было сделано выше. Пусть максимум нормальной кривизны достигается в направлении u^1 $(du^2=0)$.

Главные кривизны поверхности в точке X_0 равны

$$\varkappa_1 = \frac{\lambda_{11}}{g_{11}} = \lambda_{11}, \qquad \varkappa_2 = \frac{\lambda_{22}}{g_{22}} = \lambda_{22}.$$

Формулы Петерсона — Кодацци имеют вид

$$R_{1312} = -\frac{\partial \lambda_{11}}{\partial u^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}\left(\frac{\lambda_{11}}{g_{11}} + \frac{\lambda_{22}}{g_{22}}\right),$$
$$R_{2312} = \frac{\partial \lambda_{22}}{\partial u^1} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}\left(\frac{\lambda_{11}}{g_{11}} + \frac{\lambda_{22}}{g_{22}}\right).$$

Введем в эти формулы вместо λ_{ii} соответствующие главные кривизны $\varkappa_i$. Получим

$$\begin{aligned} R_{1312} &= -g_{11}\frac{\partial \varkappa_1}{\partial u^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}(-\varkappa_1+\varkappa_2), \\ R_{2312} &= g_{22}\frac{\partial \varkappa_2}{\partial u^1} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}(\varkappa_1-\varkappa_2). \end{aligned} \tag{*}$$

Оценим производные $\partial g_{11}/\partial u^2$ и $\partial g_{22}/\partial u^1$ в точке X_0 в предположении, что $\varkappa_1 \gg \sqrt{K_e}$.

Решим уравнения (*) относительно $\partial g_{11}/\partial u^2$ и $\partial g_{22}/\partial u^1$. Получим

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} = \frac{2\left(R_{1312} + g_{11}\frac{\partial \varkappa_1}{\partial u^2}\right)}{-\varkappa_1+\varkappa_2}, \qquad \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} = \frac{2\left(R_{2312} - g_{22}\frac{\partial \varkappa_2}{\partial u^1}\right)}{-\varkappa_1+\varkappa_2}.$$

Так как в точке X_0 имеем $\partial\varkappa_1/\partial u^2 = 0$, то

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} = \frac{2R_{1312}}{-\varkappa_1+\varkappa_2}.$$

Величина R_{1312}, как компонента тензора, не зависит от того, как искривлена поверхность. Именно, можно считать, что R_{1312} вычислена в нормальных римановых координатах $\bar v^i$, связанных с нашими координатами v^i в точке X_0 условиями $\partial \bar v^i/\partial v^j = \delta^i_j$. Отсюда мы заключаем, что $\partial g_{11}/\partial u^2$ имеет порядок $1/\varkappa_1$, т. е.

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} = O\left(\frac{1}{\varkappa_1}\right).$$

Сделать подобное заключение относительно $\partial g_{22}/\partial u^1$ несколько труднее. Так как $\varkappa_1\varkappa_2 = K_e = K_i - K_R$, где K_i — гауссова кри-

визиа поверхиости, а K_R — кривизиа пространства в иаправлеиии, касательиом к поверхиости, то

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}=\frac{2\left(R_{2312}-\frac{g_{22}}{\varkappa_1}\frac{\partial}{\partial u^1}(K_l-K_R)\right)}{-\varkappa_1+\varkappa_2}, \qquad \frac{\partial K_l}{\partial u^1}=O(1).$$

Так как

$$K_R=-\frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22}},$$

то в точке X_0

$$\frac{\partial K_R}{\partial u^1}=-\frac{\partial}{\partial u^1}R_{1212}-R_{1212}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}.$$

Введем в рассмотреиие ковариаитиую производиую теизора Римаиа $R_{ijrs,\alpha}$. Имеем

$$R_{1212,1}=\frac{\partial R_{1212}}{\partial u^1}-R_{i212}\Gamma_{11}^i-\ \dots$$

Так как компоиеиты теизора Римаиа и его ковариаитиой производиой можио считать вычислеииыми в иормальиых римаиовых коордииатах, то оии имеют порядок $O(1)$. Поэтому производиая $\partial R_{1212}/\partial u^1$ имеет порядок Γ_{ij}^k. Таким образом,

$$\frac{\partial R_{1212}}{\partial u^1}=\varkappa_1 O(1)+\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}O(1)+O(1).$$

И выражеиие для $\partial g_{22}/\partial u^1$ можио представить в форме

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}=\frac{O(1)+\frac{1}{\varkappa_1}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}O(1)}{-\varkappa_1+\varkappa_2}.$$

Отсюда видио, что $\partial g_{22}/\partial u^1$ при большом $\varkappa_1$ имеет порядок $1/\varkappa_1$:

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}=O\left(\frac{1}{\varkappa^1}\right).$$

Выясиим, какой порядок отиосительио $\varkappa_1$ имеют величииы

$$\frac{\partial R_{1312}}{\partial u^2},\quad \frac{\partial R_{2312}}{\partial u^1},\quad \frac{\partial^2 R_{1212}}{(\partial u^1)^2}.$$

Воспользуемся ковариаитиой производиой теизора Римаиа. Имеем

$$R_{1312,2}=\frac{\partial R_{1312}}{\partial u^2}-R_{k312}\Gamma_{12}^k-\ \dots$$

Так как компоиеиты теизора Римаиа и его ковариаитиой производиой имеют порядок $O(1)$, а коэффициеиты Γ_{ij}^k все имеют порядок ие больше $1/\varkappa^1$, кроме трех

$$\Gamma_{13}^1=\Gamma_{31}^1=-\varkappa_1,\quad \Gamma_{11}^3=\varkappa_1,$$

то из приведенного равенства получается

$$\frac{\partial R_{1312}}{\partial u^2} = O(1).$$

Производная $\partial R_{2312}/\partial u^1$ оценивается аналогично. Имеем

$$R_{2312,1} = \frac{\partial R_{2312}}{\partial u^1} - R_{k312}\Gamma^k_{21} - \ \dots$$

Отсюда получается

$$\frac{\partial R_{2312}}{\partial u^1} = \varkappa_1 (R_{1212} - R_{2323}) + O(1).$$

Оценим, наконец, производную $\partial^2 R_{1212}/(\partial u^1)^2$. Продифференцируем тензор Римана дважды ковариантным образом.

Получим тензор

$$R_{ijrs,\,\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial u^\beta} R_{ijrs,\,\alpha} - R_{kjrs,\,\alpha}\Gamma^k_{i\beta} - \ \dots$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial}{\partial u^\beta} R_{ijrs,\,\alpha} = O(\varkappa_1).$$

Продифференцируем равенство

$$R_{1212,1} = \frac{\partial}{\partial u_1} R_{1212} - R_{k212}\Gamma^k_{11} - \ \dots$$

по u^1. Производная левой части равенства имеет порядок не больше $O(\varkappa_1)$. Производная правой части содержит $\partial^2 R_{1212}/(\partial u^1)^2$ и две группы членов вида $\Gamma\,(\partial R/\partial u^1)$ и $R\,(\partial \Gamma/\partial u^1)$.

Рассмотрим вторую группу членов. Каждый член этой группы содержит либо производную $\partial\Gamma^s_{11}/\partial u^1$, либо $\partial\Gamma^s_{21}/\partial u^1$.

Принимая во внимание, что

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} = \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} = 0, \quad \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} = O\left(\frac{1}{\varkappa_1}\right), \quad \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} = O\left(\frac{1}{\varkappa_1}\right),$$

$$\frac{\partial \lambda_{11}}{\partial u^1} = \frac{\partial}{\partial u^1}(\varkappa_1 g_{11}) = 0, \quad \frac{\partial \lambda_{22}}{\partial u^1} = \frac{\partial}{\partial u^1}\left(g_{22}\frac{K_e}{\varkappa_1}\right) = O(1),$$

заключаем, что все производные $\partial\Gamma^s_{11}/\partial u^1$ и $\partial\Gamma^s_{12}/\partial u^1$ имеют порядок не больше $O(1)$, кроме, может быть, трех:

$$\frac{\partial\Gamma^1_{12}}{\partial u^1}, \ \frac{\partial\Gamma^2_{11}}{\partial u^1} \quad \text{и} \quad \frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial u^1} = \frac{\partial^2 g_{22}}{(\partial u^1)^2}.$$

К счастью, компоненты тензора Римана, стоящие коэффициентами при первых двух из указанных производных, равны нулю (в первой или второй паре индексы одинаковы).

Отсюда следует, что вторую группу членов можно представить в следующей форме:

$$-R\frac{\partial\Gamma}{\partial u^1}=-R_{1212}\frac{\partial^2 g_{22}}{(\partial u^1)^2}+O(1).$$

Рассмотрим теперь первую группу членов $-\Gamma(\partial R/\partial u^1)$. Так как все производные $\partial R/\partial u^1$ имеют порядок не больше $O(\varkappa_1)$, а все Γ имеют порядок не больше $O\left(\frac{1}{\varkappa_1}\right)$, кроме

$$\Gamma_{13}^1=\Gamma_{31}^1=-\varkappa_1,\quad \Gamma_{11}^3=\varkappa_1,$$

то эту группу членов можно представить в следующей форме:

$$-2\varkappa_1\frac{\partial R_{3212}}{\partial u^1}+O(1).$$

Но

$$R_{3212,1}=\frac{\partial R_{3212}}{\partial u^1}-R_{k212}\Gamma_{31}^k-\ \dots$$

Отсюда, принимая во внимание те же соображения относительно порядка величин Γ, заключаем

$$\frac{\partial R_{3212}}{\partial u^1}=-\varkappa_1(R_{1212}-R_{3232})+O(1).$$

Поэтому для второй группы членов получаем

$$-\Gamma\frac{\partial R}{\partial u^1}=2\varkappa_1^2(R_{1212}-R_{3232})+O(\varkappa_1).$$

Теперь мы можем оценить и $\partial^2 R_{1212}/(\partial u^1)^2$. Именно:

$$\frac{\partial^2 R_{1212}}{(\partial u^1)^2}=-2\varkappa_1^2(R_{1212}-R_{3232})+R_{1212}\frac{\partial^2 g_{22}}{(\partial u^1)^2}+O(\varkappa_1).$$

Покажем, что для замкнутой поверхности F в римановом пространстве R при выполнении некоторых условий можно указать оценку для нормальных кривизн, зависящую только от метрики поверхности и метрики пространства.

Пусть в точке X_0 поверхности нормальная кривизна $\varkappa_1$ достигает абсолютного максимума, причем $\varkappa_1 \gg \sqrt{K_e}$. Введем на поверхности в окрестности точки X_0 координатную сеть из линий кривизны, приняв в качестве параметров u^1, u^2 дуги координатных линий, проходящих через точку X_0. В окрестности X_0 введем полугеодезическую параметризацию пространства, приняв поверхность F за базисную поверхность, как это было сделано в предыдущих рассмотрениях.

По формуле Гаусса для внутренней (гауссовой) кривизны поверхности F в точке X_0 получаем

$$K_i=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{11}}{(\partial u^2)^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{(\partial u^1)^2}+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}\right)^2.$$

Как было установлено выше,

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} = O\left(\frac{1}{\varkappa_1}\right), \qquad \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} = O\left(\frac{1}{\varkappa_1}\right).$$

Вычислим теперь вторые производные $\partial^2 g_{11}/(\partial u^2)^2$ и $\partial^2 g_{22}/(\partial u^1)^2$ с точностью до величин $O\left(\frac{1}{\varkappa_1}\right)$. Имеем

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} = 2\frac{R_{1312} + g_{11}\dfrac{\partial \varkappa_1}{\partial u^2}}{-\varkappa_1 + \varkappa_2}.$$

Дифференцируя эту формулу по u^2 и замечая, что

$$\frac{\partial \varkappa_1}{\partial u^2} = 0, \quad \frac{\partial R_{1312}}{\partial u^2} = O(1),$$

$$\varkappa_2 = \frac{K_e}{\varkappa_1} = \frac{1}{\varkappa_1}(K_l - K_R) = \frac{K_l}{\varkappa_1} + \frac{R_{1212}}{\varkappa_1 g_{11} g_{22}},$$

$$\frac{\partial K_l}{\partial u^2} = O(1), \qquad \frac{\partial R_{1212}}{\partial u^2} = O(1),$$

заключаем:

$$\frac{\partial^2 g_{11}}{(\partial u^2)^2} = O\left(\frac{1}{\varkappa_1}\right) + \frac{2\dfrac{\partial^2 \varkappa_1}{(\partial u^2)^2}}{-\varkappa_1 + \varkappa_2}.$$

Обратимся теперь к производной $\partial^2 g_{22}/(\partial u^1)^2$. Имеем

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} = 2\frac{R_{2312} - g_{22}\dfrac{\partial \varkappa_2}{\partial u^1}}{-\varkappa_1 + \varkappa_2}.$$

Дифференцируя эту формулу по u^1 и замечая, что

$$\frac{\partial R_{2312}}{\partial u^1} = -\varkappa_1 (R_{1212} - R_{2323}) + O(1), \qquad \frac{\partial \varkappa_2}{\partial u^1} = O(1),$$

получим

$$\frac{\partial^2 g_{22}}{(\partial u^1)^2} = 2\frac{\varkappa_1 (R_{1212} - R_{2323}) - \dfrac{\partial^2 \varkappa_2}{(\partial u^1)^2}}{-\varkappa_1 + \varkappa_2} + O\left(\frac{1}{\varkappa_1}\right).$$

Вычислим производную $\partial^2 \varkappa_2/(\partial u^1)^2$. Имеем

$$\frac{\partial^2 \varkappa_2}{(\partial u^1)^2} = \frac{1}{\varkappa_1}\frac{\partial^2 K_e}{(\partial u^1)^2} - \frac{K_e}{\varkappa_1^2}\frac{\partial^2 \varkappa_1}{(\partial u^1)^2},$$

$$\frac{\partial^2 K_e}{(\partial u^1)^2} = \frac{\partial^2 K_l}{(\partial u^1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial u^1)^2}\left(\frac{R_{1212}}{g_{12} g_{22}}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 K_l}{(\partial u^1)^2} + \frac{\partial^2 R_{1212}}{(\partial u^1)^2} - R_{1212}\frac{\partial^2 g_{22}}{(\partial u^1)^2} + O(1).$$

Вспоминая, что

$$\frac{\partial^2 R_{1212}}{(\partial u^1)^2} = -2\varkappa_1^2(R_{1212} - R_{3232}) + R_{1212}\frac{\partial^2 g_{22}}{(\partial u^1)^2} + O(\varkappa_1),$$

заключаем:

$$\frac{\partial^2 K_e}{(\partial u^1)^2} = \frac{\partial^2 K_l}{(\partial u^1)^2} - 2\varkappa_1^2(R_{1212} - R_{3232}) + O(\varkappa_1).$$

Производная $\partial^2 K_i/(\partial u^1)^2$ имеет порядок $O(1)$, так как геодезическая кривизна линии u^1 $(u^2=0)$ в точке X_0 имеет порядок производных $\partial g_{11}/\partial u^2$, $\partial g_{22}/\partial u^1$.

Подставляя найденное выражение для $\partial^2 K_e/(\partial u^1)^2$ в $\partial^2 \varkappa_2/(\partial u^1)^2$ и это последнее в $\partial^2 g_{22}/(\partial u^1)^2$, получим

$$\frac{\partial^2 g_{22}}{(\partial u^1)^2} = 2\,\frac{2\varkappa_1(R_{1212} - R_{3232}) + \dfrac{K_e}{\varkappa_1^2}\,\dfrac{\partial^2\varkappa_1}{(\partial u^1)^2}}{-\varkappa_1 + \varkappa_2} + O\left(\frac{1}{\varkappa_1}\right).$$

Подставим найденные выражения для $\partial^2 g_{11}/(\partial u^2)^2$ и $\partial^2 g_{22}/(\partial u^1)^2$ в формулу Гаусса. Тогда получим

$$K_l = \frac{\dfrac{\partial^2\varkappa_1}{(\partial u^2)^2} + \dfrac{K_e}{\varkappa_1^2}\,\dfrac{\partial^2\varkappa_1}{(\partial u^1)^2}}{\varkappa_1 - \varkappa_2} + 3\,\frac{R_{1212} - R_{2323}}{1 - \dfrac{\varkappa_2}{\varkappa_1}} + O\left(\frac{1}{\varkappa_1}\right).$$

Пусть в точке X_0 имеем $K_i > 3(R_{1212} - R_{2323})$. Тогда $\varkappa_1$ не может быть сколь угодно большим. Действительно, первое слагаемое правой части равенства неположительно, так как $\varkappa_1$ достигает в X_0 максимума и, следовательно,

$$\frac{\partial^2\varkappa_1}{(\partial u^2)^2} \leqslant 0, \qquad \frac{\partial^2\varkappa_1}{(\partial u^1)^2} \leqslant 0.$$

При достаточно большом $\varkappa_1$

$$K_l > 3\,\frac{R_{1212} - R_{2323}}{1 - \dfrac{\varkappa_2}{\varkappa_1}},$$

а $O\left(\frac{1}{\varkappa_1}\right)$ сколь угодно мало. Таким образом, при достаточно большом $\varkappa_1$ равенство невозможно.

Так как в точке X_0 компонента R_{1212} есть кривизна пространства в площадке, касающейся поверхности, а R_{2323} — кривизна пространства в перпендикулярной площадке, то мы приходим к следующей теореме.

Теорема. *Пусть F — замкнутая регулярная (четырежды непрерывно дифференцируемая) поверхность в регулярном*

(четырежды непрерывно дифференцируемом) римановом пространстве R. Пусть в каждой точке поверхности выполняются неравенства

$$K_i > K_R, \quad K_i - 3\,(K_R - \overline{K}_R) > 0,$$

где K_i — гауссова кривизна поверхности, K_R — кривизна пространства в площадке, касающейся поверхности, а $\overline{K}_R$ — кривизна в любой перпендикулярной площадке.

Тогда для нормальной кривизны поверхности можно указать оценку в зависимости только от метрики поверхности и метрики пространства.

Этой теореме можно дать и более точную формулировку. Пусть поверхность F расположена в области G риманова пространства R. Пусть G покрыта конечной системой окрестностей Ω, в каждой из которых введена своя параметризация (v^i), и пусть $g_{ij}\,dv^i\,dv^j$ — линейный элемент пространства в Ω.

Пусть поверхность F покрыта конечным числом окрестностей ω, в каждой из которых введена своя параметризация (u^i), и $\tilde{g}_{ij}du^idu^j$ — линейный элемент поверхности в ω.

Пусть в каждой точке поверхности

$$K_i - K_R > \delta, \quad K_i - 3\,(K_R - \overline{K}_R) > \delta, \quad \delta > 0.$$

Тогда, если по всем окрестностям Ω и ω абсолютные величины g_{ij}, $\tilde{g}_{ij}$ и их производные до четвертого порядка не превосходят M, а дискриминанты форм $g_{ij}\,dv^i\,dv^j$ и $\tilde{g}_{ij}\,du^i\,du^j$ не меньше $1/M$, то нормальные кривизны поверхности F ограничены некоторой постоянной $\cdot c(M, \delta)$, зависящей только от M и δ.

§ 3. Априорные оценки для производных координат в пространстве по координатам на поверхности

Пусть в трехмерное риманово пространство R изометрически погружено двумерное риманово многообразие F. Пусть пространство покрыто системой параметризованных окрестностей Ω, а поверхность F — системой параметризованных окрестностей ω. Пространственные координаты v^i точки поверхности F при этом являются функциями координат u^i на поверхности.

В этом параграфе будет доказано, что если получены априорные оценки для нормальных кривизн поверхности (§ 2), то для производных любого порядка функций v^i по переменным u^i тоже могут быть получены оценки, зависящие только от метрики пространства и метрики поверхности.

Пусть $x(u^i)$ — произвольная точка поверхности. Имеем

$$\frac{\partial x}{\partial u^i} = \frac{\partial x}{\partial v^\alpha}\frac{\partial v^\alpha}{\partial u^i} = e_\alpha \frac{\partial v^\alpha}{\partial u^i}.$$

Возводя это равенство в квадрат, получим

$$\tilde{g}_{ij} = g_{\alpha\beta}\frac{\partial v^\alpha}{\partial u^i}\frac{\partial v^\beta}{\partial u^j},$$

где $\tilde{g}_{ij}$ и $g_{\alpha\beta}$ — коэффициенты линейных элементов поверхности и пространства.

Так как форма $g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta$ является положительно определенной, то существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta \geqslant \varepsilon\sum_\alpha (\xi^\alpha)^2 \geqslant \varepsilon(\xi^\alpha)^2.$$

Число ε зависит только от параметризации пространства. Таким образом,

$$\varepsilon\left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial u^i}\right) \leqslant \tilde{g}_{ii},$$

откуда

$$\left|\frac{\partial v^\alpha}{\partial u^i}\right| \leqslant \sqrt{\frac{\tilde{g}_{ii}}{\varepsilon}}.$$

И существование оценок для первых производных доказано.

Оценим вторые производные функций v^α по переменным u^i. Для этого сначала оценим коэффициенты второй квадратичной формы поверхности.

Пусть $\varkappa_0$ является верхним пределом нормальных кривизн поверхности. Тогда при любых ξ^i

$$\frac{|\lambda_{ij}\xi^i\xi^j|}{\tilde{g}_{ij}\xi^i\xi^j} \leqslant \varkappa_0.$$

Отсюда следует, что

$$|\lambda_{11}| \leqslant \varkappa_0\tilde{g}_{11}, \qquad |\lambda_{22}| \leqslant \varkappa_0\tilde{g}_{22}.$$

И так как

$$\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2 = K_e\tilde{g},$$

$$K_e = K_i - K_R, \qquad \tilde{g} = \tilde{g}_{11}\tilde{g}_{22} - \tilde{g}_{12}^2,$$

то

$$|\lambda_{12}|^2 \leqslant \varkappa_0^2\tilde{g}_{11}\tilde{g}_{22} + K_e\tilde{g}.$$

Обратимся теперь к деривационным формулам. Имеем (§ 1)

$$D_j x_i = \tilde{\Gamma}_{ij}^\alpha x_\alpha + \lambda_{ij} n,$$

$$x_i = \frac{\partial x^i}{\partial v^\lambda}\frac{\partial v^\lambda}{\partial u^i} = e_\lambda\frac{\partial v^\lambda}{\partial u^i},$$

$$D_j x_i = e_\lambda\frac{\partial^2 v^\lambda}{\partial u^i\,\partial u^j} + \frac{\partial v^\lambda}{\partial u^i}\Gamma_{\lambda j}^\mu e_\mu,$$

Полагая $n=\xi^\lambda e_\lambda$, получим

$$e_\lambda \frac{\partial^2 v^\lambda}{\partial u^i \partial u^j} = \tilde{\Gamma}^\alpha_{ij} \frac{\partial v^\lambda}{\partial u^\alpha} e_\lambda - \Gamma^\lambda_{j\mu} \frac{\partial v^\mu}{\partial u^i} e_\lambda + \lambda_{ij}\xi^\lambda e_\lambda.$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2 v}{\partial u^i \partial u^j} = \tilde{\Gamma}^\alpha_{ij} \frac{\partial v^\lambda}{\partial u^\alpha} - \Gamma^\lambda_{j\mu} \frac{\partial v^\mu}{\partial u^i} + \lambda_{ij}\xi^\lambda.$$

Так как оценки первых производных $\partial v^\alpha/\partial u^\beta$, а также оценки для коэффициентов второй квадратичной формы уже получены, то для получения оценок вторых производных $\partial^2 v^\lambda/\partial u^i \partial u^j$ достаточно оценить ξ^λ. Это просто. Имеем

$$n=\xi^\alpha e_\alpha,$$

откуда

$$g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta = 1.$$

И так как форма $g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta$ положительно определенная, то получение оценок ξ^α не составляет труда.

Каждая из декартовых координат v^i точки поверхности в евклидовом пространстве, реализующей линейный элемент $\tilde{g}_{ij}du^i du^j$, удовлетворяет уравнению в частных производных второго порядка типа Монжа — Ампера с коэффициентами, зависящими только от $\tilde{g}_{ij}$ и их производных.

Сейчас мы получим систему дифференциальных уравнений для пространственных координат точки поверхности в римановом пространстве, которая в наших рассмотрениях будет играть аналогичную роль. Это будет так называемое уравнение Дарбу. Оно играет важную роль в вопросах реализации абстрактно заданной метрики поверхностью евклидова пространства.

Пусть e_i, как и раньше, векторы координатного триэдра в точке x пространства. Имеем

$$x_k = \frac{\partial x}{\partial u^k} = e_l \frac{\partial v^l}{\partial u^k}.$$

Обозначим e_i^* вектор в точке x пространства, связанный с векторами e_i соотношениями

$$e_i^* e_k = \delta_{ik},$$

где δ_{ik} — символ Кронекера.

Для вектора $D_i x_j$ мы имеем два выражения

$$D_i x_j = \tilde{\Gamma}^k_{ij} x_k + \lambda_{ij} n, \quad D_i x_j = e_k \frac{\partial^2 v^k}{\partial u^i \partial u^j} + \frac{\partial v^k}{\partial u^j} \Gamma^\alpha_{ks} e_\alpha \frac{\partial v^s}{\partial u^i}.$$

Первое — согласно деривационным формулам, второе получается непосредственным дифференцированием.

Умножим скалярно каждое из этих выражений на e^*_β. Получим

$$e^*_\beta D_i x_j = \tilde{\Gamma}^k_{ij} \frac{\partial v^\beta}{\partial u^k} + \lambda_{ij} (n e^*_\beta),$$

$$e^*_\beta D_i x_j = \frac{\partial^2 v^\beta}{\partial u^i \partial u^j} + \Gamma^\beta_{ks} \frac{\partial v^k}{\partial u^i} \frac{\partial v^s}{\partial u^j}.$$

Сравнивая правые части равенства и полагая для краткости

$$\frac{\partial^2 v^\beta}{\partial u^i \partial u^j} = v^\beta_{ij}, \qquad \Gamma^\beta_{ks} \frac{\partial v^k}{\partial u^i} \frac{\partial v^s}{\partial u^j} - \tilde{\Gamma}^k_{ij} \frac{\partial v^\beta}{\partial u^k} = A^\beta_{ij},$$

получим

$$v^k_{ij} + A^k_{ij} = \lambda_{ij} (n e^*_k). \tag{*}$$

Из этих уравнений, как следствие, получается

$$(v^k_{11} + A^k_{11})(v^k_{22} + A^k_{22}) - (v^k_{12} + A^k_{12})^2 = (\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda^2_{12})^2 (n e^*_k)^2.$$

Найдем выражение $(n e^*_k)$ через $g_{\alpha\beta}$, $\tilde{g}_{ik}$ и производные $\partial v^\alpha / \partial u^\beta$. Имеем

$$e^*_k = \frac{e_i \times e_j}{\sqrt{g}}, \qquad n = \frac{x_\alpha \times x_\beta}{\sqrt{\tilde{g}}},$$

где i и j — не равные друг другу и не равные k индексы, а α и β — индексы, один из которых равен 1, а другой 2. Отсюда

$$(n e^*_k) = \frac{1}{\sqrt{g\tilde{g}}} \begin{vmatrix} e_i x_\alpha & e_i x_\beta \\ e_j x_\alpha & e_j x_\beta \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g\tilde{g}}} \begin{vmatrix} g_{ki} \dfrac{\partial v^k}{\partial u^\alpha} & g_{si} \dfrac{\partial v^s}{\partial u^\beta} \\ g_{kj} \dfrac{\partial v^k}{\partial u^\alpha} & g_{sj} \dfrac{\partial v^s}{\partial u^\beta} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, $(n e^*_k)$ действительно выражается через g_{ij}, $\tilde{g}_{ij}$ и производные $\partial v^\lambda / \partial u^\mu$. Заметим еще, что

$$\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda^2_{12} = \tilde{g} K_e = \tilde{g} (K_i - K_R),$$

и, следовательно, выражается через g_{ij}, $\tilde{g}_{ij}$ и их производные.

Окончательный результат мы можем сформулировать следующим образом: *пространственные координаты v^i точки поверхности, как функции внутренних координат u^i на поверхности, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений вида*

$$(v^k_{11} + A^k_{11})(v^k_{22} + A^k_{22}) - (v^k_{12} + A^k_{12})^2 = a^k.$$

Коэффициенты A^k_{ij} и a^k суть многочлены относительно первых производных $\partial v^\alpha / \partial u^\beta$ с коэффициентами, выражающимися через g_{ij}, $\tilde{g}_{ij}$ и их производные.

Если внешняя кривизна поверхности $K_e = K_i - K_R$ положительна и $ne_k^* \neq 0$, то $a^k > 0$ (система эллиптическая).

Пусть X_0 — произвольная точка поверхности F в трехмерном римановом пространстве. При достаточно малом δ, зависящем только от кривизны пространства, внутренней кривизны поверхности и верхней грани нормальных кривизн в окрестности точки X_0, в пространстве и на поверхности можно ввести нормальные римановы координаты v^i и u^i соответственно, удовлетворяющие условиям:

1. $|g_{ij} - \delta_{ij}| < \varepsilon$.
2. $|\tilde{g}_{ij} - \delta_{ij}| < \varepsilon$.
3. $\partial v^i / \partial u^j = \delta_i^j$ в точке X_0; $i, j = 1, 2$.
4. Для вектора e_3^*, определяемого условиями $e_i e_3^* = \delta_{i3}$,

$$(ne_3^*) > 1 - \varepsilon,$$

где δ_{ij}, δ_i^j — символы Кронекера, g_{ij}, $\tilde{g}_{ij}$ — коэффициенты линейных элементов пространства и поверхности, e_i — векторы координатного триэдра.

Утверждается, что в $\delta/4$-окрестности точек X_0 для третьих производных $\partial^3 v^\alpha / \partial u^i \, \partial u^j \, \partial u^k$ — могут быть даны оценки в зависимости только от метрики пространства и метрики поверхности, т. е. g_{ij}, $\tilde{g}_{ij}$ и их производных, верхней грани нормальных кривизн и числа δ.

Для доказательства этого утверждения может быть применен метод, с помощью которого в § 11 гл. II установлено существование оценок третьих производных решения уравнения эллиптического типа

$$F(r, s, t, p, q, z, x, y) = 0$$

при условии существования оценок для самого решения и его производных первого и второго порядков.

Действительно, функции v^k удовлетворяют уравнению

$$\left(v_{11}^3 + A_{11}^3\right)\left(v_{22}^3 + A_{22}^3\right) - \left(v_{12}^3 + A_{12}^3\right)^2 = a^3. \qquad (**)$$

Оно содержит вторые производные только функции v^3. Коэффициенты A_{ij}^3 и a^3 зависят только от первых производных. Коэффициент $a^3 > 0$, так как $K_i - K_R > 0$.

Если в уравнении (**) функции v^1 и v^2 считать известными функциями, то оно для v^3 будет уравнением второго порядка эллиптического типа. К этому уравнению мы и применяем метод доказательства, указанный выше.

Для того чтобы убедиться в применимости этого метода к уравнению (**), достаточно заметить, что производные третье-

го порядка функций v^1 и v^2 выражаются через соответствующие производные функции v^3 линейно с ограниченными коэффициентами. Покажем это. Имеем

$$\frac{\partial^2 v^\alpha}{\partial u^i\, \partial u^j} + A^\alpha_{ij} = \lambda_{ij}\,(n\overset{*}{e}_\alpha).$$

Дифференцируя это равенство по u^k, получим

$$\frac{\partial^3 v^\alpha}{\partial u^i\, \partial u^j\, \partial u^k} + \ldots = \frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial u^k}\,(n\overset{*}{e}_\alpha),$$

где не выписаны члены, содержащие только первые и вторые производные функций v. Отсюда получается

$$\frac{\partial^3 v^\alpha}{\partial u^i\, \partial u^j\, \partial u^k} = \frac{(n\overset{*}{e}_\alpha)}{(n\overset{*}{e}_3)}\,\frac{\partial^3 v^3}{\partial u^i\, \partial u^j\, \partial u^k} + \ldots$$

Оценки третьих производных решения уравнения $F(r, s, \ldots) = 0$ в § 11 гл. II зависят от верхней грани модулей решения и его первых двух производных, верхней грани модулей производных F до третьего порядка, нижней грани дискриминанта уравнения $4F_rF_t - F_s^2$ и расстояния от точки, в которой оцениваются третьи производные, до границы области существования решения.

Соответственно для уравнения (**) получается следующий результат.

Третьи производные $\partial^3 v^3/\partial u^i\, \partial u^j\, \partial u^k$ в $\delta/4$-окрестности точки X_0 не превосходят некоторой постоянной, зависящей только от производных g_{ij}, $\tilde{g}_{ij}$ до пятого порядка, нижней грани внешней кривизны поверхности $K_i - K_R$, верхней грани нормальных кривизн поверхности и числа δ.

Что касается третьих производных двух других функций v^1 и v^2, то они очевидным образом оцениваются через соответствующие третьи производные v^3.

Получение оценок четвертых и высших производных функций v^j может быть основано на следующей теореме Шаудера [72] для линейных уравнений эллиптического типа.

Пусть в ограниченной области G переменных x_1, x_2 рассматривается линейное уравнение в частных производных эллиптического типа

$$a_{11}(x_1, x_2)\, u_{x_1x_1} + 2a_{12}(x_1, x_2)\, u_{x_1x_2} + a_{22}(x_1, x_2)\, u_{x_2x_2} = f(x_1, x_2),$$

причем $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 1$. Пусть, далее, в замкнутой области $\bar{G}$ коэффициенты уравнения a_{ij} и его правая часть f удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $\alpha + \varepsilon$ $(0 < \alpha < 1,\ \varepsilon > 0)$ и постоянной Гёльдера M.

Тогда, если вторые производные решения $u(x_1, x_2)$ удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α, то для верхней грани модулей производных $u(x_1, x_2)$ первого и второго порядка в области B, которая вместе с границей содержится в G, и для наименьших постоянных Гёльдера вторых производных функции $u(x_1, x_2)$ в области B относительно показателя α может быть указан верхний предел в зависимости только от M, максимума модуля $u(x_1, x_2)$ в G и расстояния области B от границы области G.

Функция $v^3(u^1, u^2)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial^2 v^3}{(\partial u^1)^2} + A_{11}^3\right)\left(\frac{\partial^2 v^3}{(\partial u^2)^2} + A_{22}^3\right) - \left(\frac{\partial^2 v^3}{\partial u^1\,\partial u^2} + A_{12}^3\right) = a^3. \qquad (**)$$

Дифференцируя это уравнение по u^k, мы получаем для $\partial v^3/\partial u^k = v$ уравнение вида

$$A_{11}\frac{\partial^2 v}{(\partial u^1)^2} + 2A_{12}\frac{\partial^2 v}{\partial u^1\,\partial u^2} + A_{22}\frac{\partial^2 v}{(\partial u^2)^2} = A,$$

где A_{ij} и A содержат только первые и вторые производные функций v^j, причем

$$A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = a^3.$$

Так как третьи производные функции v^j уже ограничены в $\delta/4$-окрестности точки X_0, то коэффициенты A_{ij} и A удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $\alpha' < 1$. Это позволяет оценить постоянные Гёльдера для вторых производных функции v, т. е. третьих производных функции v^3 относительно показателя $\alpha'' < \alpha'$ в $\delta/5$-окрестности точки X_0. Пользуясь затем выражением третьих производных v^1 и v^2 через третьи производные v^3, получаем оценки постоянных Гёльдера для третьих производных v^1 и v^2.

Аналогично, дифференцируя уравнение (**) дважды по u^k и u^l и применяя теорему Шаудера, получаем оценки четвертых производных и их постоянных Гёльдера относительно показателя $\alpha''' < \alpha''$ в $\delta/6$-окрестности точки X_0.

Если коэффициенты уравнения (**) достаточно регулярны, то процесс получения оценок последовательных производных можно продолжать сколь угодно далеко. Именно, если g_{ij} и $\tilde{g}_{ij}$ дифференцируемы k раз ($k \geqslant 5$) и производные k-го порядка удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α, то оценки могут быть установлены для производных k-го порядка функций v^i и их постоянных Гёльдера относительно показателя α в $\delta/(k+2)$-окрестности точки X_0.

Исследования этого параграфа мы резюмируем следующей теоремой.

Теорема. *Пусть R — трехмерное риманово пространство, покрытое системой областей Ω с параметризацией v^i, F — дву-*

мерное замкнутое риманово многообразие, покрытое системой областей ω с параметризацией u^i. Пусть многообразие F изометрически $k+\alpha$ дифференцируемым образом ($k \geqslant 5$, $0<\alpha<1$) *погружено в R в виде поверхности $\bar{F}$ с положительной внешней кривизной.*

Тогда для производных пространственных координат точек поверхности v^i по внутренним координатам u^i и их постоянных Гёльдера относительно показателя α можно указать оценку в зависимости только от верхней грани модулей коэффициентов g_{ij} и $\tilde{g}_{ij}$ линейных элементов поверхности и пространства, их производных до k-го порядка, постоянных Гёльдера этих производных относительно показателя α, нижней грани дискриминантов форм $g_{ij}\,dv^i\,dv^j$, $\tilde{g}\,du^i\,du^j$, верхней грани нормальных кривизн поверхности $\bar{F}$ и нижней грани ее внешней кривизны K_e.

§ 4. Бесконечно малые изгибания поверхностей в римановом пространстве

Пусть поверхность F в римановом пространстве R подвергается непрерывной деформации, переходя к моменту t в поверхность F_t. Эта деформация называется *бесконечно малым изгибанием*, если в начальный момент ($t=0$) длины кривых на поверхности стационарны.

С бесконечно малым изгибанием поверхности F естественным образом связано векторное поле

$$\xi = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0},$$

где $x(t)$ — точка поверхности F_t, в которую при деформации переходит точка x поверхности F. Это векторное поле называется полем бесконечно малого изгибания.

Замкнутые выпуклые поверхности евклидова пространства не допускают иных бесконечно малых изгибаний, кроме тривиальных, т. е. таких, для которых соответствующее поле является полем скоростей движения поверхности как целого и, следовательно, допускающих представление

$$\xi(x) = r(x) \times a + b,$$

где $r(x)$ — вектор точки x поверхности, a и b — постоянные векторы. Отсюда следует, что если ограничиться такими деформациями, при которых соответствующие им поля ξ в точке x_0 удовлетворяют условию $\xi=0$, $d\xi=0$, то $\xi(x) \equiv 0$. Соответствующая теорема для поверхностей риманова пространства будет нами доказана в настоящем параграфе.

Пусть F — поверхность в трехмерном римановом пространстве R. Введем в R в окрестности F полугеодезическую

параметризацию v^i (§ 1). При этом для метрических тензоров g_{ij} и $\tilde{g}_{ij}$ пространства и поверхности будем иметь

$$g_{13}=0, \quad g_{23}=0, \quad g_{33}=1$$

во всей параметризованной окрестности,

$$g_{ij}|_F=\tilde{g}_{ij} \quad \text{при} \quad i,\ j<3$$

на поверхности F.

Вторая квадратичная форма поверхности равна

$$\lambda_{ij}\,du^i\,du^j=-\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{ij}}{\partial v^3}\bigg|_F du^i\,du^j.$$

Пусть поверхность F подвергается бесконечно малому изгибанию, переходя к моменту t в поверхность F_t, задаваемую уравнениями

$$v^i=v^i(u^1,\ u^2,\ t).$$

Тогда, чтобы получить линейный элемент ds_t^2 поверхности F_t, нужно подставить $v^i=v^i\,(u^1, u^2, t)$ в выражение для линейного элемента пространства. Будем иметь

$$g_{ij}\,dv^i\,dv^j=ds_t^2.$$

Возьмем полную производную по t от обеих частей этого равенства. Так как деформация является бесконечно малым изгибанием, то $d\left(ds_t^2\right)/dt=0$. Обозначая $\xi^i=\frac{\partial v^i}{\partial t}$ контравариантные координаты вектора $\xi=dx/dt$, получим

$$\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial v^k}\,\xi^k\,dv^i\,dv^j+g_{ij}\,d\xi^i\,dv^j+g_{ij}\,d\xi^j\,dv^i\right)_{t=0}=0.$$

Отсюда, замечая, что на поверхности F имеем $v^1=u^1$, $v^2=u^2$, $v^3=0$, $g_{13}=g_{23}=0$, $g_{33}=1$, получаем

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial v^k}\,\xi^k\,du^i\,du^j+g_{ij}\,d\xi^i\,du^j+g_{ij}\,d\xi^j\,du^i=0,$$

где индексы суммирования i, j принимают только два значения 1, 2.

Левая часть этого равенства представляет собой квадратичную форму относительно du^1, du^2. Так как эта форма равна нулю, то нулю должны быть равны и ее коэффициенты. Таким образом, для функций ξ^i получаются три уравнения:

$$g_{\alpha j}\,\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial u^i}+g_{i\alpha}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial u^j}+\xi^k\,\frac{\partial g_{ij}}{\partial v^k}=0. \tag{1}$$

Вводя в эти уравнения вместо контравариантных координат вектора ξ ковариантные

$$\xi_i = g_{i\alpha}\xi^\alpha$$

и замечая, что $g_{i3}=0$ при $i=1, 2$, получим

$$\frac{\partial \xi_j}{\partial u^i} + \frac{\partial \xi_i}{\partial u^j} - \left(\frac{\partial g_{\alpha j}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\alpha}\right) g^{\alpha k}\xi_k = 0.$$

Или

$$\frac{\partial \xi_j}{\partial u^i} + \frac{\partial \xi_i}{\partial u^j} - 2\Gamma_{ij}^k \xi_k = 0, \qquad i, j = 1, 2. \tag{2}$$

Эти уравнения можно еще записать в следующей компактной форме:

$$D_i\xi_j + D_j\xi_i = 0, \qquad i, j = 1, 2,$$

где D_i обозначает ковариантную производную.

Замечая, что пространственные символы Христоффеля Γ_{ij}^k при $i, j, k<3$ совпадают с соответствующими символами Христоффеля $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ поверхности, а

$$\Gamma_{ij}^3 = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial v^3} = \lambda_{ij}, \qquad i, j = 1, 2,$$

запишем уравнения (2) в виде

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial u^j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial u^i} - 2\tilde{\Gamma}_{ij}^k - 2\lambda_{ij}\xi_3 = 0, \tag{3}$$

где индексы i, j, k принимают только значения 1, 2.

Пусть теперь F замкнутая, гомеоморфная сфере поверхность с положительной внешней кривизной. Введем на поверхности F сопряженно изотермическую параметризацию. Так мы будем называть параметризацию, в которой вторая квадратичная форма поверхности принимает вид

$$\mathrm{II} = \nu((du^1)^2 + (du^2)^2).$$

Покажем, как может быть введена такая параметризация.

Так как внешняя кривизна поверхности F положительна, то квадратичная форма $\mathrm{II}=\lambda_{ij}\,du^i\,du^j$ является положительно определенной. Поверхность F с метрикой, задаваемой квадратичной формой II, есть гомеоморфное сфере риманово многообразие. При достаточной регулярности коэффициентов λ_{ij} оно допускает конформное отображение на единичную сферу, обладающее такой же регулярностью, как и λ_{ij}. Введем на сфере стереографические координаты. Возьмем теперь в качестве координат u^1, u^2 точки поверхности F координаты соответствующей

точки сферы при указанном конформном отображении. Очевидно, введенная таким образом система координат на поверхности F будет сопряженно изотермической.

В случае изотермических координат почленным вычитанием двух уравнений системы (3), соответствующих $i=j=1$ и $i=j=2$, ξ_3 исключается, и мы приходим к следующей окончательной форме уравнений бесконечно малого изгибания поверхности:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \xi_1}{\partial u^1}-\frac{\partial \xi_2}{\partial u^2}-\left(\widetilde{\Gamma}_{11}^{\alpha}-\widetilde{\Gamma}_{22}^{\alpha}\right)\xi_\alpha=0, \\ &\frac{\partial \xi_1}{\partial u^2}+\frac{\partial \xi_2}{\partial u^1}-2\widetilde{\Gamma}_{12}^{\alpha}\xi_\alpha=0. \end{aligned} \tag{4}$$

Введенная нами система сопряженно изотермических координат u^1, u^2 на поверхности имеет в одной точке особенность; обозначим ее X_0. Эта точка соответствует при конформном отображении, о котором шла речь выше, полюсу P_0 сферы, из которого она проектируется при введении стереографических координат.

Наша задача сейчас заключается в том, чтобы выяснить, как ведут себя коэффициенты уравнений бесконечно малого изгибания, когда мы приближаемся к точке X_0, т. е. когда $(u^1)^2+$ $+(u^2)^2=\rho^2\to\infty$.

Введем на поверхности сопряженно-изотермические координаты $\bar{u}^i$, взяв вместо точки P_0 на сфере диаметрально противоположную ей точку $\bar{P}_0$. Не ограничивая общности, можно считать, что связь между координатами $\bar{u}^i$ и u^i устанавливается формулами

$$\bar{u}^i=\frac{u^i}{\rho^2}, \qquad \rho^2=(u^1)^2+(u^2)^2.$$

Обозначим $\bar{\Gamma}_{ij}^{\alpha}$ символы Христоффеля поверхности в системе координат $\bar{u}_i$. Очевидно, в окрестности точки $X_0\left(\bar{u}^1=\bar{u}^2=0\right)$ коэффициенты $\bar{\Gamma}_{ij}^{\alpha}$ суть регулярные, в частности, ограниченные функции.

Зададим на поверхности F евклидову метрику, которая в системе координат $\bar{u}$ определяется квадратичной формой

$$ds_0^2=(d\bar{u}^1)^2+(d\bar{u}^2)^2.$$

Разность символов Христоффеля второго рода, определяемых формами ds^2 и ds_0^2, есть тензор A_{ij}^{α}. В системе координат $\bar{u}$ его компонентами являются величины $\bar{\Gamma}_{ij}^{\alpha}$, так как символы Христоффеля для ds_0^2 равны нулю.

Оценим компоненты тензора A_{ij}^{α} вблизи точки X_0 в системе координат u^i. Имеем

$$A_{ij}^{k}=\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma}\frac{\partial \bar{u}^{\alpha}}{\partial u^i}\frac{\partial \bar{u}^{\beta}}{\partial u^j}\frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\gamma}}.$$

Непосредственной проверкой легко убеждаемся, что

$$\left|\frac{\partial \bar{u}^{\lambda}}{\partial u^{\mu}}\right| \leqslant \frac{1}{\rho^2}, \qquad \left|\frac{\partial u^{\lambda}}{\partial \bar{u}^{\mu}}\right| \leqslant \rho^2.$$

Отсюда следует, что компоненты A_{ij}^k вблизи точки X_0 имеют порядок $O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)$.

А теперь легко выяснить поведение символов Христоффеля поверхности вблизи точки X_0 в координатах u^i, так как они с точностью до величин порядка $O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)$ равны символам Христоффеля для линейного элемента плоскости ds_0^2 в координатах u^i. Имеем

$$ds_0^2 = \frac{(du^1)^2 + (du^2)^2}{\rho^4}.$$

Непосредственным вычислением для символов Христоффеля плоскости получаем следующие значения:

$$\Gamma_{11}^1 = -2(\ln\rho)_{u^1}, \qquad \Gamma_{11}^2 = 2(\ln\rho)_{u^2},$$
$$\Gamma_{12}^1 = -2(\ln\rho)_{u^2}, \qquad \Gamma_{12}^2 = -2(\ln\rho)_{u^1},$$
$$\Gamma_{22}^1 = 2(\ln\rho)_{u^1}, \qquad \Gamma_{22}^2 = -2(\ln\rho)_{u^2},$$

а соответствующие символы Христоффеля $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ поверхности отличаются от них величинами порядка $O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)$.

Если уравнения бесконечно малого изгибания записать в форме

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial u^1} - \frac{\partial \xi_2}{\partial u^2} = a\xi_1 + b\xi_2,$$
$$\frac{\partial \xi_1}{\partial u^2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial u^1} = c\xi_1 + d\xi_2,$$

то для коэффициентов a, b, c, d вблизи точки X_0 получаются следующие выражения:

$$a = -4(\ln\rho)_{u^1} + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right), \qquad c = -4(\ln\rho)_{u^2} + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right),$$
$$b = 4(\ln\rho)_{u^2} + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right), \qquad d = -4(\ln\rho)_{u^1} + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right).$$

Введем в уравнения бесконечно малого изгибания новые функции — λ_1 и λ_2, связанные с ξ_1 и ξ_2 равенствами

$$\lambda_1 = \vartheta\xi_1, \qquad \lambda_2 = \vartheta\xi_2.$$

Уравнения для λ_1 и λ_2 будут

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial u^1}-\frac{\partial\lambda_2}{\partial u^2}=\left(a+\frac{\vartheta_{u^1}}{\vartheta}\right)\lambda_1+\left(b-\frac{\vartheta_{u^2}}{\vartheta}\right)\lambda_2,$$

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial u^2}+\frac{d\lambda_2}{\partial u^1}=\left(c+\frac{\vartheta_{u^2}}{\vartheta}\right)\lambda_1+\left(d+\frac{\vartheta_{u^1}}{\vartheta}\right)\lambda_2.$$

Отсюда видно, что если взять $\vartheta=\rho^4$, то коэффициенты уравнений для λ_1 и λ_2 при $\rho\to\infty$ убывают, как $\frac{1}{\rho^2}$.

Докажем следующую теорему.

Теорема. *Замкнутая, гомеоморфная сфере поверхность в римановом пространстве, имеющая положительную внешнюю кривизну, закрепленная в одной точке вместе с пучком направлений, исходящих из одной точки, является жесткой, т. е. не допускает бесконечно малых изгибаний.*

Аналитически утверждение теоремы заключается в том, что если векторное поле ξ бесконечно малого изгибания поверхности в какой-нибудь точке X_0 поверхности удовлетворяет условию

$$\xi=0, \qquad D\xi=0,$$

то оно равно нулю тождественно.

Введем на поверхности две системы сопряженно изометрических координат u^i и $\bar{u}^i$, связанные друг с другом формулами

$$\bar{u}^i=\frac{u^i}{\rho^2}$$

так, чтобы в системе $\bar{u}$ точка X_0 имела координаты $(0, 0)$. Выше этим системам координат дано подробное описание.

По условию теоремы

$$\bar{\xi}_i=0, \qquad \frac{\partial\bar{\xi}_i}{\partial\bar{u}^j}=0.$$

Но $\bar{\xi}_i$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial\bar{\xi}_i}{\partial\bar{u}^j}+\frac{\partial\bar{\xi}_j}{\partial\bar{u}^i}-2\bar{\Gamma}^{\alpha}_{ij}\bar{\xi}_\alpha=0, \qquad i,\ j=1,\ 2.$$

Если эту систему продифференцировать по $\bar{u}^k$, то получим

$$\frac{\partial^2\bar{\xi}_i}{\partial\bar{u}^j\,\partial\bar{u}^k}+\frac{\partial^2\bar{\xi}_j}{\partial\bar{u}^i\,\partial\bar{u}^k}=0, \qquad i,\ j,\ k=1,\ 2,$$

в точке X_0, откуда следует, что все производные второго порядка функций $\bar{\xi}_1$ и $\bar{\xi}_2$ равны нулю.

Посмотрим теперь, как ведут себя ξ_1 и ξ_2 вблизи точки X_0, т. е. при $\rho \to \infty$. Имеем

$$\xi_i = \bar{\xi}_\alpha \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^i}.$$

И так как $\bar{\xi}_\alpha$ как функции u^1, u^2 при $\rho \to \infty$ убывают, как $1/\rho^3$, а $\partial \bar{u}^\alpha / \partial u^i$ убывают, как $1/\rho^2$, то вблизи X_0 функции ξ_i имеют порядок $1/\rho^5$.

Отсюда следует, что функции $\lambda_i = \rho^4 \xi_i$ при $\rho \to \infty$ убывают, как $1/\rho$. Но функции λ_i удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_1}{\partial u^1} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial u^2} &= a\lambda_1 + b\lambda_2, \\ \frac{\partial \lambda_1}{\partial u^2} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial u^1} &= c\lambda_1 + d\lambda_2, \end{aligned} \tag{5}$$

коэффициенты которой a, b, c, d при $\rho \to \infty$ убывают, как $1/\rho^2$. Итак, достаточно показать, что всякое решение λ_i системы (5), убывающее, как $1/\rho$ при $\rho \to \infty$, равно нулю тождественно.

Следуя И. Н. Векуа [27], представим уравнения системы (5) в форме

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{z}} = A\lambda + B\bar{\lambda}, \tag{6}$$

где

$$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2, \qquad \bar{\lambda} = \lambda_1 - i\lambda_2,$$

$$A = \frac{1}{4}(a + d + ic - ib), \qquad B = \frac{1}{4}(a - d + ic + ib),$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u^1} + i\frac{\partial}{\partial u^2}\right).$$

Решение уравнения (6) допускает следующее представление [27]:

$$\lambda(z) = \varphi(z)\, e^{\omega(z)},$$

где $\varphi(z)$ — аналитическая функция комплексного переменного $z = u^1 + iu^2$, а

$$\omega(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_E \frac{A + B\dfrac{\bar{\lambda}}{\lambda}}{t - z}\, dE_t;$$

здесь интегрирование ведется по всей комплексной t-плоскости.

Так как $\omega(z)$ ограничена, а $\lambda(z) \to 0$ при $z \to \infty$, то аналитическая функция $\varphi(z)$ при $z \to \infty$ неограниченно убывает, а следовательно, равна нулю. Но тогда $\lambda(z) = 0$, т. е. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$.

Из равенства нулю λ_1 и λ_2 следует равенство нулю ξ_1 и ξ_2. И так как

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial u^i} - \widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{ii}\xi_\alpha - \lambda_{ii}\xi_3 = 0,$$

а $\lambda_{ii} \neq 0$, то $\xi_3 = 0$. Теорема доказана полностью.

§ 5. О решениях одной эллиптической системы дифференциальных уравнений

Вопрос об изометрическом погружении в риманово пространство двумерных замкнутых многообразий, бесконечно близких к погружаемым, который мы рассмотрим в следующем параграфе, будет редуцирован к рассмотрению системы линейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = au + bv + f,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = cu + dv + g.$$

Настоящий параграф посвящен изучению решений этой системы, рассматриваемой во всей плоскости xy. Весь необходимый вспомогательный материал, который нам при этом потребуется, можно найти в работах И. Н. Векуа [27], [28].

Пусть $U(z)$ — непрерывная комплексная функция комплексного переменного $z = x + iy$ в области G. Если функция $U(z)$ имеет в G непрерывные производные по x и y, то положим

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{i}{2}\frac{\partial U}{\partial y}.$$

Легко проверяется, что для области T в G, ограниченной спрямляемым контуром L,

$$\int\limits_T\int \frac{\partial U}{\partial \bar{z}}\, dT = \frac{1}{2i}\int\limits_L U(t)\, dt.$$

Это позволяет дать другое, не предполагающее существования производных определение операции $\partial/\partial\bar{z}$. Именно, положим

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = \lim_{L \to z} \frac{1}{2i\,|T|}\int\limits_L U(t)\, dt, \tag{1}$$

где $|T|$ — площадь области T, а $L \to z$ указывает на то, что контур L, ограничивающий область T, стягивается к точке z, неограниченно убывая по длине.

Очевидно, в случае непрерывно дифференцируемой по x и y функции $U(z)$ это определение дает то же значение для $\partial U/\partial\bar{z}$.

Обратное, вообще говоря, неверно, существование $\partial U/\partial \bar{z}$ в смысле второго определения не влечет за собой существования непрерывных производных $\partial U/\partial x$ и $\partial U/\partial y$.

Говорят, что функция $U(z)$ принадлежит классу $C_{\bar{z}}$, если она имеет непрерывную производную $\partial U/\partial \bar{z}$, определяемую равенством (1).

Важным примером функций класса $C_{\bar{z}}$ является функция

$$U(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{T} \frac{f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{t-z} \qquad (t = \xi + i\eta),$$

где $f(x, y)$ — интегрируемая и непрерывная в T функция. Ее производная

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = f(x, y).$$

Указанный частный случай функции класса $C_{\bar{z}}$ является в некотором смысле общим, как показывает теорема:

Функция класса $C_{\bar{z}}$ в области T, ограниченной спрямляемым контуром L, допускает представление

$$U(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L} \frac{U(t)\, dt}{t-z} - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{T} \frac{\partial U}{\partial \bar{t}}\, \frac{d\xi\, d\eta}{t-z}, \qquad z \in T.$$

Заметим, что первый интеграл в правой части равенства представляет собой аналитическую в T функцию.

Как уже указано выше, функция класса $C_{\bar{z}}$ может не иметь производных по x и y, но она удовлетворяет условию Гёльдера с любым положительным показателем $\alpha < 1$. Более точно, если $U(z) \in C_{\bar{z}}(G)$, и T — замкнутая область, принадлежащая G, то для любых $z_1, z_2 \in T$ и $\alpha < 1$

$$\frac{|U(z_1) - U(z_2)|}{|z_1 - z_2|^{\alpha}} \leqslant c\left(\|U\| + \left\|\frac{\partial U}{\partial \bar{z}}\right\|\right),$$

где знаком $\|\ \|$ обозначены максимумы модулей соответствующих функций, а c — постоянная, зависящая только от G, T и α.

Пусть имеем систему уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = au + bv,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = cu + dv.$$

Полагая

$$U(z) = u + iv,$$

$$A = \frac{1}{4}(a + d + ic - ib).$$

$$B = \frac{1}{4}(a - d + ic + ib),$$

мы можем записать ее в форме

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = AU + B\bar{U}. \tag{2}$$

Если понимать операцию $\partial/\partial\bar{z}$ в смысле определения (1), то уравнение (2), вообще говоря, не эквивалентно исходной системе.

Функции класса $C_{\bar{z}}$, удовлетворяющие уравнению (2), обладают многими замечательными свойствами. Отметим два таких свойства, которыми воспользуемся ниже:

1. Нули функции класса $C_{\bar{z}}$, удовлетворяющей уравнению (2), лежат изолированно.

2. Решение $U(z)$ уравнения (2) в области T допускает представление

$$U(z) = \varphi(z)\, e^{\omega(z)},$$

где $\varphi(z)$ — аналитическая в T функция, а

$$\omega(z) = -\frac{1}{\pi} \int_T\!\!\int \frac{A + B\dfrac{\bar{U}}{U}}{t - z}\, dT_t.$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = au + bv + f,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = cu + dv + g,$$

коэффициенты которой суть регулярные функции во всей плоскости xy, убывающие на бесконечности, как $1/\rho^2$, $\rho^2 = x^2 + y^2$. Эту систему можно записать в следующей компактной форме:

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = AU + B\bar{U} + F, \tag{3}$$

где

$$U = u + iv, \qquad \bar{U} = u - iv,$$
$$A = \frac{1}{4}(a + d + ic - ib),$$
$$B = \frac{1}{4}(a - d + ic + ib),$$
$$F = f + ig, \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Пусть U — решение уравнения (3), обладающее непрерывными производными и равное нулю на бесконечности. Функция

$U(z)$ $(z=x+iy)$ в любой конечной области T, ограниченной спрямляемым контуром L, допускает представление

$$U(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{U(t)\,dt}{t-z}-\frac{1}{\pi}\int_T\int \frac{\partial U}{\partial \bar t}\frac{dT_t}{t-z}.$$

Отсюда следует, что решение уравнения (3) удовлетворяет интегральному уравнению

$$U(z)+\frac{1}{\pi}\int_T\int \frac{A(t)\,U(t)+B(t)\,\overline{U}(t)}{t-z}\,dT=G(z),$$

где

$$G(z)=\Phi(z)-\frac{1}{\pi}\int_T\int \frac{F(t)}{t-z}\,dT,$$

причем Φ — голоморфная в T и непрерывная в $T+L$ функция, которая выражается интегралом типа Коши

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{U(t)}{t-z}\,dt.$$

Пусть T — круг радиуса R. При $R\to\infty$ все интегралы сходятся, причем $\Phi(z)\to 0$. И мы получаем следующее интегральное уравнение для функции $U(z)$:

$$U(z)+\frac{1}{\pi}\int_E\int \frac{\Omega(U)}{t-z}\,dE=G(z),$$

где

$$\Omega(U)=AU+B\overline{U},\qquad G(z)=-\frac{1}{\pi}\int_E\int \frac{F(t)\,dE}{t-z},$$

а интегрирование распространяется на всю плоскость.

Заметим, что так как $F(t)$ при $t\to\infty$ убывает, как $1/|t|^2$, то при $z\to\infty$ функция $G(z)$ убывает, как $1/|z|$.

Обозначим B^0 пространство непрерывных на всей плоскости z функций, равных нулю на бесконечности. Определим норму в этом пространстве обычным образом

$$\|U\|=\max_E|U|.$$

Покажем, что интегральное уравнение (4) имеет, и притом единственное, решение в пространстве B^0 для любой правой части из этого пространства.

Обозначим S оператор, сопоставляющий функции $U\subset B^0$ функцию V согласно равенству

$$V=\frac{1}{\pi}\int_E\int \frac{\Omega(U)}{t-z}\,dE.$$

Тогда уравнение (4) можно записать в следующей форме:

$$U+SU=G.$$

Для того чтобы доказать, что это уравнение разрешимо в B^0 для любой $G\subset B^0$, достаточно показать, что:

1. При $U\subset B^0$, $SU\subset B^0$.
2. Оператор S вполне непрерывен.
3. Если $U+SU=0$, то $U=0$.

Покажем, что оператор S действительно обладает указанными свойствами.

Первое свойство очевидным образом следует из того, что U ограниченная функция, а A и B при $t\to\infty$ убывает, как $1/|t|^2$.

Докажем второе свойство. Для вполне непрерывности оператора S достаточно показать, что он переводит ограниченное множество функций U в множество функций V, равномерно сходящихся к нулю при $z\to\infty$ и равностепенно непрерывных в любой конечной части плоскости.

То, что функции V равномерно стремятся к нулю при $z\to\infty$, следует из оценки

$$|\Omega(U)|\leqslant\|U\|c\mu,$$

где

$$\mu(z)=\begin{cases} 1 & \text{при} \quad |z|\leqslant 1, \\ \dfrac{1}{|z|^2} & \text{при} \quad |z|\geqslant 1, \end{cases}$$

а c — постоянная, зависящая только от A и B.

Докажем равностепенную непрерывность функций V. Положим

$$V_T=\frac{1}{\pi}\int\limits_T\int\frac{\Omega(U)}{t-z}\,dE, \qquad V_{E-T}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{E-T}\int\frac{\Omega(U)}{t-z}\,dE,$$

где T — круг $x^2+y^2\leqslant R^2$. При достаточно большом R норма $|V_{E-T}|<\varepsilon$ равномерно по всем U из данной ограниченной совокупности. Функции $V_T(z)$ в круге $x^2+y^2<R_1^2<R^2$ удовлетворяют условию Гёльдера с любым показателем α, $0<\alpha<1$, причем постоянная $c(\alpha)$ зависит только от R_1 и $\|\Omega(U)\|$, а следовательно, можно считать, что она одна и та же для всех функций U. Отсюда следует, что если z_1 и z_2 из круга $x^2+y^2<R_1^2$, $|z_1-z_2|<\delta$ и δ достаточно мало, то

$$|V(z_1)-V(z_2)|<\varepsilon$$

для всех функций V. И равностепенная непрерывность функций V доказана.

Докажем, наконец, что уравнение $U+SU=0$ в B^0 не имеет других решений, кроме $U=0$.

Непрерывное решение U уравнения

$$U+\frac{1}{\pi}\iint_E \frac{\Omega(U)}{t-z}\,dE=0$$

является решением уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial \bar z}=AU+B\bar U,$$

если производную $\partial U/\partial \bar z$ понимать в обобщенном смысле.

Решение уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial \bar z}=AU+B\bar U$$

допускает представление

$$U(z)=\varphi(z)\,e^{\omega(z)},$$

где $\varphi(z)$ — аналитическая функция, а

$$\omega(z)=-\frac{1}{\pi}\iint_E \frac{A+B\dfrac{\bar U}{U}}{t-z}\,dE.$$

Так как $\omega(z)$ ограничена, а $U(z)\to 0$ при $z\to\infty$, то $\varphi(z)\to 0$ при $z\to\infty$. Отсюда $\varphi(z)\equiv 0$, а следовательно, и $U(z)\equiv 0$.

Таким образом, доказано и третье свойство оператора S, а с ним и разрешимость уравнения (4).

Известно [27], что всякое обобщенное решение уравнения (3) является регулярным, если регулярны его коэффициенты. Именно, если коэффициенты n раз дифференцируемы и их n-е производные удовлетворяют условию Гёльдера в любой конечной части плоскости, то решение $U(z)$ будет $(n+1)$ раз дифференцируемым и производные его $(n+1)$-го порядка удовлетворяют условию Гёльдера с тем же показателем в любой конечной части плоскости.

Окончательный результат мы сформулируем в виде следующей леммы.

Лемма 1. *Система линейных уравнений*

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=au+bv+f,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=cu+dv+g,$$

где a, b, ..., g — *регулярные функции, убывающие при* $x^2+y^2\to\infty$, *как* $1/(x^2+y^2)$, *всегда имеет, и притом единственное, решение, равное нулю на бесконечности,*

Если $a, \ldots, g$ в любой конечной части плоскости n раз дифференцируемы и n-е производные их удовлетворяют условию Гёльдера, то решение в любой конечной части плоскости $(n+1)$ раз дифференцируемо и его $(n+1)$-е производные удовлетворяют условию Гёльдера с тем же показателем.

Оценим норму решения уравнения (4). Так как оператор S вполне непрерывен и однородное уравнение $U+SU=0$ в B^0 не имеет решения, кроме тривиального $(U\equiv 0)$, то оператор $(1+S)^{-1}$ в B^0 ограничен. Отсюда следует, что для нормы решения $U(z)$ уравнения

$$U+SU=F$$

имеет место оценка

$$\| U \| \leqslant K \| F \|,$$

где K — постоянная, зависящая только от функций A и B (но не зависящая от F).

Оценим теперь производные $U(z)$ внутри круга T радиуса R. В связи с этим рассмотрим следующую задачу. Пусть в круге T' радиуса R' определена функция $U(z)$ равенством

$$U(z) = \int\limits_{T'}\int \frac{\mu(t)}{t-z}\, dT',$$

где $\mu(t)$ непрерывна и удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α в T'. Дадим оценку для производных U и отношений Гёльдера этих производных относительно показателя α в круге T'' радиуса $R''<R'$.

Непосредственно проверяется, что

$$U(z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(-2\int\limits_{T'}\int \mu(t)\ln|t-z|\,dT'\right).$$

Таким образом, достаточно оценить вторые производные функции от z, стоящей под знаком производной в правой части равенства.

Пусть $h(z)$ — функция, обладающая производными до n-го порядка в область G, и пусть ее n-е производные удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α. Обозначим $\| h \|_{n,\alpha}^{G}$ максимум функции h, ее производных до n-го порядка и их отношений Гёльдера с показателем α в области G.

Из теории потенциала известно, что

$$\left\| \int\limits_{T'}\int \mu(t)\ln|t-z|\,dT' \right\|_{2,\alpha}^{T''} \leqslant c\,\| \mu \|_{\alpha}^{T'},$$

где c — постоянная, не зависящая от функции μ. Отсюда в нашем случае следует

$$\| U(z) \|_{1,\alpha}^{T''} \leqslant c \| \mu \|_{\alpha}^{T'}.$$

Если относительно $\mu(t)$, кроме непрерывности в замкнутой области T', ничего не предполагается, то для

$$U(z) = \iint\limits_{T'} \frac{\mu(t)}{t-z} \, dT'$$

можно дать оценку функции U и ее отношений Гёльдера

$$\| U \|_{\alpha}^{T''} \leqslant c \| \mu \|^{T'},$$

где постоянная c не зависит от вида функции μ.

Обратимся теперь к оценкам производных решения уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = AU + B\bar{U} + F.$$

Как было показано выше, во всей плоскости z

$$\| U \| \leqslant K \| F \|,$$

где K зависит только от A и B.

Оценим производные U и их отношения Гёльдера в круге T радиуса R. В круге T_0, содержащем T, $U(z)$ удовлетворяет уравнению

$$U(z) + \frac{1}{\pi} \iint\limits_{T_0} \frac{\Omega(U)}{t-z} \, dT_0 = G(z),$$

где

$$G(z_0) = \Phi(z) - \frac{1}{\pi} \iint\limits_{T_0} \frac{F(t)}{t-z} \, dT_0,$$

а Φ — аналитическая функция, определяемая интегралом типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_0} \frac{U(t)}{t-z} \, dt.$$

Отсюда следует, что в круге T_1, содержащемся в T_0 и содержащем T,

$$\| U \|_{1,\alpha}^{T_1} \leqslant c \left(\| U \|^{T_0} + \| F \|^{T_0} \right).$$

А в круге T_2, содержащемся в T_0 и содержащем T_1,

$$\| U \|_{1,\alpha}^{T_2} \leqslant c_1 \left(\| U \|^{T_0} + \| F \|_{\alpha}^{T_0} \right),$$

где постоянные c и c_1 зависят от $\| A \|_{\alpha}^{T_0}$, $\| B \|_{\alpha}^{T_0}$.

Дифференцируя уравнение для $U(z)$ по x и полагая $\partial U(z)/\partial x = U_1(z)$, получим

$$\frac{\partial U_1}{\partial \bar{z}} = AU_1 + B\bar{U}_1 + F_1,$$

где

$$F_1 = \frac{\partial F}{\partial x} + U\frac{\partial A}{\partial x} + \bar{U}\frac{\partial B}{\partial x}.$$

Записав интегральное уравнение для функции U_1 в круге T_3, содержащем T и содержащемся в T_2, получаем для нее оценку

$$\| U_1 \|_{1,\alpha}^{T_0} \leqslant c_2 (\| U \|^{T_0} + \| F \|_{1,\alpha}^{T_0}),$$

где c_2 зависит от $\| A \|_{1,\alpha}^{T_0}$, $\| B \|_{1,\alpha}^{T_0}$. Для производной $\partial U/\partial y$ оценка получается аналогично.

Дифференцируя уравнение для $U(z)$ дважды и переходя к интегральному уравнению для второй производной, оцениваем ее подобно предыдущим:

$$\| U_2 \|_{1,\alpha}^{T_0} \leqslant c_3 (\| U \|^{T_0} + \| F \|_{2,\alpha}^{T_0}).$$

Постоянная c_3 зависит от $\| A \|_{2,\alpha}^{T_0}$, $\| B \|_{2,\alpha}^{T_0}$.

Этот процесс получения оценок для последовательных производных U можно продолжать до производных n-го порядка, если A, B и F обладают $(n-1)$ производными, удовлетворяющими условию Гёльдера.

Так как $\| U \|^{T_0} \leqslant \| U \|^{E}$, а $\| U \|^{E}$ оценена через $\| F \|^{E}$, то все производные $U(z)$ оценены в конце концов через $\| F \|^{E}$ и $\| F \|_{n-1,\alpha}^{T_0}$. Окончательный результат сформулируем в виде леммы.

Лемма 2. *Пусть $U(z)$ — равное нулю на бесконечности решение уравнения*

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = AU + B\bar{U} + F,$$

коэффициенты которого убывают, как $1/|z|^2$ при $z \to \infty$ и в любой конечной части плоскости имеют производные n-го порядка, удовлетворяющие условию Гёльдера с показателем α.

Тогда в круге T, целиком содержащемся внутри круга T_0, имеет место оценка

$$\| U \|_{n+1,\alpha}^{T} \leqslant c (\| F \|^{E} + \| F \|_{n,\alpha}^{T_0}).$$

Постоянная c зависит от кругов T и T_0, коэффициентов A и B, но не зависит от F.

§ 6. Погружение многообразий, бесконечно близких к погружаемым

Пусть F — замкнутая, гомеоморфная сфере поверхность с положительной внешней кривизной K_e в римановом пространстве R. Пусть эта поверхность регулярно деформируется, переходя к моменту t в некоторую поверхность F_t с линейным элементом

$$ds_t^2 = ds^2 + t d\sigma_t^2,$$

где ds^2 — линейный элемент исходной поверхности. При $t \to 0$ форма $d\sigma_t^2$ стремится к некоторому пределу $d\sigma^2$, который однозначно определяется деформацией поверхности.

В настоящем параграфе мы будем заниматься обратной задачей. Именно, мы будем искать такую деформацию поверхности, которая вызывает заданное изменение линейного элемента с точностью до малых (по t) порядка выше первого, т. е. такую деформацию, которой указанным образом соответствует заданная форма $d\sigma^2$.

Введем на поверхности F сопряженно изотермическую координатную сеть u^i, как это было сделано в предыдущем параграфе, так, чтобы в заданной точке поверхности X_0 было $(u^1)^2 + (u^2)^2 = \infty$. В пространстве, вблизи поверхности, введем полугеодезическую параметризацию v^i.

Пусть F_t — регулярная деформация поверхности F, $v^i(u^1, u^2, t)$ — точка пространства, в которую к моменту t переходит точка (u^1, u^2) поверхности F. Линейный элемент ds_t^2 поверхности F_t получим, если в линейный элемент пространства $g_{ij} dv^i dv^j$ подставим $v^i = v^i(u_1, u_2, t)$. Тогда

$$g_{ij}\, dv^i\, dv^j = ds_t^2. \qquad (*)$$

Для того чтобы деформация F_t решала поставленную задачу, т. е. давала заданное изменение $d\sigma^2$ линейного элемента, надо, чтобы полная производная по t левой части равенства $(*)$ при $t=0$ была равна $d\sigma^2$. Отсюда получается уравнение

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial v^k}\, \xi^k\, du^i\, du^j + g_{ij}\, d\xi^i\, du^j + g_{ij}\, d\xi^j\, du^i = d\sigma^2, \qquad (**)$$

где ξ^k — компоненты вектора скорости перемещения точек поверхности F в начальный момент деформации,

$$\xi^k = \frac{\partial v^k}{\partial t}.$$

Если нам удастся найти регулярное векторное поле ξ, удовлетворяющее уравнению $(**)$, то этим наша задача будет

решена. Действительно, как легко видеть, деформация поверхности F, при которой ее точка (u^1, u^2) к моменту t переходит в точку пространства с координатами

$$v^1 = u^1 + t\xi^1, \quad v^2 = u^2 + t\xi^2, \quad v^3 = t\xi^3,$$

вызывает заданное изменение линейного элемента поверхности.

Левая часть уравнения $(**)$ совпадает с левой частью уравнения бесконечно малых изгибаний поверхности F. Это позволяет применить к левой части уравнения $(**)$ все те преобразования, которые в предыдущем параграфе были применены к уравнению бесконечно малых изгибаний. В частности, уравнение $(**)$ можно записать в форме эквивалентной системы

$$g_{\alpha j}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial u^i} + g_{i\alpha}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial u^j} + \xi^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial v^k} = \sigma_{ij}, \qquad i, j = 1, 2,$$

где σ_{ij} — коэффициент квадратичной формы $d\sigma^2$, откуда, вводя вместо контравариантных координат вектора ξ ковариантные координаты $\xi_i = g_{i\alpha}\xi^\alpha$, получим

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial u^j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial u^i} - 2\Gamma_{ij}^k \xi_k = \sigma_{ij}, \qquad i, j = 1, 2,$$

или

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial u^j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial u^i} - 2\tilde{\Gamma}_{ij}^k \xi_k - 2\nu\delta_{ij}\xi_3 = \sigma_{ij}, \qquad (***)$$

где $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ — символы Христоффеля для поверхности, а $\nu\delta_{ij}$ — коэффициенты второй квадратичной формы. В частности, для ξ_1 и ξ_2 получается система двух уравнений

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial u^1} - \frac{\partial \xi_2}{\partial u^2} - \left(\tilde{\Gamma}_{11}^\alpha - \tilde{\Gamma}_{22}^\alpha\right)\xi_\alpha = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2},$$
$$\frac{\partial \xi_1}{\partial u^2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial u^1} - 2\tilde{\Gamma}_{12}^\alpha \xi_\alpha = \sigma_{12}.$$

С другой стороны, дифференцируя уравнения $(***)$ по u^i, u^j, почленным сложением и вычитанием получим

$$-\Delta(\nu\xi_3) = \frac{\partial^2}{(\partial u^2)^2}\left(\tilde{\Gamma}_{11}^k \xi_k + \frac{\sigma_{11}}{2}\right) - 2\frac{\partial^2}{\partial u^1 \partial u^2}\left(\tilde{\Gamma}_{12}^k \xi_k + \frac{\sigma_{12}}{2}\right) + \\ + \frac{\partial^2}{(\partial u^1)^2}\left(\tilde{\Gamma}_{22}^k \xi_k + \frac{\sigma_{22}}{2}\right).$$

Мы составили уравнение, которому удовлетворяет поле скоростей ξ деформации поверхности, при которой ее линейный элемент претерпевает данное изменение $d\sigma^2$. Было отмечено, что

для определения указанной деформации достаточно найти поле ξ.

Найдем такое поле в предположении, что в начальной точке (X_0) $d\sigma^2=0$, $D\,d\sigma^2=0$, т. е. в предположении стационарности линейного элемента в точке X_0.

Компоненты ξ_1 и ξ_2 вектора скорости деформации удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial u^1}-\frac{\partial \xi_2}{\partial u^2}=(\tilde{\Gamma}_{11}^{\alpha}-\tilde{\Gamma}_{22}^{\alpha})\,\xi_\alpha+\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2},$$
$$\frac{\partial \xi_1}{\partial u^2}+\frac{\partial \xi_2}{\partial u^1}=2\tilde{\Gamma}_{12}^{\alpha}\xi_\alpha+\sigma_{12}.$$

Введем в эти уравнения в качестве неизвестных функций $\lambda_i=\vartheta\xi_i$, где ϑ положительная, достаточно регулярная функция, равная ρ^4 вне единичного круга. Тогда уравнения примут вид

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial u^1}-\frac{\partial \lambda_2}{\partial u^2}=a\lambda_1+b\lambda_2+\vartheta\,\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2},$$
$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial u^2}+\frac{\partial \lambda_2}{\partial u^1}=c\lambda_1+d\lambda_2+\vartheta\sigma_{12},$$

причем коэффициенты a, b, c, d убывают, как $1/\rho^2$ при $\rho\to\infty$ (см. § 4). Выясним, как ведут себя свободные члены при $\rho\to\infty$.

По предположению, $d\sigma^2=0$, $D\,d\sigma^2=0$ в точке X_0. Это значит, что в координатах $\bar{u}$ вблизи точки X_0 имеем $\bar{\sigma}_{ij}=O(\bar{\rho}^2)$. И так как

$$\sigma_{ij}=\bar{\sigma}_{\alpha\beta}\,\frac{\partial\bar{u}^\alpha}{\partial u^i}\,\frac{\partial\bar{u}^\beta}{\partial u^j},$$
$$\left|\frac{\partial\bar{u}^\lambda}{\partial u^\mu}\right|<\frac{1}{\rho^2},\qquad \rho\bar{\rho}=1,$$

то $\sigma_{ij}=O\left(\frac{1}{\rho^6}\right)$ вблизи точки X_0. Отсюда следует, что свободные члены уравнений при $\rho\to\infty$ убывают, как $1/\rho^2$.

Согласно лемме 1 § 5 существует решение λ_1, λ_2 системы, убывающее, как $1/\rho$ при $\rho\to\infty$. Это решение единственно. По λ_1 и λ_2 находим ξ_1 и ξ_2, а затем из любого уравнения системы

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial u^j}+\frac{\partial \xi_j}{\partial u^i}-2\tilde{\Gamma}_{ij}^{k}\xi_k-2\nu\delta_{ij}\xi_3=\sigma_{ij}$$

при $i=j$ однозначно находим ξ_3. Таким образом, мы нашли регулярное на всей поверхности, кроме, может быть, точки X_0, поле ξ, вызывающее заданное изменение линейного элемента $d\sigma^2$.

Выясним теперь, как ведет себя поле ξ вблизи точки X_0. С этой целью перейдем к координатам $\bar{u}$. Тогда вне точки X_0 компоненты $\bar{\xi}_1$ и $\bar{\xi}_2$ поля ξ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial\bar{\xi}_1}{\partial\bar{u}^1} - \frac{\partial\bar{\xi}_2}{\partial\bar{u}^2} - \left(\bar{\Gamma}^{\alpha}_{11} - \bar{\Gamma}^{\alpha}_{22}\right)\bar{\xi}_\alpha = \frac{\bar{\sigma}_{11} - \bar{\sigma}_{22}}{2},$$

$$\frac{\partial\bar{\xi}_1}{\partial\bar{u}^2} + \frac{\partial\bar{\xi}_2}{\partial\bar{u}^1} - 2\bar{\Gamma}^{\alpha}_{12}\bar{\xi}_\alpha = \bar{\sigma}_{12},$$

коэффициенты которых вблизи точки X_0 суть регулярные функции $\bar{u}_1$ и $\bar{u}_2$.

Функции $\bar{\xi}_1$ и $\bar{\xi}_2$ непрерывны вблизи точки X_0. Действительно,

$$\bar{\xi}_i = \xi_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial\bar{u}^i}.$$

Вблизи точки X_0 $\xi_\alpha = O(\bar{\rho}^5)$, а $\partial u^\alpha/\partial\bar{u}^i = O(1/\bar{\rho}^2)$. Отсюда видно, что $\bar{\xi}_i$ $(i=1, 2)$ при $\bar{\rho}\to 0$ стремится к нулю, даже как $\bar{\rho}^3$.

Положим

$$z = \bar{u}^1 + i\bar{u}^2, \qquad U(z) = \bar{\xi}_1 + i\bar{\xi}_2.$$

Тогда систему уравнений для $\bar{\xi}_1$ и $\bar{\xi}_2$ мы можем записать в комплексной форме

$$\frac{\partial U}{\partial\bar{z}} = AU + B\bar{U} + F,$$

где A, B, F — функции, известным образом выражающиеся через коэффициенты системы. В окрестности точки X_0 функции A, B, F, U непрерывны и сходятся к нулю. Но тогда непрерывна $\partial U/\partial\bar{z}$. Отсюда следует, что если положить $U(0)=0$, эта функция будет удовлетворять уравнению в окрестности точки X_0 $(z=0)$, включая точку X_0. И так как коэффициенты уравнения суть регулярные функции, то $U(z)$ — регулярная функция. Регулярность $\bar{\xi}_1$ и $\bar{\xi}_2$ влечет за собой регулярность $\bar{\xi}_3$, которая известным образом выражается через $\bar{\xi}_1$, $\bar{\xi}_2$ и их первые производные.

Таким образом, мы доказали существование регулярного поля ξ, вызывающего заданное изменение линейного элемента $d\sigma^2$. Так как вблизи точки X_0 функции $\bar{\xi}_1$ и $\bar{\xi}_2$ имеют порядок $O(\bar{\rho}^3)$, а следовательно, $\bar{\xi}_3 = O(\bar{\rho}^2)$, то в точке X_0 имеем $\xi=0$, $D(\xi)=0$. Степень регулярности поля ξ зависит от степени регулярности коэффициентов A, B, F (см. § 5).

Окончательный результат можно представить в виде следующей леммы.

Лемма. *Пусть $d\sigma^2$ — заданное изменение линейного элемента замкнутой, гомеоморфной сфере поверхности F с положительной внешней кривизной, удовлетворяющее в точке X_0 условиям $d\sigma^2=0$, $D\,d\sigma^2=0$.*

Тогда существует векторное поле ξ, вызывающее это изменение $d\sigma^2$ линейного элемента поверхности и удовлетворяющее в точке X_0 условию $\xi=0$, $D\xi=0$.

Поле ξ регулярно. Именно, если метрика поверхности n раз дифференцируема и n-е производные удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α, а $d\sigma^2$ дифференцируема $(n-1)$ раз и $(n-1)$-е *производные удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α, то поле ξ дифференцируемо n раз и его n-е производные удовлетворяют условию Гёльдера с тем же показателем.*

Оценим норму поля скоростей деформации.

Пусть на поверхности имеем некоторую функцию f (скалярную или векторную) точки поверхности. Если на поверхности ввести некоторую параметризацию u^i, то f становится функцией переменных u^i. Мы будем говорить, что функция f принадлежит классу $H_{n,\alpha}$, если в окрестности каждой точки X на поверхности можно ввести такую $(n+\alpha)$ раз дифференцируемую параметризацию, что f как функция координат на поверхности в окрестности точки X будет $(n+\alpha)$ раз дифференцируемой функцией, т. е. будут существовать n-е производные, удовлетворяющие условию Гёльдера с показателем α.

Мы будем говорить, что квадратичная форма $d\omega^2$, заданная на поверхности, принадлежит классу $H_{n,\alpha}$, если в некоторой $(n+\alpha)$ раз дифференцируемой параметризации поверхности ее коэффициенты $(n+\alpha)$ раз дифференцируемы.

Заметим, что если метрики пространства и поверхности с положительной внешней кривизной $(n+\alpha)$ раз дифференцируемы, то сопряженно изотермическая параметризация поверхности и соответствующая ей полугеодезическая параметризация пространства $(n+\alpha)$ раз дифференцируемы.

Функции класса $H_{n,\alpha}$ и квадратичные дифференциальные формы класса $H_{n,\alpha}$ образуют линейные пространства. Определим нормы для этих пространств.

Пусть $f\in H_{n,\alpha}$. Пусть $f_1(u^1,u^2)$ есть функция f в сопряженно изотермической параметризации u^i, а $f_2(\bar{u}_1,\bar{u}_2)$ — эта же функция в сопряженно изотермической параметризации $\bar{u}_i$. Обозначим $\|f_1\|_{n,\alpha}$ максимум функции f_1, ее производных до n-го порядка и отношений Гёльдера для n-х производных в круге $(u^1)^2+(u^2)^2\leqslant 1$, $\|f_2\|_{n,\alpha}$ — максимум функции f_2, ее производных до n-го порядка и отношений Гёльдера для n-х производных в круге $(\bar{u}^1)^2+(\bar{u}^2)^2\leqslant 1$. Определим норму в $H_{n,\alpha}$ равенством

$$\|f\|_{n,\alpha}=\max(\|f_1\|_{n,\alpha},\ \|f_2\|_{n,\alpha}).$$

Норма для пространства $H_{n,\alpha}$ квадратичных форм определяется аналогично с помощью коэффициентов форм.

Наша задача сейчас заключается в том, чтобы оценить норму векторного поля ξ деформации, вызывающей заданное изменение линейного элемента $d\sigma^2$ в зависимости от нормы $d\sigma^2$.

Во-первых, согласно лемме 2 § 5, получается оценка

$$|\xi_i| < c\|d\sigma^2\|, \qquad i=1,\ 2.$$

Отсюда получается

$$|\bar{\xi}_i| < \bar{c}\|d\sigma^2\|, \qquad i=1,\ 2,$$

так как внутри единичного круга $\bar{\rho} \leqslant 1$

$$\left|\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta}\right| \leqslant \bar{\rho}^2,$$

а

$$\bar{\xi}_i = \xi_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^i}.$$

Дальше производные от ξ_i $(i=1,\ 2)$ в круге $\rho \leqslant 1$ оцениваются методом, изложенным в § 5.

Получается

$$\|\xi_i\|_{k,\alpha} \leqslant c_1 \|d\sigma^2\|_{k-1,\alpha}, \qquad i=1,\ 2.$$

Аналогично, для функций $\bar{\xi}_i$ в круге $\bar{\rho} \leqslant 1$

$$\|\bar{\xi}_i\|_{k,\alpha} \leqslant c_2 \|d\sigma^2\|_{k-1,\alpha}.$$

Рассмотрим теперь компоненту $\xi_3 = \bar{\xi}_3$. Как было показано выше, она удовлетворяет уравнению

$$-\Delta(\nu\xi_3) = \frac{\partial^2}{(\partial u^2)^2}\left(\tilde{\Gamma}^k_{11}\xi_k + \frac{\sigma_{11}}{2}\right) + \ldots$$

Если считать функции ξ_1, ξ_2 известными (они оценены), то это уравнение для $\nu\xi_3$ будет уравнением Пуассона. Оценка для $|\xi_3|$, можно считать, известна. Что касается оценок для производных ξ_3, то они устанавливаются известным методом (см. § 5). И в круге $\rho \leqslant 1$ получается

$$\|\xi_3\|_{k,\alpha} \leqslant c_3 \|d\sigma^2\|_{k,\alpha}.$$

Для нас представляет особый интерес тот случай, когда форма $d\sigma^2$ имет вид $a\,d\lambda\,d\mu$, где a, λ, μ — некоторые функции переменных u^1 и u^2. Легко видеть, что третьи производные от λ и μ

в выражение $\Delta(\nu\xi_3)$ не входят. Поэтому для ξ_3 в этом случае получается лучшая оценка нормы. Именно

$$\|\xi_3\|_{k,\alpha} \leqslant c_3 \|a\|_{k,\alpha} \|d\lambda d\mu\|_{k-1,\alpha}.$$

Мы нашли векторное поле ξ, соответствующее заданному изменению линейного элемента $d\sigma^2$, удовлетворяющее в точке X_0 условиям $\xi=0$, $D\xi=0$. Теперь мы хотим найти такое поле ξ, чтобы в точке X_0 удовлетворялось условие $\xi=a$, где a — заданный вектор, отличный от нуля.

Построим на поверхности F регулярное векторное поле η, удовлетворяющее в точке X_0 условиям

$$\eta=a, \qquad d\sigma_\eta^2=0, \qquad D\,d\sigma_\eta^2=0,$$

где

$$d\sigma_\eta^2=\left(g_{\alpha j}\,\frac{\partial\eta^\alpha}{\partial u^i}+g_{i\alpha}\frac{\partial\eta^\alpha}{\partial u^j}+\eta^k\,\frac{\partial g_{ij}}{\partial v^k}\right)du^i\,du^j.$$

Очевидно, такое векторное поле строится с большой степенью произвола.

Пусть ξ — поле скоростей деформации, вызывающей изменение $d\sigma^2-d\sigma_\eta^2$ линейного элемента поверхности, удовлетворяющее в точке X_0 обычным условиям $\xi=0$, $D\xi=0$.

Рассмотрим теперь поле $\zeta=\xi+\eta$. Соответствующее ему изменение линейного элемента поверхности равно $d\sigma^2$, а в точке X_0 имеем $\zeta=a$. Очевидно,

$$\|\zeta\|_{k,\alpha} \leqslant c\left(\|d\sigma^2\|_{k,\alpha}+\|\eta\|_{k,\alpha}\right).$$

Как показано в § 4, замкнутая, гомеоморфная сфере поверхность с положительной внешней кривизной в римановом пространстве, закрепленная в некоторой точке X_0 вместе с пучком направлений на поверхности, исходящих из точки X_0, является жесткой. Аналитически это выражается в том, что уравнение бесконечно малых изгибаний поверхности

$$g_{\alpha j}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial u^i}+g_{i\alpha}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial u^j}+\xi^k\,\frac{\partial g_{ij}}{\partial v^k}=0$$

при условии, что в точке X_0 $\xi=0$ и $D\xi=0$, не имеет других решений, кроме $\xi\equiv 0$.

В случае евклидова пространства, если в точке X_0 никаких ограничений не накладывается, это уравнение допускает ненулевые решения. Все они имеют вид $\xi=a\times r+b$, где a и b — постоянные векторы, а r — вектор точки поверхности. Эти решения представляют собой поля скоростей движения поверхности как твердого тела и называются тривиальными.

В связи с этим, естественно, возникает вопрос, допускает ли уравнение бесконечно малых изгибаний в римановом пространстве ненулевые решения, если никаких требований на решение не накладывать, и сколько таких решений? Сейчас мы покажем, что такие решения существуют и имеют такой же произвол, как и в случае евклидова пространства.

Пусть a и b — любые два вектора в точке X_0 поверхности. Построим вдоль поверхности векторное поле η, удовлетворяющее в точке X_0 условиям $\eta=a$, $D\eta=b\times dx$. Такое поле строится с большим произволом.

Введем теперь для поля η, подобно тому как выше, квадратичную форму $d\sigma_\eta^2$. Мы утверждаем, что в точке X_0 для этой формы удовлетворяются условия $d\sigma_\eta^2=0$, $D\,d\sigma_\eta^2=0$.

В этом проще всего убедиться следующим образом. Построим в точке X_0 соприкасающееся евклидово пространство. В евклидовом пространстве условия $\eta=a$, $D\eta=b\times dx$ указывают на то, что η вблизи X_0 есть поле скоростей движения поверхности как целого с точностью до величин второго порядка малости. Отсюда следует, что $d\sigma_\eta^2$ и $D(d\sigma_\eta^2)$ в евклидовом пространстве равны нулю в точке X_0. А это значит, что в римановом пространстве в точке X_0 $d\sigma_\eta^2=0$, $D(d\sigma_\eta^2)=0$.

Построим теперь поле ξ скоростей деформации поверхности, вызывающей заданное изменение $d\sigma_\eta^2$ линейного элемента и удовлетворяющей в точке X_0 условиям $\xi=0$, $D\xi=0$. Очевидно, векторное поле $\zeta=\eta+\xi$ удовлетворяет уравнению бесконечно малых изгибаний, и в точке X_0 имеем $\zeta=a$, $D\zeta=b\times dx$.

Построенные таким образом поля бесконечно малых изгибаний ζ исчерпывают все возможные бесконечно малые изгибания поверхности. В самом деле, существует, очевидно, шесть линейно независимых решений вида ζ. Но не существует большего числа таких решений, так как для семи решений всегда можно указать такую линейную комбинацию ζ^*, для которой в точке X_0 будет $\zeta^*=0$, $D\zeta^*=0$. А тогда по теореме о жесткости (§ 4) $\zeta^*\equiv 0$. Может быть, среди указанных полей ζ будут тривиальные в том смысле, что при порождающих их деформациях стационарны не только расстояния между точками на поверхности, но и пространственные расстояния.

§ 7. *Изометрическое погружение многообразия, близкого к погружаемому*

В следующих трех параграфах мы получим основной результат этой главы. Именно, мы покажем, что замкнутое, гомеоморфное сфере риманово многообразие при некоторых условиях допускает изометрическое погружение в данное трехмерное

риманово пространство R. Это значит, что в римановом пространстве существует поверхность, изометричная данному многообразию.

Доказательство теоремы состоит из трех пунктов. Во-первых, будет построено непрерывное семейство многообразий M_t, содержащее заданное многообразие M, и многообразие M_0, заведомо погружаемое.

Во-вторых, будет доказано, что если многообразие M_t семейства погружаемо, то близкие к нему многообразия семейства также погружаемы.

Наконец, будет доказано, что если каждое из многообразий M_{t_n} семейства погружаемо и $t_n \to t^*$, то многообразие M_{t^*} погружаемо.

Очевидно, из этих трех фактов следует погружаемость заданного многообразия.

Настоящий параграф содержит изложение первых двух пунктов доказательства теоремы о погружении.

Пусть M — замкнутое, гомеоморфное сфере риманово многообразие с положительной гауссовой кривизной, A_0 — точка на нем и P_0 — пучок направлений в этой точке. Пусть R — риманово пространство, X_0 — точка в R, α — двумерная площадка в X_0 и U_0 — пучок направлений в площадке α с центром X_0. Пучки направлений P_0 и U_0 изометричны. Установим какое-нибудь изометрическое соответствие между направлениями пучков P_0 и U_0 (соответствие, сохраняющее углы между направлениями).

Будем предполагать, что многообразие M имеет достаточно регулярную (по крайней мере пять раз дифференцируемую) метрику. В таком случае оно изометрически погружается в евклидово пространство в виде регулярной (по крайней мере четырежды дифференцируемой) поверхности F (§ 10 гл. II). Пусть A — точка этой поверхности, соответствующая A_0.

Проведем в пространстве R из точки X_0 геодезическую γ перпендикулярно площадке α в любом из двух направлений. Зададим в пучке U_0 направление обхода таким образом, чтобы оно с направлением геодезической γ в точке X_0 образовало «правый винт». Не ограничивая общности, можно считать, что соответствующий обход пучка P поверхности F в точке A с внутренней нормалью поверхности тоже образует правый винт. В противном случае поверхность можно подвергнуть зеркальному отражению.

Возьмем на геодезической γ точку O_0 на расстоянии δ от X_0 и опишем в R сферу ω_0 радиуса δ с центром O_0. Если пространство R достаточно регулярно, то сфера ω_0 будет иметь достаточно регулярную метрику. Ее гауссова кривизна при достаточно малом δ будет заведомо положительна. Поэтому сферу ω_0

можно изометрически погрузить в евклидово пространство в виде регулярной поверхности ω. Пусть X — точка этой поверхности, соответствующая точке X_0.

Изометрическое соответствие направлений пучков P_0 и U_0 естественным образом порождает изометрическое соответствие пучков направлений на поверхностях F и ω в точках A и X соответственно.

Совместим поверхности F и ω точками A и X и соответствующими направлениями пучков. Не ограничивая общности, можно считать, что обе поверхности при этом располагаются по одну сторону их общей касательной плоскости в точке $O \equiv A \equiv X$. В противном случае одну из поверхностей зеркально отразим в этой плоскости.

При достаточно малом δ нормальная кривизна поверхности ω сколь угодно велика. Это довольно очевидно, поэтому мы ограничимся описанием идеи доказательства этого утверждения.

Для нормальной кривизны замкнутой выпуклой поверхности в евклидовом пространстве имеет место оценка

$$\varkappa \leqslant \sqrt{K_1 + \frac{K_{11}}{K_2}},$$

где K_1 — максимум, K_2 — минимум гауссовой кривизны, а K_{11} — максимум модуля второй производной от гауссовой кривизны по дуге геодезической (§ 8 гл. II).

Введем в окрестности точки O_0 в R нормальные римановы координаты x^i. Тогда линейный элемент пространства примет вид

$$ds^2 = \delta_{ij}\, dx^i\, dx^j + h_{ij}\, dx^i\, dx^j,$$

где h_{ij} — функции, равные нулю в точке O_0 вместе с первыми производными. Линейный элемент сферы мы получим, если положим

$$x^1 = \delta \cos u \cos v, \quad x^2 = \delta \cos u \sin v, \quad x^3 = \delta \sin u.$$

Получим

$$ds_\omega^2 = \delta^2 \left(du^2 + \cos^2 u\, dv^2 + \delta^2 (\ldots)\right).$$

Принимая во внимание, что производные h_{ij} ограничены некоторой постоянной, нетрудно оценить величины K_1, K_2 и K_{11}, входящие в оценку для нормальной кривизны. При этом получится

$$\varkappa \leqslant \frac{1 + \varepsilon(\delta)}{\delta},$$

где ε мало вместе с δ. Так как гауссова кривизна поверхности

$$K = \frac{1}{\delta^2}\left(1 + \varepsilon_1(\delta)\right),$$

то нормальная кривизна

$$\varkappa \geqslant \frac{1}{\delta}(1+\varepsilon_2(\delta)),$$

где $\varepsilon_2(\delta)$ мало вместе с δ.

Возьмем δ настолько малым, чтобы минимум нормальных кривизн ω был больше максимума нормальных кривизн F.

Пусть H_0 и H_1 — опорные функции поверхностей ω и F. Пусть F_t — поверхность с опорной функцией

$$H=(1-t)H_0+tH_1.$$

Установим гомеоморфизм между поверхностями F_t проектированием из точки S, лежащей на внутренней нормали ω в точке O.

Поверхности F_t суть замкнутые выпуклые поверхности. Покажем, что если гауссова кривизна поверхности F больше K_0, то гауссова кривизна любой поверхности F_t также больше K_0.

Пусть Z_0, Z_1 и Z_t — цилиндры, проектирующие поверхности ω, F и F_t в некотором направлении g. Нормальные кривизны этих цилиндров в точках с параллельными нормалями связаны соотношением

$$\frac{1}{\varkappa_t}=\frac{1-t}{\varkappa_0}+\frac{t}{\varkappa_1}.$$

Так как $\varkappa_0>\varkappa_1$, то $\varkappa_t>\varkappa_1$. Отсюда следует, что гауссовы кривизны поверхностей F_t и F в точках с параллельными нормалями связаны неравенством

$$K_t \geqslant K_1.$$

И так как $K_1 \geqslant K_0$, то $K_t \geqslant K_0$.

Определим на поверхности F семейство метрик, сопоставляя в качестве расстояния между двумя произвольными точками X и Y расстояние между соответствующими точками поверхности F_t. Таким образом, мы получаем непрерывное семейство римановых многообразий M_t. Многообразие M_1 совпадает с заданным многообразием M, а многообразие M_0 заведомо допускает изометрическое погружение в R.

Введем на поверхности F какую-нибудь систему координат u^i. Пусть ds_t^2 — линейный элемент многообразия M_t в этих координатах. Покажем, что в точке O метрика $d\sigma_t^2=ds_t^2-ds_0^2$ при любом t удовлетворяет условию $d\sigma_t^2=0$, $D\,d\sigma_t^2=0$. Это следует из того, что касательная плоскость для каждой из поверхностей F_t при соответствии, которое устанавливается проектированием из точки S, есть соприкасающееся евклидово пространство.

Предположим, риманово многообразие M_{t_0} допускает изометрическое погружение в риманово пространство R в виде

некоторой регулярной поверхности Φ_{t_0} причем выполняются следующие условия:

1. Точке O многообразия M_{t_0} соответствует по изометрии точка X_0 пространства.

2. Поверхность Φ_{t^0} касается двумерной площадки α в X_0 и внутренняя нормаль Φ_{t^0} является полукасательной к геодезической γ в точке X_0.

3. Соответствующие направления в площадке α и на поверхности Φ_{t_0} совпадают.

Поясним третье условие. Пучок направлений поверхности F в точке O изометрически отражен на пучок направлений в площадке α. Пучки направлений M_t в точке O поставлены в изометрическое соответствие гомеоморфизмом этих многообразий друг на друга, который в точке O для пучков является изометрическим. Таким образом, между пучками направлений в площадке α и на многообразии M_t в точке O установлено изометрическое соответствие. В условии 3 имеется в виду это соответствие пучков.

Наша задача сейчас заключается в том, чтобы доказать, что при t, близком к t_0, многообразие M_t тоже допускает изометрическое погружение в R в виде регулярной поверхности Φ_t, удовлетворяющей условиям 1, 2, 3.

Предполагая, что поверхность Φ_t действительно существует и близка к Φ_{t_0}, составим для нее уравнение. Для этого введем сначала в окрестности Φ_{t_0} систему координат v^i, не имеющую особенностей и притом одну и ту же во всей этой окрестности. Такую систему координат можно ввести, например, следующим образом.

Пусть $\bar{\Phi}_{t_0}$ — поверхность евклидова пространства E, изометричная Φ_{t_0}. Отобразим окрестность поверхности $\bar{\Phi}_{t_0}$ евклидова пространства E на окрестность поверхности Φ_{t_0} в римановом пространстве. Пусть $\bar{X}$ — произвольная точка поверхности $\bar{\Phi}_{t_0}$. Сопоставим ей соответствующую по изометрии точку поверхности Φ_{t_0}. Проведем в точке $\bar{X}$ нормаль к поверхности $\bar{\Phi}_{t_0}$, а в точке X геодезическую нормаль поверхности Φ_{t_0}. Сопоставим друг другу точки нормалей, равноудаленные от $\bar{X}$ и X соответственно, расположенные одновременно внутри поверхностей или вне их. Система координат v^i в римановом пространстве, соответствующая декартовой системе координат евклидова пространства при описанном отображении, очевидно, не имеет особенностей. Более того, в этой системе координат линейный элемент пространства вдоль поверхности Φ_{t_0} имеет вид $\delta_{ij}dv^i dv^j$.

Обратимся теперь к выводу уравнения для поверхности Φ_t. Пусть X — произвольная точка поверхности Φ_{t_0}, $v_0^i(X)$ — ее координаты, а $v^i(X)$ — координаты соответствующей точки

поверхности Φ_t. Положим
$$\xi^i(X) = v^i(X) - v_0^i(X).$$

Если функции $v^i(X)$ подставить в линейный элемент пространства, то мы получим линейный элемент поверхности Φ_t:
$$g_{ij}\,dv^i\,dv^j = ds_t^2. \qquad (*)$$

По формуле Тейлора с остаточным членом
$$g_{ij} = g_{ij}^0 + \frac{\partial g_{ij}^0}{\partial v^k}\xi^k + c_{ij\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta.$$

Вводя это представление для g_{ij} в уравнение $(*)$ и замечая, что
$$dv^i = dv_0^i + d\xi^i,$$
получим
$$g_{ij}^0\,d\xi^i\,dv_0^j + g_{ij}^0\,dv_0^i\,d\xi^j + \xi^k\frac{\partial g_{ij}^0}{\partial v^k}\,dv_0^i\,dv_0^j = d\sigma_t^2 + \Omega, \qquad (**)$$
где
$$d\sigma_t^2 = ds_t^2 - ds_{t_0}^2,$$
а выражение Ω имеет вид
$$\Omega = a_{ij}\xi^i\xi^j + a'_{ij}\xi^i\,d\xi^j + a''_{ij}\,d\xi^i\,d\xi^j.$$

Заметим, что если левую часть уравнения $(**)$ приравнять нулю, то получим уравнение бесконечно малого изгибания поверхности. Если же правую часть считать известной квадратичной формой, заданной на поверхности, то оно представляет собой уравнение поля скоростей деформации, вызывающей заданное изменение линейного элемента поверхности.

Докажем теперь, что поверхность Φ_t для t, близких к t_0, действительно существует.

Обозначим
$$L\xi = g_{ij}^0\,d\xi^i\,dv_0^j + g_{ij}^0\,dv_0^i\,d\xi^j + \xi^k\frac{\partial g_{ij}^0}{\partial v^k}\,dv_0^i\,dv_0^j.$$

Тогда уравнение для поверхности Φ_t можно записать в виде
$$L\xi = d\sigma_t^2 + \Omega. \qquad (***)$$

Построим последовательность векторных полей ξ_n следующим образом. Поле ξ_1 удовлетворяет уравнению
$$L\xi = d\sigma_t^2$$

и условиям $\xi_1=0$, $D\xi_1=0$ в точке X_0. Существование поля ξ_1 гарантируется леммой § 6. Подставим теперь в Ω компоненты поля ξ_1 и определим поле ξ_2 из уравнения

$$L(\xi) = d\sigma_t^2 + \Omega(\xi_1),$$

удовлетворяя, кроме того, в точке X_0 условиям

$$\xi_2=0, \qquad D\xi_2=0.$$

Существование ξ_2 также гарантируется упомянутой леммой, так как из $\xi_1=0$, $D\xi_1=0$ в точке X_0 следует

$$\Omega(\xi_1) = 0, \qquad D\Omega(\xi_1) = 0$$

в этой точке. Аналогично определяются векторные поля $\xi_3, \xi_4, \ldots$

Мы утверждаем, что последовательность решений ξ_n при достаточно малом $|t - t_0|$ сходится к решению уравнения

$$L\xi = d\sigma_t^2 + \Omega(\xi),$$

которое в точке X_0 удовлетворяет условиям $\xi=0$, $D\xi=0$.

Покажем сначала, что последовательность ξ_n ограничена.

В § 6 были получены оценки для нормы скоростей деформации поверхности при заданном изменении ее метрики. Иными словами, даны оценки нормы решения уравнения

$$L\xi = d\sigma^2.$$

Применяя полученный результат к случаю

$$d\sigma^2 = d\sigma_t^2 + \Omega(\xi_1)$$

и принимая во внимание характер зависимости Ω от ξ_1, получим

$$|\xi|_{k,\alpha} \leqslant c \| d\sigma_t \|_{k,\alpha} + c(\varepsilon) \| \xi_1 \|_{k,\alpha}^2.$$

Очевидно, при $\varepsilon \to 0$ коэффициент $c(\varepsilon)$ во всяком случае не возрастает, а при $t \to t_0$ величина $\|d\sigma_t\|_{k,\alpha} \to 0$. Отсюда следует, что при достаточно малых ε и $|t - t_0|$ будет

$$2c \| d\sigma_t^2 \| < \varepsilon, \quad 2\varepsilon c(\varepsilon) < 1.$$

Если выбрать ε и t таким образом, то, как легко проверить, для всех n

$$\| \xi_n \|_{k,\alpha} < \varepsilon,$$

и ограниченность ξ_n доказана.

Покажем теперь, что при достаточно малом $|t - t_0|$ последовательные приближения ξ_n сходятся. Имеем

$$L\xi_{n+1} = d\sigma_t^2 + \Omega(\xi_n),$$

$$L\xi_n = d\sigma_t^2 + \Omega(\xi_{n-1}).$$

Вычтем эти равенства почленно. Получим

$$L(\xi_{n+1} - \xi_n) = \Omega(\xi_n) - \Omega(\xi_{n-1}),$$

откуда, снова принимая во внимание форму зависимости Ω от ξ, получим

$$\| \xi_{n+1} - \xi_n \|_{k,\alpha} \leqslant \bar{c}(\varepsilon) \| \xi_n - \xi_{n-1} \|_{k,\alpha},$$

где постоянная $\bar{c}(\varepsilon)$ сколь угодно мала, если достаточно мало ε. Выберем ε настолько малым, чтобы $\bar{c}(\varepsilon) < 1$. Тогда, очевидно, последовательность ξ_n сходится. Если $k \geqslant 1$, то $\xi \equiv \lim \xi_n$ удовлетворяет в точке X_0 условиям $\xi = 0$, $D\xi = 0$. А следовательно, для поверхности Φ_t, задаваемой уравнениями $v^i = v_0^i + \xi^i$, удовлетворяются условия 1, 2, 3 расположения относительно двумерной площадки α в точке X_0.

Покажем теперь, что при достаточно малых $|t - t_0|$ и $\|\xi\|_{k,\alpha}$ поверхность Φ_t определяется однозначно. Допустим, существуют две поверхности Φ_t и $\tilde{\Phi}_t$. Имеем

$$L\xi = d\sigma_t^2 + \Omega(\xi),$$
$$L\tilde{\xi} = d\sigma_t^2 + \Omega(\tilde{\xi}).$$

Вычитая эти равенства почленно и замечая, что

$$\| \Omega(\xi) - \Omega(\tilde{\xi}) \|_{k,\alpha} \leqslant \bar{c} \| \xi - \tilde{\xi} \|_{k,\alpha},$$

получим

$$\| \xi - \tilde{\xi} \|_{k,\alpha} \leqslant \bar{c} \| \xi - \tilde{\xi} \|_{k,\alpha}.$$

Если $|t - t_0|$, $\|\xi\|_{k,\alpha}$, $\|\tilde{\xi}\|_{k,\alpha}$ достаточно малы, то $\bar{c}$ мало, в частности $\bar{c} < 1$, и неравенство возможно только при $\xi - \tilde{\xi} \equiv 0$. Таким образом, мы получаем следующую лемму.

Лемма 1. *Если многообразие M_{t_0} изометрически погружаемо в R, то близкие к нему многообразия M_t также погружаемы, и притом единственным образом, в классе близких поверхностей.*

Сейчас мы рассмотрим задачу, которая аналитически подобна предыдущей, но имеет другое геометрическое содержание. Мы погружали изометрически многообразие M_t, близкое к M_{t_0}, соблюдая при этом одно и то же краевое условие в точке X_0, в частности требовалось, чтобы поверхность Φ_t проходила через точку X_0 пространства.

Теперь мы будем предполагать, что многообразие M_t изометрично M_{t_0}, но краевое условие в точке X_0 непрерывно зависит от параметра t. Это условие заключается в следующем:

1′. $\xi = \xi(X_0, t)$ задает регулярную кривую в пространстве, исходящую из точки X_0 и перпендикулярную поверхности Φ_{t_0}.

2′. При каждом t, близком к t_0, в точке X_0 должно быть $\xi=\eta$, $D\xi=D\eta$, где $\eta(X,t)$ — заданная регулярная вектор-функция X и t, удовлетворяющая в точке X_0 условиям

$$L\eta-\Omega(\eta)=0, \qquad D(L\eta-\Omega(\eta))=0,$$

$$\|\eta\|_{k,\alpha}\to 0 \quad \text{при} \quad t\to t_0.$$

Мы утверждаем, что при достаточно малом $|t-t_0|$ существует непрерывно зависящее от t решение $\xi(X,t)$ уравнения погружения

$$L\xi-\Omega(\xi)=0,$$

удовлетворяющее условиям 1′, 2′. Решение $\xi(X,t)$ задает непрерывное изгибание поверхности Φ_{t_0}, при котором ее двумерный элемент точки X_0 заданным образом движется вдоль некоторой кривой.

Для доказательства введем вместо ξ вектор-функцию ζ, связанную с ξ равенством

$$\xi-\eta=\zeta.$$

Так как $\xi^i=v^i-v_0^i$, то $\zeta^i=v^i-v_0^i-\eta^i$. Положим $v_0^i-\eta^i=v_\eta^i$. Тогда

$$\zeta^i=v^i-v_\eta^i.$$

Для ζ можно составить уравнение непосредственно так, как это, было сделано для ξ. Только теперь роль v_0^i будет играть v_η^i и уравнение будет иметь точно такую же форму:

$$L_\eta\zeta=d\sigma_\eta^2+\Omega_\eta(\zeta),$$

где

$$L_\eta\zeta=g_{ij}^\eta\,d\zeta^i\,dv_\eta^j+g_{ij}^\eta\,dv_\eta^i\,d\zeta^j+\zeta^k\frac{\partial g_{ij}^\eta}{\partial v^k}\,dv_\eta^i dv_\eta^j,$$

$$\Omega_\eta(\zeta)=a_{ij}^\eta\zeta^i\zeta^j+a_{ij}^{\prime\eta}\zeta^i\,d\zeta^j+a_{ij}^{\prime\prime\eta}\,d\zeta^i\,d\zeta^j,$$

а

$$d\sigma_\eta^2=g_{ij}^\eta\,dv_\eta^i\,dv_\eta^j.$$

При $X=X_0$ имеем $\zeta=0$, $D\zeta=0$.

К решению этой задачи мы также применим метод последовательных приближений. Именно, мы построим последовательность векторных полей ζ_k следующим образом. Поле ζ_1 найдем из уравнения

$$L_\eta\zeta=d\sigma_\eta^2$$

при условии, что в точке X_0 имеем $\zeta_1=0$, $D\zeta_1=0$. Это поле существует, так как представляет собой поле скоростей деформации поверхности Φ_η:

$$v^i=v_0^i+\eta^i,$$

соответствующее заданному изменению $d\sigma_\eta^2$ линейного элемента. Заметим, что в силу условий, наложенных на η, при $X=X_0$

$$d\sigma_\eta^2=0,\ D\,d\sigma_\eta^2=0.$$

Каждое следующее поле строится через предыдущее. Именно, ζ_n удовлетворяет уравнению

$$L_\eta\zeta_n=d\sigma_\eta^2+\Omega_\eta(\zeta_{n-1}).$$

Для доказательства ограниченности, а затем сходимости приближений ζ_n можно применить те же соображения, что и для ξ_n. При этом, однако, надо иметь в виду следующее. Постоянная c в оценке норм

$$\|\zeta_{n+1}-\zeta_n\|_{k,\alpha}\leqslant\bar{c}_n\|\zeta_n-\zeta_{n-1}\|_{k,\alpha},$$

так же как и в других оценках подобного рода, зависит от поля η. Поэтому для доказательства ограниченности и сходимости ζ_n пришлось потребовать, чтобы $\|\eta\|_{k,\alpha}\to 0$ при $t\to t_0$.

Покажем, что если это условие для η выполняется, то необходимые оценки норм, обеспечивающие сходимость последовательных приближений, действительно могут быть получены. Для этого, очевидно, достаточно показать, что для решения уравнения

$$L_\eta\zeta=d\sigma^2$$

имеет место оценка

$$\|\zeta\|_{k,\alpha}\leqslant c\,\|d\sigma^2\|_{k,\alpha},$$

где постоянная c—одна и та же для всех η при малом $|t-t_0|$.

Имеем

$$L\zeta=d\sigma^2+(L\zeta-L_\eta\zeta).$$

Отсюда

$$\|\zeta\|_{k,\alpha}\leqslant c'\|d\sigma^2\|_{k,\alpha}+\varepsilon(t)\|\zeta\|_{k,\alpha}.$$

Величина $\varepsilon(t)\to 0$ при $t\to t_0$, так как $\|\eta\|_{k,\alpha}\to 0$. Следовательно,

$$\|\zeta\|_{k,\alpha}\leqslant\frac{c'}{1-\varepsilon(t)}\|d\sigma^2\|_{k,\alpha}.$$

Итак, если $\|\eta\|_{k,\alpha}\to 0$ при $t\to t_0$, то для решения уравнения

$$L_\eta\zeta=d\sigma^2,$$

удовлетворяющего в точке X_0 условиям $\zeta=0$, $D\zeta=0$, имеет место оценка нормы

$$\|\zeta\|_{k,\alpha}\leqslant c\|d\sigma^2\|_{k,\alpha},$$

где постоянная c не зависит от $d\sigma^2$ и одна и та же для всех η при достаточно малом $|t-t_0|$.

Отсюда следует, что последовательные приближения ζ_n при малом $|t-t_0|$ сходятся к решению уравнения

$$L_\eta \zeta = d\sigma_\eta^2 + \Omega_\eta(\zeta),$$

и это решение в точке X_0 удовлетворяет условиям 1′, 2′. Решение в классе близких к нему единственно.

В заключение построим пример векторного поля $\eta(X, t)$.

Проведем из точки X_0 поверхности Φ_{t_0} в римановом пространстве регулярную кривую γ, перпендикулярную Φ_{t_0} в точке X_0. Отобразим достаточно малую окрестность поверхности Φ_{t_0} в евклидово пространство E, удовлетворяя при этом следующим условиям:

1. Образом поверхности Φ_{t_0} должна быть поверхность $\overline{\Phi}_{t_0}$ изометричная Φ_{t_0}.

2. Пространство E для R должно быть соприкасающимся вдоль кривой γ.

Очевидно, построить такое отображение не составляет труда. Действительно, отображение, удовлетворяющее второму условию, хорошо известно, отображение, удовлетворяющее первому условию, нами построено, так что нужно регулярно соединить эти два отображения.

Введем теперь в окрестности поверхности Φ_{t_0} в R координатную сеть v^i, соответствующую декартовой сети пространства E. Пусть теперь поверхность $\overline{\Phi}_{t_0}$ параллельно сдвигается вдоль кривой $\bar{\gamma}$ (образа кривой γ) так, что ее точка v движется вдоль этой кривой. Обозначим $\eta^i(X, t)$ изменение к моменту t координат точки поверхности $\overline{\Phi}_{t_0}$, соответствующей по изометрии точке X поверхности Φ_{t_0}.

Пусть ds^2 — линейный элемент многообразия M_{t_0}, $\bar{g}_{ij}dv^i dv^j$ — линейный элемент пространства E, $g_{ij}dv^i dv^j$ — линейный элемент пространства R. Тогда для поверхности $\overline{\Phi}_t$ евклидова пространства, полученной сдвигом $\overline{\Phi}_{t_0}$, имеем

$$\bar{g}_{ij}\, dv^i\, dv^j\,|_{\overline{\Phi}_t} - ds^2 \equiv 0.$$

Отсюда для соответствующей поверхности Φ_t риманова пространства (задаваемой теми же уравнениями в координатах v^i) в точке $X_0(t)$ на кривой γ будет

$$g_{ij}\, dv^i\, dv^j\,|_{\Phi_t} - ds^2 = 0,$$

$$D\left(g_{ij}\, dv^i\, dv^j\,|_{\Phi_t} - ds^2\right) = 0.$$

Очевидно, $\|\eta\|_{k,\,\alpha} \to 0$ при $t \to t_0$.

Таким образом, имеет место следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть F — замкнутая поверхность с положительной внешней и внутренней кривизной, γ — регулярная кривая, исходящая из точки X_0 поверхности, перпендикулярная поверхности.*

Тогда существует непрерывное изгибание поверхности F, при котором ее двумерный элемент точки X_0 подвергается параллельному переносу вдоль кривой γ, причем это изгибание в классе близких поверхностей однозначно.

§ 8. Частичное решение проблемы об изометрическом погружении двумерного риманова многообразия в трехмерное

В этом параграфе будет доказано, что двумерное замкнутое многообразие M при некоторых предположениях, относящихся к его кривизне, допускает изометрическое погружение в данное трехмерное риманово пространство R в виде некоторой поверхности F.

Будет показано, что это погружение обладает такой же степенью произвола, как и погружение в евклидово пространство. При некоторых естественных дополнительных требованиях погружение однозначно.

Будет исследован также вопрос о регулярности погружения в зависимости от регулярности многообразия M и пространства R.

Пусть R — трехмерное риманово пространство с регулярной (четырежды непрерывно дифференцируемой) метрикой. Обозначим K_R^* неотрицательное число, обладающее следующим свойством: какова бы ни была регулярная (четырежды непрерывно дифференцируемая) замкнутая поверхность F с регулярной (четырежды непрерывно дифференцируемой) метрикой и гауссовой кривизной, большей K_R^*, нормальные кривизны ее ограничены некоторой постоянной, зависящей только от метрики пространства и метрики поверхности.

Существование числа K_R^* доказано в § 2. Именно, если в точке X риманова пространства R наибольшая среди ее кривизн в двумерных площадках есть K_1, а наименьшая K_2, то в качестве K_R^* можно взять число

$$K_R^* = \max_R \max\{K_1,\ 3(K_1 - K_2)\}.$$

Теорема 1. *Пусть R — трехмерное риманово пространство с регулярной (k раз дифференцируемой, $k \geqslant 6$) метрикой и G — компактная область в R, содержащая шар радиуса d с центром в точке O. Пусть M — двумерное замкнутое риманово многообразие с регулярной (k раз дифференцируемой)*

метрикой ds^2, внутренним диаметром d и гауссовой кривизной, большей $\overset{*}{K_G}$.

Тогда многообразие M допускает изометрическое погружение в R в виде регулярной ($(k-2)$ раза дифференцируемой) поверхности Φ, удовлетворяющей следующим условиям.

Данная точка S поверхности совпадает с точкой O пространства. Пучок направлений α_S в S совпадает с заданным пучком направлений α_O в O. Заданное направление обхода пучка направлений α_O с направлением внутренней нормали к Φ образует «правый винт».

Докажем эту теорему. Построим непрерывное семейство многообразий M_t, как это было сделано в предыдущем параграфе, содержащее данное многообразие M при $t=1$ и заведомо реализуемое многообразие M_0 (сфера достаточно малого радиуса, касающаяся двумерной площадки пучка α_0). Способ построения семейства многообразий M_t обеспечивает $(k-2)$-кратную дифференцируемость их метрик.

Согласно лемме предыдущего параграфа, если многообразие M_{t_0} погружаемо, то погружаемы и достаточно близкие ему многообразия, причем если поверхность Φ_{t_0}, изометричная M_{t_0}, $(k-2+\alpha)$ раз дифференцируема $(0<\alpha<1)$, то поверхности Φ_t для t, близких к t_0, тоже $(k-2+\alpha)$ раз дифференцируемы.

Таким образом, множество ω тех значений t, для которых многообразия M_t погружаемы, открыто. Покажем теперь, что это множество замкнуто.

В связи с этим сделаем два замечания относительно многообразий M_t. Во-первых, гауссова кривизна каждого многообразия M_t больше $\overset{*}{K_G}$, так как минимум гауссовой кривизны многообразия $M\equiv M_1$ меньше минимума гауссовой кривизны любого M_t по построению. Во-вторых, внутренний диаметр любого многообразия M_t меньше внутрениего диаметра M. Покажем это.

По построению многообразия M и M_t погружаются в евклидово пространство в виде поверхностей F и F_t, из коих первая содержит внутри себя вторую. Пусть X_t и Y_t — две точки поверхности F_t. Проведем из них внешние иормали до пересечения с поверхностью F в точках X и Y. Соединим точки X_t и Y_t кратчайшей γ_t на F_t, а точки X и Y кратчайшей γ на F. По теореме Буземана длина γ не меньше длины γ_t. Отсюда внутренний диаметр F_t не больше внутреннего диаметра F, следовательно, не больше d.

Пусть $t_1, t_2, \ldots$ — последовательность значений t из ω, сходящаяся к t_0. Покажем, что t_0 принадлежит ω, т. е. M_{t_0} погружаемо.

Пусть многообразие M_{t_n} погружается в R в виде поверхности F_n. Так как диаметр поверхности F_n меньше d, то она, проходя через O, содержится в области G. Далее, так как гауссова кривизна поверхности F_n больше K_G^*, то для производных пространственных координат по координатам поверхности до $(k-2)$-го порядка, а также для отношений Гёльдера $(k-2)$-х производных могут быть даны оценки в зависимости только от метрики пространства (в G) и метрики поверхности (§ 2 и 3). Очевидно, эти оценки можно считать равномерными по t_n (т. е. они одни и те же для всех поверхностей F_n).

Отсюда следует, во-первых, что из поверхностей F_n можно выделить сходящуюся подпоследовательность, во-вторых, предельная поверхность F_0 будет $(k-2+\alpha)$ раз дифференцируемой. Очевидно, поверхность F_0 изометрична M_{t_0} и соответствующим образом прилегает к двумерной площадке пучка направлений α_0 в точке O.

Таким образом, множество ω замкнуто. Так как ω открыто и замкнуто, то оно содержит весь отрезок $0 \leqslant t \leqslant 1$. В частности, $1 \in \omega$, т. е. M погружаемо указанным образом.

Теорема доказана.

Следствие. *Если многообразие M и пространство R имеют аналитические метрики, то погружение M в R аналитическое, т. е. поверхность Φ, существование которой устанавливается теоремой, аналитическая.*

Действительно, по доказанной теореме пространственные координаты по координатам на поверхности неограниченное число раз дифференцируемы. Так как, кроме того, пространственные координаты удовлетворяют эллиптической системе дифференциальных уравнений (§ 3), то они являются аналитическими функциями координат на поверхности, что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Изометрическое погружение многообразия M в пространство R, существование которого устанавливается теоремой 1, единственно.*

Допустим, кроме поверхности Φ, существование которой утверждается теоремой 1, есть еще поверхность Φ', изометричная M и удовлетворяющая условиям прилегания к двумерной площадке пучка α_0 в точке O.

Многообразие M_1 семейства M_t допускает реализацию Φ', следовательно, по лемме § 6 близкие к M_1 многообразия допускают реализации Φ'_t, близкие к Φ'.

Уменьшая непрерывно t, мы построим по крайней мере для t, близких к 1, непрерывное семейство поверхностей Φ'_t. Утверждается, что это непрерывное семейство можно продолжать до $t=0$.

Допустим, при $t=t_0$ имеем разрыв непрерывности. Определим Φ'_{t_0} как предельную поверхность для Φ'_t при $t\to t_0$ со стороны $t>t_0$. Тогда семейство Φ'_t $(t_0<t<1)$ непрерывно и по лемме § 6 его можно непрерывно продолжить за t_0. Таким образом, мы построим непрерывное семейство поверхностей Φ'_t $(0\leqslant t\leqslant 1)$, содержащее при $t=1$ поверхность Φ'. Аналогично, отправляясь от поверхности Φ, построим семейство поверхностей Φ_t $(0\leqslant t\leqslant 1)$, содержащее поверхность Φ при $t=1$.

Предположим, что поверхности Φ_{t_0} и Φ'_{t_0} совпадают. Тогда, так как поверхности Φ_t и Φ'_t при t, близком t_0, определяются единственным образом в классе поверхностей, близких к $\Phi_{t_0}\equiv\Phi'_{t_0}$, то они тоже совпадают, а следовательно, совпадают поверхности Φ и Φ', что невозможно. Остается предположить, что поверхности Φ_0 и Φ'_0 тоже различны.

Возьмем вблизи точки O на нормали пучка α_0 точку Q вне поверхностей Φ и Φ'. При достаточной близости ее к O она будет находиться вне поверхностей Φ_t и Φ'_t.

Деформируем пространство R в достаточно малой окрестности точки Q так, чтобы оно сохранило свою регулярность и вместе с тем было вблизи точки Q евклидовым. Это легко осуществить, например, следующим образом.

Введем в окрестности точки Q нормальные римановы координаты. Линейный элемент пространства будет

$$ds^2=\delta_{ij}\,dv^i\,dv^j+h_{ij}\,dv^i\,dv^j,$$

где h_{ij} — функции, равные нулю вместе с производными до второго порядка в точке Q. Определим теперь функцию $\mu(\rho)$, где ρ — расстояние от точки Q, условиями:

1) $\mu(\rho)$ дифференцируема k раз;
2) $\mu(\rho)=0$ при $\rho<\delta/2$;
3) $\mu(\rho)=1$ при $\rho>\delta$.

Определим теперь метрику пространства в окрестности точки Q линейным элементом

$$ds^2=\delta_{ij}\,dv^i\,dv^j+\mu(\rho)\,h_{ij}\,dv^i\,dv^j.$$

Очевидно, пространство осталось столь же регулярным (метрика k раз дифференцируема). А в $\delta/2$-окрестности точки Q оно евклидово.

Не ограничивая общности, можно считать, что гауссова кривизна поверхностей Φ_0 и Φ'_0 больше числа K^*_G, отвечающего деформированному пространству, а внутренние диаметры их малы.

Будем теперь переносить пучок α_0 параллельно вдоль нормали в точку Q. Этому переносу пучка α_0 соответствует непре-

рывное изгибание поверхностей Φ_0 и Φ'_0, устанавливаемое леммой § 7. Так мы снова получаем два непрерывных семейства Φ_τ и Φ'_τ.

Так как внутренние диаметры поверхностей Φ_0 и Φ'_0 можно считать сколь угодно малыми, то, когда α_0 достигнут точки Q, поверхности Φ_τ и Φ'_τ окажутся целиком в евклидовой окрестности точки Q и, следовательно, совпадут. После этого, подобно предыдущему, заключаем, что совпадают поверхности Φ_0 и Φ'_0, что невозможно. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть в области G риманова пространства имеем две изометричные замкнутые поверхности Φ и Φ', гауссовы кривизны которых больше K^*_G, а внутренние диаметры меньше δ. Пусть существует в G кривая, соединяющая две соответствующие по изометрии точки поверхностей Φ и Φ', удаленная от границы G на расстояние, большее δ.*

Тогда существует непрерывное изгибание поверхности Φ в Φ'.

Эта теорема очевидным образом следует из предыдущей.

Теорема 1 об изометрическом погружении замкнутого многообразия в риманово пространство позволяет получить различные теоремы о погружении незамкнутых многообразий.

Теорема 4. *Пусть G — компактная область риманова пространства, содержащая шар радиуса $2d$. Пусть M — двумерное риманово многообразие, гомеоморфное кругу и удовлетворяющее условиям:*

1) *внутренний диаметр M меньше d;*

2) *гауссова кривизна M всюду больше K^*_G;*

3) *геодезическая кривизна края M всюду положительна.*

Тогда существует изометрическое погружение M в G в виде поверхности Φ, причем если метрика пространства и многообразия k раз дифференцируемы ($k \geqslant 6$), то поверхность Φ по крайней мере $(k-2)$ раз дифференцируема.

Если метрики M и G аналитические, то Φ — аналитическая поверхность.

Возьмем два экземпляра многообразия M и «склеим» их вдоль края, приводя в соприкосновение соответствующие по изометрии точки. При этом мы получим замкнутое, гомеоморфное сфере многообразие. К сожалению, это многообразие не регулярно. Регулярность его нарушается вдоль линии склеивания.

В связи с этим мы будем приклеивать многообразия M не непосредственно друг к другу, а через промежуточный регулярный поясок $\overline{M}$ ширины δ. Не составляет труда задать на пояске $\overline{M}$ метрику таким образом, чтобы она регулярно (k раз дифференцируемым образом) примыкала к метрике многообразий M и чтобы ее гауссова кривизна была больше K^*_G.

Практически метрику на пояске можно задать следующим образом. Вдоль края многообразия M введем полугеодезические координаты u, v так, чтобы линии u были геодезические, перпендикулярные краю. В качестве параметра v возьмем дугу вдоль края. Линейный элемент M вдоль края будет

$$ds^2 = du^2 + \bar{g}\, dv^2.$$

Метрика за край M на поясок продолжается в такой же форме. Функция g подбирается из условия симметрии относительно прямой $u=\delta/2$, регулярности примыкания к заданной функции $\bar{g}(u, v)$ вдоль линии $u=0$ и условия

$$\frac{(\sqrt{g})_{uu}}{\sqrt{g}} > K_G^*,$$

которое выполнено для $\bar{g}(u, v)$.

Склеенное таким образом многообразие $\tilde{M}$ по теореме 1 изометрически погружается в G в виде $(k-2)$ раз дифференцируемой поверхности $\tilde{\Phi}$. На этой поверхности есть область, изометричная M. Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть R — трехмерное риманово пространство и M — двумерное риманово многообразие. Пусть X — произвольная точка R, а Y — произвольная точка M.*

Тогда, если гауссова кривизна M в точке Y больше K_X^*, то достаточно малая окрестность точки Y многообразия M допускает изометрическое погружение Φ в данную окрестность точки X пространства R.

Если метрики многообразия и пространства k раз дифференцируемы $(k \geqslant 6)$, то Φ — $(k-2)$ раза дифференцируемая поверхность.

Если метрики многообразия и пространства аналитические, то Φ — аналитическая поверхность.

Эта теорема следует из предыдущей, если ее применить к геодезическому кругу достаточно малого радиуса с центром Y.

§ 9. Еще раз об оценках нормальной кривизны для замкнутой выпуклой поверхности

Получение априорных оценок нормальных кривизн замкнутой, гомеоморфной сфере выпуклой поверхности в римановом пространстве является одним из центральных пунктов доказательства теоремы об изометрическом погружении в целом двумерного, гомеоморфного сфере риманова многообразия в трех-

мерное риманово пространство. Оценки, полученные в § 2, не дают полного решения этой проблемы. В известном смысле полное решение проблемы требует установления оценок нормальных кривизн поверхности при единственном условии — положительности внешней кривизны, т. е. при условии, что гауссова кривизна поверхности всюду больше кривизны пространства в двумерных площадках, касающихся поверхности.

В настоящем параграфе вопрос об оценках нормальных кривизн выпуклой поверхности будет решен в форме, обеспечивающей полное решение проблемы изометрического погружения двумерного риманова многообразия в трехмерное риманово пространство неположительной кривизны. Именно, мы докажем следующую теорему.

Теорема. *Если внешняя кривизна замкнутой, гомеоморфной сфере регулярной поверхности в полном римановом пространстве с неположительной кривизной строго больше нуля, то нормальные кривизны такой поверхности ограничены некоторой постоянной, зависящей только от метрики поверхности и метрики пространства.*

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, сделаем одно замечание по поводу ее формулировки. Как известно, в евклидовом пространстве замкнутость и положительность внешней кривизны поверхности обеспечивает ее гомеоморфность сфере. В римановом пространстве неположительной кривизны это, вообще говоря, неверно, что легко усматривается из следующего примера.

Возьмем в пространстве Лобачевского с кривизной $K_R = -1$ прямолинейный отрезок A_1A_2 и проведем три плоскости, перпендикулярные этому отрезку: σ_1 и σ_2 через концы отрезка, а σ_0 — через его середину. Обозначим R' область пространства, заключенную между плоскостями σ_1 и σ_2. Установим точечное соответствие между плоскостями σ_1 и σ_2, сопоставляя друг другу точки, симметричные относительно плоскости σ_0. Это соответствие, очевидно, является изометрическим. Если теперь отождествить соответствующие точки плоскостей σ_1 и σ_2, то из R' получается полное риманово пространство постоянной кривизны, равной -1. Прямолинейный отрезок A_1A_2 будет замкнутой геодезической в этом пространстве; обозначим ее γ.

Пусть F — геометрическое место точек пространства R', которые удалены от γ на расстояние ρ. Очевидно, F является гомеоморфной тору поверхностью. В силу симметрии наших построений F допускает транзитивную группу движений в себе, а следовательно, имеет постоянную гауссову кривизну. Так как полная кривизна поверхности, гомеоморфной тору, равна нулю, то F имеет нулевую гауссову кривизну, а следовательно, внешняя кривизна поверхности F равна единице, т. е. больше нуля.

Таким образом, требование, чтобы поверхность была гомеоморфна сфере, не вытекает из положительности внешней кривизны. Это требование является вместе с тем существенным, в чем можно убедиться на построенном примере. Действительно, поверхность F аналитическая, а ее внешняя кривизна равна единице. Однако никакой оценки для нормальной кривизны F в зависимости от метрики пространства и метрики поверхности получить нельзя, так как при убывании ρ поверхность F все время остается локально изометричной евклидовой плоскости, а максимум нормальной кривизны растет, как $1/\rho$.

Перейдем теперь к описанию доказательства теоремы.

Не ограничивая общности, мы можем считать пространство односвязным. В противном случае мы перейдем к универсальному накрывающему пространству. Как известно, односвязное риманово пространство с неположительной кривизной гомеоморфно евклидову пространству. Любые две его точки соединяются единственной геодезической, которая является кратчайшей. Как и в евклидовом пространстве, замкнутая поверхность с положительной внешней кривизной ограничивает выпуклое тело и, следовательно, является выпуклой поверхностью в обычном смысле.

Пусть F — замкнутая выпуклая поверхность с регулярной метрикой и положительной внешней кривизной, для которой надо установить оценки нормальных кривизн.

Прежде всего мы покажем, что внутри тела, ограниченного поверхностью F, можно указать точку O, которая удалена от поверхности на расстояние, не меньшее ρ_0, зависящее только от метрики поверхности и метрики пространства.

Действительно, возьмем внутри поверхности F какую-нибудь точку O_0. Пусть K_0 и K_1 — минимум и максимум внешней кривизны поверхности F, $K_0>0$, а d — ее внутренний диаметр. Рассмотрим все выпуклые поверхности, содержащие точку O_0 внутри, с внешними кривизнами, заключенными в пределах K_0, K_1, и диаметром, не превосходящим d.

Если наше утверждение неверно, то при любом n среди этих поверхностей найдется такая поверхность F_n, внутрь которой нельзя поместить шар радиуса $1/n$. Из поверхностей F_n можно выделить сходящуюся последовательность. Предельная поверхность F_0, очевидно, вырождается и представляет собой либо выпуклую область на некоторой вполне геодезической поверхности, либо отрезок геодезической, либо точку. В первом случае на F_0 есть точки с нулевой внешней кривизной, а это невозможно, так как внешние кривизны поверхностей F_n ограничены снизу положительным числом K_0. Во втором случае у поверхности F_n при большом n найдутся точки, близкие к

концам геодезического отрезка F_0 и со сколь угодно большими внешними кривизнами, что невозможно. То же относится к случаю вырождения F_0 в точку. Итак, во всех случаях мы приходим к противоречию, и утверждение доказано.

Введем теперь в пространстве R полярную геодезическую систему координат с центром в точке O и определим на поверхности функцию $\overline{w}(X)$ равенством

$$\overline{w}(X)=\frac{\bar{\varkappa}(X)}{(\cos\varphi(X))^{\mu}},$$

где $\bar{\varkappa}(X)$ — максимум нормальной кривизны поверхности в точке X, $\varphi(X)$ — угол, образуемый геодезическим лучом, идущим из точки O через точку X, и внешней нормалью поверхности, а μ — некоторая положительная постоянная.

Покажем, что $\varphi<\frac{\pi}{2}-\varepsilon$, где ε — положительная постоянная, зависящая только от ρ_1 и ρ_0 — максимума и минимума расстояний точек поверхности от полюса O и метрики пространства. Действительно, пусть X — произвольная точка поверхности F. Соединим ее кратчайшими с точками шара, центр которого в точке O, а радиус — ρ_0. Эти кратчайшие проходят внутри поверхности F и заполняют некоторый телесный конус с вершиной в точке X. Всякая геодезическая, исходящая из точки X и образующая угол, меньший некоторого α, с геодезической XO, принадлежит конусу, а следовательно, телу, ограниченному поверхностью F. Для величины угла α можно указать оценку снизу в зависимости от расстояния OX, радиуса ρ_0 и величин, определяемых метрикой пространства. Очевидно, $\varphi\leqslant\leqslant\pi/2-\alpha$. Утверждение доказано.

Так как $\cos\varphi\geqslant\sin\alpha>0$, то функция $\overline{w}(X)$ достигает абсолютного максимума в некоторой точке X_0 на поверхности F. При подходящем выборе постоянной μ для величины $\overline{w}(X_0)$ будет установлена оценка w_0 в зависимости от величин, определяемых метрикой пространства и поверхности. С установлением этой оценки мы получаем оценку нормальных кривизн $\varkappa$ в любой точке X поверхности по любому направлению:

$$\varkappa\leqslant w_0.$$

В § 3 была получена система уравнений, которой удовлетворяют пространственные координаты точки поверхности с данным линейным элементом ds^2 как функции координат u^i на поверхности (аналог уравнения Дарбу). В настоящем параграфе мы будем широко пользоваться этими уравнениями. В связи с этим напомним некоторые обозначения.

Пусть R — риманово пространство, в котором введена система координат v^i. В пространстве R рассматривается поверхность F с координатной сетью u^1, u^2 на ней. Пространственные координаты v^i точки поверхности являются некоторыми функциями координат u^i на поверхности:

$$v^i = v^i(u^1,\ u^2), \qquad i = 1,\ 2,\ 3.$$

Пусть e_i — векторы координатного триэдра в точке x пространства. Тогда

$$x_k = \frac{\partial x}{\partial u^k} = e_i \frac{\partial v^i}{\partial u^k}.$$

Обозначим $\overset{*}{e}_i$ вектор в точке x пространства, связанный с векторами e_i соотношениями

$$\overset{*}{e}_i e_k = \delta_{ik}.$$

Положим

$$\frac{\partial^2 v^\beta}{\partial u^i\, \partial u^j} = v^\beta_{ij}, \qquad \Gamma^\beta_{rs} \frac{\partial v^r}{\partial u^i} \frac{\partial v^s}{\partial u^j} - \tilde{\Gamma}^k_{ij} \frac{\partial v^\beta}{\partial u^k} = A^\beta_{ij},$$

где Γ^k_{ij} — символы Христоффеля для пространства, а $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$ — символы Христоффеля для поверхности. Если теперь обозначить через λ_{ij} $(i,\ j = 1,\ 2)$ коэффициенты второй квадратичной формы поверхности, то получаются следующие формулы:

$$v^k_{ij} + A^k_{ij} = \lambda_{ij}(n\overset{*}{e}_k) \qquad i,\ j = 1,\ 2,$$

где n — единичный вектор нормали поверхности.

Для скалярного произведения $(n\overset{*}{e}_k)$ имеет место формула

$$(n\overset{*}{e}_k) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}g}} \begin{vmatrix} g_{i\beta} \dfrac{\partial v^\beta}{\partial u^1}, & g_{i\alpha} \dfrac{\partial v^\alpha}{\partial u^2} \\ g_{j\beta} \dfrac{\partial v^\beta}{\partial u^1}, & g_{j\alpha} \dfrac{\partial v^\alpha}{\partial u^2} \end{vmatrix},$$

где $\tilde{g}$ и g — дискриминанты квадратичных форм $d\tilde{s}^2$ и ds^2 — линейных элементов поверхности и пространства, а индексы i, j различны и не равны k.

Обозначим, наконец, через K_i гауссову кривизну поверхности, через K_R — кривизну пространства в двумерной площадке, касающейся поверхности, и через $K_e = (K_i - K_R)$ — внешнюю кривизну поверхности.

Теперь мы можем записать систему уравнений, которой удовлетворяют пространственные координаты v^i точки поверхности как функции внутренних координат u^1 и u^2 на поверхности. Вот эта система:

$$(v^k_{11} + A^k_{11})(v^k_{22} + A^k_{22}) - (v^k_{12} + A^k_{12})^2 = K_e \tilde{g}\, (n\overset{*}{e}_k)^2.$$

Намечая доказательство теоремы, мы ввели вспомогательную функцию

$$\overline{w}(X) = \frac{\overline{\varkappa}(X)}{(\cos\varphi(X))^{\mu}}.$$

В ближайших рассмотрениях, чтобы сократить выкладки, мы положим

$$\overline{w} = \sigma\overline{\varkappa}.$$

Пусть X_0 — точка поверхности F, где функция $\overline{w}$ достигает максимума. Введем в окрестности этой точки на поверхности полугеодезическую параметризацию u^1, u^2. Для этого в направлении минимальной нормальной кривизны в точке X_0 проведем геодезическую γ и примем ее за линию $u^1=0$. За линии $u^2=\mathrm{const}$ примем геодезические, перпендикулярные γ, а за линии $u^1=\mathrm{const}$ — их ортогональные траектории. В качестве параметров u^1 и u^2 возьмем дуги вдоль координатных линий, проходящих через точку X_0. При такой параметризации поверхности ее линейный элемент будет

$$d\bar{s}^2 = (du^1)^2 + c^2(du^2)^2.$$

В точке X_0 имеем $c=1$, $c_u=c_v=0$, $c_{uv}=c_{vv}=0$, $c_{uu}=-K_i$. Все символы Христоффеля $\bar{\Gamma}^k_{ij}$, отвечающие введенной параметризации поверхности, в точке X_0 равны нулю.

Обозначим теперь $\varkappa(X)$ нормальную кривизну поверхности в точке X в направлении координатной линии u^1 и введем в рассмотрение функцию $w=\sigma\varkappa$. Так как $\varkappa(X) \leqslant \overline{\varkappa}(X)$, причем в точке X_0 достигается равенство, то функция w тоже достигает максимума в точке X_0. Поэтому, чтобы оценить $\overline{w}(X)$, достаточно оценить $w(X_0)$.

Введем в окрестности точки X_0 пространственную полугеодезическую параметризацию v^i следующим образом. В качестве координатной поверхности $v^3=0$ мы примем геодезическую в точке X_0 поверхность Φ, касающуюся поверхности F. На поверхности Φ введем полугеодезическую параметризацию v^1, v^2 на базе двух геодезических, исходящих из точки X_0 по главным направлениям поверхности F. Теперь в качестве координат v^1, v^2, v^3 точки пространства, близкой к X_0, мы берем снабженное знаком расстояние этой точки от поверхности Φ (координата v^3) и координаты v^1, v^2 основания геодезического перпендикуляра на поверхность Φ. Если воспользоваться формулами для символов Христоффеля в случае такого рода параметризации (§ 2), то легко заключить, что все символы Христоффеля в точке X_0 равны нулю.

В случае введенной нами параметризации пространства вектор e_3 единичный и совпадает с $\overset{*}{e}_3$. Поэтому $(n\overset{*}{e}_3)$ есть косинус

угла, образуемого поверхностью F с координатной поверхностью $v^3=\text{const}$. Отсюда следует, что $(n\overset{*}{e_3})$ есть отношение дискриминантов двух форм: $d\tilde{s}^2-(dv^3)^2$ и $d\tilde{s}^2$, т. е.

$$(n\overset{*}{e_3})^2=1-\left(\frac{\partial v^3}{\partial u^1}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial v^3}{\partial u^2}\right)^2.$$

Для того чтобы иметь некоторую аналогию с выкладками, проведенными в § 8 гл. V для шапок в пространстве Лобачевского, положим

$$A_{11}^3=\alpha,\quad A_{12}^3=\beta,\quad A_{22}^3=\gamma,\quad -K_e\tilde{g}\,(n\overset{*}{e_3})^2=\delta.$$

Первые и вторые производные функции $v^3(u^1, u^2)$ будем обозначать p, q, r, s, t. Тогда уравнение изгибания, отвечающее $k=3$, примет форму, сходную с уравнением Дарбу. Именно,

$$(r+\alpha)(t+\gamma)-(s+\beta)^2+\delta=0. \qquad (*)$$

Как указано выше, символы Христоффеля для поверхности и пространства в точке X_0 равны нулю. Отсюда следует, что в точке X_0

$$\alpha=0,\quad \beta=0,\quad \gamma=0,\quad \delta=-K_e,$$

и уравнение $(*)$ в этой точке принимает вид

$$rt-s^2=K_e.$$

Коэффициенты второй квадратичной формы поверхности в точке X_0 имеют следующие значения:

$$\lambda_{11}=r,\quad \lambda_{12}=s,\quad \lambda_{22}=t.$$

Так как в точке X_0 координатные линии на поверхности сопряжены, то $\lambda_{12}=0$. Поэтому в точке X_0

$$s=0,\quad t=\frac{K_e}{r}=O\left(\frac{1}{r}\right).$$

Продифференцируем уравнение $(*)$ в точке X_0 по u^1. Получим

$$(r_1+\alpha_1)\,t+(t_1+\gamma_1)\,r+\delta_1=0.$$

Отсюда

$$t_1+\gamma_1=-\frac{\delta_1+(r_1+\alpha_1)\,t}{r}.$$

Так как в точке X_0 символы Христоффеля для поверхности и пространства равны нулю, то производные α_1, β_1, γ_1 имеют порядок $O(1)$, а $\delta_1=(K_e)_1$. Поэтому

$$t_1+\gamma_1=-\frac{t}{r}(r_1+\alpha_1)+O\left(\frac{1}{r}\right).$$

Продифференцируем теперь уравнение (*) по u^1 дважды в точке X_0. Тогда получим

$$(r_{11}+\alpha_{11})(t+\gamma)+(t_{11}+\gamma_{11})(r+\alpha)+2(r_1+\alpha_1)(t_1+\gamma_1)-$$
$$-2(s+\beta)(s_{11}+\beta_{11})-2(s_1+\beta_1)^2+\delta_{11}=0.$$

Замечая, что $t_{11}=r_{22}$, $s_{11}=r_{12}$, $s=0$, $\alpha=\beta=\gamma=0$, и подставляя выражение для $t_1+\gamma_1$, будем иметь

$$(r_{11}+\alpha_{11})t+(r_{22}+\gamma_{22})r-2(r_1+\alpha_1)\left(\frac{t}{r}(r_1+\alpha_1)+O\left(\frac{1}{r}\right)\right)-$$
$$-2(r_2+\beta_1)^2+\delta_{11}=0.$$

Как было указано выше, первые производные α, β, γ в точке X_0 имеют порядок $O(1)$ из-за того, что символы Христоффеля равны нулю. По той же причине вторые производные α, β, γ имеют порядок не выше $O(r)$. Действительно, эти производные содержат производные v_{ij}^k линейно, а v_{ij}^k имеют порядок λ_{ij}, т. е. не более $O(r)$. Принимая это во внимание, мы можем придать нашему уравнению следующий вид:

$$(r_{11}+\alpha_{11})t+(r_{22}+\alpha_{22})t-2(r_1+\alpha_1)\frac{t}{r}-2(r_2+\alpha_2)^2+O\left(\frac{r_1}{r}\right)+$$
$$+O(r_2)+O(r^2)=0.$$

Введем в это уравнение вспомогательную функцию

$$w=\sigma\varkappa.$$

Так как $\varkappa=\lambda_{11}$, а

$$r+\alpha=\lambda_{11}(ne_3^*),\quad (ne_3^*)=\left(1-p^2-\frac{q^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

то

$$r+\alpha=\frac{w}{\sigma}\Delta^{\frac{1}{2}},\quad \Delta=1-p^2-\frac{q^2}{c^2}.$$

В точке X_0 функция w достигает максимума. Поэтому $w_1=0$, $w_2=0$. Отсюда следует, что в точке X_0

$$(r+\alpha)_1=w\left(\frac{1}{\sigma}\right)_1,\qquad (r+\alpha)_2=w\left(\frac{1}{\sigma}\right)_2,$$

$$(r+\alpha)_{11}=\frac{w_{11}}{\sigma}+w\left(\left(\frac{1}{\sigma}\right)_{11}+\frac{r^2}{\sigma}\right),\qquad (r+\alpha)_{22}=\frac{w_{22}}{\sigma}+w\left(\left(\frac{1}{\sigma}\right)_{22}+\frac{t^2}{\sigma}\right).$$

Подставляя эти выражения для производных $(r+\alpha)$ в равенство, полученное выше, будем иметь

$$\frac{1}{\sigma}(w_{11}t+w_{22}r)+wt\left(\frac{1}{\sigma}\right)_{11}+wr\left(\frac{1}{\sigma}\right)_{22}-2w^2\left(\frac{1}{\sigma}\right)_1^2\frac{t}{r}-2w^2\left(\frac{1}{\sigma}\right)_2^2+$$
$$+O\left(\frac{w}{r}\left(\frac{1}{\sigma}\right)_1\right)+O\left(w\left(\frac{1}{\sigma}\right)_2\right)+O(r^2)=0.$$

После соответствующей группировки членов и замены в отдельных слагаемых w на σr это равенство можно переписать так:

$$\frac{1}{\sigma}(w_{11}t + w_{22}r) - \frac{K_e\sigma_{11}}{\sigma} - \frac{r^2\sigma_{22}}{\sigma} + O\left(\frac{\sigma}{r}\left(\frac{1}{\sigma}\right)_1\right) + O\left(\sigma r\left(\frac{1}{\sigma}\right)_2\right) + O(r^2) = 0.$$

Так как в точке X_0 функция w достигает максимума, то в этой точке $w_{11}t + w_{22}r \leqslant 0$. Отсюда получается неравенство

$$-\frac{K_e\sigma_{11}}{\sigma} - \frac{r^2\sigma_{22}}{\sigma} + O\left(\frac{\sigma}{r}\left(\frac{1}{\sigma}\right)_1\right) + O\left(\sigma r\left(\frac{1}{\sigma}\right)_2\right) + O(r^2) \geqslant 0.$$

Это неравенство в дальнейшем называется основным.

Вычислим производные функции σ. Введем в окрестности точки X_0 полярную геодезическую систему координат с полюсом O. Для этого проведем через точку X_0 сферу S_0 с центром O и на этой сфере в окрестности точки X_0 введем полугеодезическую параметризацию v^1, v^2 на базе двух геодезических, направления которых в точке X_0 являются главными направлениями поверхности S_0. Теперь в качестве координат произвольной точки X, близкой к X_0, возьмем расстояние v^3 от точки O и координаты v^1, v^2 точки пересечения геодезического луча OX с поверхностью S_0. Так как нам придется пользоваться сразу двумя пространственными системами координат, то все величины, связанные с системой координат, введенной ранее, мы будем отмечать чертой. В некоторых случаях координату v^3 в полярной системе мы будем обозначать h.

Так как коэффициенты второй квадратичной формы при заданной параметризации поверхности u^1, u^2 с точностью до знака сохраняются при переходе от одной пространственной параметризации к другой, то имеют место равенства

$$\frac{\bar{v}_{ij}^k + \bar{A}_{ij}^k}{(\bar{n}\bar{e}_k^*)} = -\frac{v_{ij}^k + A_{ij}^k}{(ne_k^*)}. \qquad (**)$$

Знак минус в правой части равенства объясняется выбором направлений $v^3 > 0$ и $\bar{v}^3 > 0$ в наших системах координат.

Обратимся теперь к производным функции

$$\sigma = \frac{1}{\Delta^{\mu}}, \quad \text{где} \quad \Delta = \left(1 - h_1^2 - \frac{h_2^2}{c^2}\right).$$

Заметим, что в полярной геодезической системе координат

$$\cos^2\varphi = 1 - h_1^2 - \frac{h_2^2}{c^2}.$$

Имеем

$$\left(\frac{1}{\sigma}\right)_1 = -2\mu\Delta^{\mu-1}(h_1h_{11} + h_2h_{12}).$$

Из равенств (**) при $k=3$ получается

$$h_{11}=O(r),\quad h_{12}=O(1),\quad h_{22}=O(1).$$

Поэтому

$$\left(\frac{1}{\sigma}\right)_1=O(r).$$

Аналогично

$$\left(\frac{1}{\sigma}\right)_2=-2\mu\,(h_1h_{12}+h_2h_{22})=O(1).$$

Займемся теперь вторыми производными σ_{11} и σ_{22}. Начнем с производной σ_{11}:

$$\sigma_{11}=\mu(\mu+1)\,\Delta^{-\mu-2}\Delta_1^2-\mu\Delta^{-\mu-1}\Delta_{11},$$
$$\Delta_1=-2\,(h_1h_{11}+h_2h_{12}).$$

Как показано выше, h_{11} имеет порядок $O(r)$, а h_{12} — порядок $O(1)$. Найдем главную часть h_{11} по r. Для этого обратимся к равенству (**) при $k=3$, $i=j=1$. В точке X_0 имеем

$$r=-\frac{h_{11}+A_{11}^3}{\Delta^{1/2}}.$$

Отсюда

$$h_{11}=-\Delta^{1/2}r+O(1).$$

Следовательно,

$$\Delta_1=2h_1\Delta^{1/2}r+O(1).$$

Вычислим теперь Δ_{11} в точке X_0. Имеем

$$\Delta_{11}=-2\left(h_{11}^2+h_{12}^2+h_1h_{111}+h_2h_{112}\right)+O(1).$$

Производную h_{111} найдем, дифференцируя равенство (**) при $i=j=1$, $k=3$. Заметим, что

$$\overline{A}_{11}^3=O(1),\quad (n\overline{e}_3^*)=O(1),\quad (A_{11}^3)_1=O(r),$$
$$(ne_3^*)_1=-\overline{\Delta}^{1/2}(h_1h_{11}+h_2h_{12})=h_1r+O(1).$$

Поэтому

$$h_{111}=-h_1r^2-\Delta^{1/2}r_1+O(r).$$

Но

$$r_1=w\left(\frac{1}{\sigma}\right)_1+O(1),$$
$$\left(\frac{1}{\sigma}\right)_1=-2\mu\Delta^{\mu-1}(h_1h_{11}+h_2h_{12})=2\mu\Delta^{\mu-1/2}h_1r+O(1).$$

Отсюда

$$r_1 = 2\mu\Delta^{-1/2}h_1r^2 + O(r).$$

Следовательно,

$$h_{111} = -(1+2\mu)h_1r^2 + O(r).$$

Производную h_{221} найдем, дифференцируя равенство (**) при $i=j=2$, $k=3$ по u^1. Получим

$$h_{221} = -\Delta^{1/2}t_1 + O(r).$$

Но

$$t_1 = -K_e\frac{r_1}{r^2} + O(1).$$

Поэтому

$$h_{221} = O(1).$$

Подставляя значения производных h в выражение Δ_{11}, получаем

$$\Delta_{11} = -2\Delta r^2 + 2(2\mu+1)h_1^2r^2 + O(r).$$

С помощью Δ_1 и Δ_{11} находим, наконец, σ_{11}:

$$\sigma_{11} = 2\mu\Delta^{-\mu}r^2 + 2\Delta^{-\mu-1}h_1^2r^2 + O(r).$$

Относительно второго члена правой части этого равенства существенно заметить только, что он неотрицателен. И σ_{11} можно представить в следующей форме:

$$\sigma_{11} = 2\mu\Delta^{-\mu}r^2 + (*)^2 + O(r).$$

Обратимся теперь к производной σ_{22}. Имеем

$$\sigma_{22} = \mu(\mu+1)\Delta^{-\mu-2}\Delta_2^2 - \mu\Delta^{-\mu-1}\Delta_{22},$$

$$\Delta_2 = -2(h_1h_{12} + h_2h_{22}).$$

Из равенств (* *) получаем в точке X_0

$$h_{12} = -A_{12}^3, \quad h_{22} = -A_{22}^3 + O\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$A_{12}^3 = \Gamma_{ij}^2 v_1^i v_2^j, \quad A_{22}^3 = \Gamma_{ij}^3 v_2^i v_2^j.$$

Символы Христоффеля Γ_{ij}^3 в точке X_0 имеют следующие значения (§ 2):

$$\Gamma_{ij}^3 = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j, \quad \Gamma_{11}^3 = a_{11}, \; \Gamma_{22}^3 = a_{22}, \; \Gamma_{33}^3 = 0,$$

где a_{11} и a_{22} — главные кривизны сферической поверхности $v^3 = \mathrm{const}$ в точке X_0. Таким образом,

$$A_{12}^3 = a_{11}v_1^1v_2^1 + a_{22}v_1^2v_2^2,$$

$$A_{22}^3 = a_{11}(v_2^1)^2 + a_{22}(v_2^2)^2.$$

Пусть a_{11} — меньшая из главных кривизн. Тогда, так как

$$(v_2^1)^2+(v_2^2)^2+h_2^2=1,$$

то

$$A_{22}^3=a_{11}(1-h_2^2)+(a_{22}-a_{11})(v_2^2)^2.$$

И следовательно,

$$A_{22}^3>a_{11}\Delta.$$

Полагая для краткости $A_{22}^3=a$, $A_{12}^3=b$, можем записать

$$\Delta_2=-2(ah_2+bh_1),$$

где a ограничено снизу, если a_{11} не обращается в нуль. Заметим, что a и b не зависят от μ.

Вычислим теперь Δ_{22}. Имеем

$$\Delta_{22}=-2(h_{12}^2+h_{22}^2+h_1h_{221}+h_2h_{222}).$$

Отсюда

$$\Delta_{22}=-2(h_1h_{221}+h_2h_{222})-(*)^2.$$

Третьи производные h находим с помощью равенств $(**)$. В точке X_0

$$h_{221}=-(A_{22}^3)-t_1\Delta^{1/2}-t(\Delta^{1/2})_1.$$

Так как $(A_{22}^3)_1$ содержит вторые производные v^k только вида v_{12}^k, а они имеют порядок $O(1)$, то

$$(A_{22}^3)_1=O(1)$$

и оценивается независимо от μ. Выражение

$$t(\Delta^{1/2})_1=O(1),$$

и оно тоже оценивается независимо от μ. Рассмотрим $t_1\Delta^{1/2}$. Имеем

$$t_1=-\frac{K_er_1}{r^2}+O(1),\quad r_1=2\mu\Delta^{-1/2}h_1r^2+O(r).$$

Отсюда

$$t_1\Delta^{1/2}=-2\mu K_eh_1+O(1).$$

Суммируя найденные выражения отдельных членов h_{221}, получаем

$$h_{221}=2\mu K_eh_1+O(1),$$

где $O(1)$ оценивается независимо от μ.

Аналогично находится третья производная h_{222}. Опуская выкладки, приведем результат:

$$h_{222}=O(1)+\mu O\left(\frac{1}{r}\right),$$

где $O(1)$ оценивается независимо от μ.

Теперь мы можем записать Δ_{22} в виде

$$\Delta_{22} = -(*)^2 - 4\mu K_e h_1^2 + Ah_1 + Bh_2 + O\left(\frac{1}{r}\right),$$

где A и B оцениваются независимо от μ.

Составим, наконец, выражение σ_{22}:

$$\sigma_{22} = \mu(\mu+1)\Delta^{-\mu-2}\Delta_2^2 - \mu\Delta^{-\mu-1}\Delta_{22}.$$

Подставляя сюда значения Δ_2 и Δ_{22}, получим

$$\sigma_{22} = \frac{1}{\Delta^{\mu}}\left\{\frac{4\mu^2}{\Delta^2}(ah_2+bh_1)^2 + \frac{4\mu^2 K_e h_1^2}{\Delta} + \mu A' h_1 + \mu B' h_2 + (*)^2 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right\}.$$

Мы получили следующее неравенство в точке X_0 поверхности F, где функция w достигает максимума:

$$\frac{-K_e\sigma_{11}}{\sigma} - \frac{r^2\sigma_{22}}{\sigma} + O\left(\frac{\sigma}{r}\left(\frac{1}{\sigma}\right)_1\right) + O\left(\sigma r\left(\frac{1}{\sigma}\right)_2\right) + O(r^2) \geqslant 0.$$

Подставляя сюда значения производных σ, будем иметь

$$\Delta^{-\mu}\left\{-2\mu K_e r^2 - \frac{4\mu^2}{\Delta^2}(ah_2+bh_1)^2 - \frac{4\mu^2 K_e h_1^2}{\Delta} + \mu A' h_1 + \mu B' h_2\right\} + Cr^2 + (*) \geqslant 0,$$

где C — некоторое ограниченное выражение, не зависящее от μ, а $(*)$ — выражение, имеющее по r порядок роста меньше r^2. Разделим это неравенство на Δ^{μ} и введем вместо r функцию $w = r\Delta^{-\mu}$. Получим

$$-2\mu K_e w^2 - \frac{4\mu^2 w^2}{\Delta^2}\left\{(ah_2+bh_1)^2 + K_e\Delta h_1^2\right\} + \mu w^2(A' h_1 + B' h_2) + C\Delta^{\mu} w^2 + (*) \geqslant 0, \qquad (***)$$

где не выписаны члены, имеющие порядок роста по w меньше w^2.

Величина $|a|$ может быть оценена снизу положительным числом. Это эквивалентно тому, что оценивается снизу положительным числом нормальная кривизна сферической поверхности S_0 ($v^3 = h = \text{const}$), проходящей через точку X_0. По построению координатных линий v^1 и v^2 на поверхности S_0 в точке X_0 они направлены по главным направлениям. Пусть для определенности минимальная нормальная кривизна поверхности S_0 соответствует направлению v^1 в точке X_0. Так как линия v^1, проходящая через точку X_0, является геодезической на поверхности сферы S_0, то интересующая нас нормальная кривизна a_{11} будет геодезической кривизной линии $v^3 = \text{const}$ на координатной поверхности $v^2 = \text{const}$, проходящей через точку X_0. Линейный элемент этой поверхности

$$ds^2 = (dv^3)^2 + \bar{c}^2 (dv^1)^2.$$

Так как поверхность $v^2=\text{const}$ образована геодезическими пространства R, то ее внешняя кривизна неположительна, а следовательно, гауссова кривизна тоже неположительна. Обозначим для краткости $v^3=u$, $v^1=v$. Тогда

$$ds^2=du^2+\bar{c}^2\,dv^2.$$

Гауссова кривизна

$$\overline{K}=-\frac{\bar{c}_{uu}}{\bar{c}}.$$

Отсюда, так как $\overline{K}\leqslant 0$,

$$\bar{c}_{uu}\geqslant 0.$$

Геодезическая кривизна кривой $u=\text{const}$ вычисляется по формуле

$$K_g=\frac{\bar{c}_u}{\bar{c}}.$$

Таким образом, оценка снизу положительным числом нормальной кривизны $|a_{11}|$ находится в зависимости от такой оценки для $|\bar{c}_u|$. Но в точке $u=0$ имеем $\bar{c}_u=1$. А так как $\bar{c}_{uu}\geqslant 0$, то $\bar{c}_u\geqslant 1$ для всех u. Таким образом,

$$|a_{11}|=\left|\frac{\bar{c}_u}{\bar{c}}\right|\geqslant\frac{1}{\bar{c}}.$$

И существование положительной оценки снизу для величины $|a_{11}|$, а следовательно, и для выражения $|a|$ достаточно очевидно.

Пусть теперь положительные постоянные a_0, b_0, c_0 удовлетворяют условиям

$$a_0\leqslant|a|,\quad |b|\leqslant b_0,\quad K_e\Delta\geqslant c_0.$$

Рассмотрим квадратичную форму

$$\omega=(ah_2+bh_1)^2+K_e\Delta h_1^2$$

при $h_1^2+h_2^2\geqslant 1$. Определим положительное число ε_0, удовлетворяющее условиям

$$\varepsilon_0<\frac{1}{2},\qquad \frac{a_0}{2}-b_0\varepsilon_0>\frac{a_0}{3}.$$

Очевидно, при $h_1\leqslant\varepsilon_0$

$$\omega>\left(\frac{a_0}{3}\right)^2+(*)^2,$$

а при $h_1\geqslant\varepsilon_0$

$$\omega\geqslant c_0\varepsilon_0^2+(*)^2.$$

Обозначим ω_0 меньшее из двух чисел $c_0\varepsilon_0^2$ и $(a_0/3)^2$. Тогда в любом случае $\omega>\omega_0>0$.

И следовательно, если $h_1^2+h_2^2>\varepsilon$, то

$$(ah_2+bh_1)^2+K_e\Delta h_1^2>\varepsilon^2\omega_0.$$

Условия, которыми определяется число ε_0, ограничивают его только сверху. Именно,

$$\varepsilon_0\leqslant\min\left\{\frac{1}{2},\ \frac{a_0}{6b_0}\right\}.$$

Определяя постоянные K_0 и D неравенствами

$$0<K_0<K_e,\qquad |A'|\leqslant D,\qquad |B'|\leqslant D,$$

потребуем для числа ε_0 выполнения условия

$$2\varepsilon_0 D\leqslant K_0,$$

которое, очевидно, не противоречит предыдущим:

$$0<\varepsilon_0\leqslant\frac{1}{2},\qquad \varepsilon_0\leqslant\frac{1}{6}\,\frac{a_0}{b_0}.$$

Тогда при $h_1^2+h_2^2\leqslant\varepsilon^2$

$$-K_e+A'h_1+B'h_2\leqslant 0.$$

Теперь мы определим положительную постоянную μ, которая входит в выражение w:

$$w=\frac{\varkappa}{\Delta^{\mu}}.$$

Прежде всего мы возьмем число μ настолько большим, чтобы при $h_1^2+h_2^2\geqslant\varepsilon$ было

$$-\frac{4\mu^2}{\Delta^2}(ah_2+bh_1)^2-\frac{4\mu^2K_eh_1^2}{\Delta}+\mu A'h_1+\mu B'h_2\leqslant 0,$$

Это условие выполняется, если

$$-\mu^2\varepsilon^2\omega_0+2\mu D\varepsilon\leqslant 0,$$

т. е. при условии

$$\mu>\mu_0=\frac{2D}{\varepsilon\omega_0}.$$

Потребуем, наконец, чтобы μ было настолько большим, что

$$\mu K_0>C+1.$$

Теперь мы утверждаем, что нашему неравенству (***) можно придать следующую форму:

$$-w^2+(*)\geqslant 0,$$

где $(*)$ обозначает выражение, имеющее порядок роста относительно w меньше w^2. Действительно, в точке X_0 поверхности F, где w достигает максимума, выполняется одно из условий: либо $h_1^2+h_2^2>\varepsilon^2$, либо $h_1^2+h_2^2\leqslant\varepsilon^2$. В первом случае

$$\frac{-4\mu^2w^2}{\Delta^2}\left\{(ah_2+bh_1)^2+K_e\Delta h_1^2\right\}+\mu w^2(A'h_1+B'h_2)\leqslant 0,$$
$$-\mu K_e w^2+C\Delta^\mu w^2\leqslant -w^2,$$

и, следовательно, $-w^2+(*)\geqslant 0$. Во втором случае

$$-\frac{4\mu^2w^2}{\Delta^2}\left\{(ah_2+bh_1)^2+K_e\Delta h_1^2\right\}\leqslant 0,$$
$$-\mu K_e w^2+\mu w^2(A'h_1+B'h_2)\leqslant 0,$$
$$-\mu K_e w^2+C\Delta^\mu w^2\leqslant -w^2$$

и, следовательно, снова $-w^2+(*)\geqslant 0$.

Из неравенства

$$-w^2+(*)\geqslant 0,$$

так как $(*)$ имеет порядок роста меньше w^2, следует, что w не может быть слишком большим, и для него, таким образом, существует оценка сверху. Установление оценки для w дает оценку и для нормальных кривизн поверхности, так как

$$\varkappa\leqslant w.$$

В заключение заметим, что приведенное доказательство теоремы об установлении оценок нормальных кривизн поверхности проходит без изменений и в том случае, если условие полноты пространства R заменить требованием, чтобы поверхность F ограничивала гомеоморфную шару область.

§ 10. Полное решение проблемы об изометрическом погружении

В настоящем параграфе мы дадим полное решение проблемы об изометрическом погружении двумерного, гомеоморфного сфере риманова многообразия в трехмерное риманово пространство в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть R — полное трехмерное риманово пространство и M — замкнутое, гомеоморфное сфере риманово многообразие с гауссовой кривизной, всюду большей некоторой постоянной c (большей, меньшей или равной нулю). Тогда, если кривизна пространства R всюду меньше c, то M допускает изометрическое погружение в R в виде регулярной поверхности F.*

Более того, это погружение можно осуществить так, чтобы данный двумерный элемент α многообразия M (точка S и пучок

направлений в ней) совпал бы с данным, изометричным α двумерным элементом α' в пространстве R и поверхность F располагалась бы по заданную сторону от площадки элемента α'.

Если метрика пространства R и многообразия M дифференцируемы k раз ($k \geqslant 6$), то поверхность F дифференцируема по крайней мере $(k-1)$ раз.

Если метрика пространства R и многообразия M аналитические, то поверхность F аналитическая.

Доказательство теоремы 1 мы проведем сначала в случае, когда пространство R имеет неположительную кривизну ($c \leqslant 0$). А затем рассмотрим общий случай. План доказательства такой же, как и в § 8. Он включает три пункта.

1. Доказывается существование непрерывного семейства многообразий M_t, содержащего данное многообразие M и многообразие M_0, заведомо погружаемое.

2. Доказывается, что если многообразие M_t погружаемо, то близкие к нему многообразия семейства также погружаемы.

3. Доказывается, что если каждое многообразие M_{t_n} семейства погружаемо и $t_n \to t^*$, то многообразие M_{t^*} погружаемо.

По поводу доказательств утверждений, содержащихся в упомянутых трех пунктах, заметим следующее. Доказательство утверждения о том, что многообразия M_t, близкие погружаемому, погружаемы, данное в § 8, существенно опирается только на то, что гауссова кривизна многообразия M_t больше кривизны пространства. Поэтому, если мы сумеем построить семейство многообразий M_t таким образом, чтобы их гауссовы кривизны были больше c, то утверждение п. 2 можно считать доказанным.

Доказательство утверждения, содержащегося в п. 3, о погружаемости многообразия M_{t^*} существенно опирается только на возможность установить априорные оценки для нормальных кривизн поверхностей F_t, изометричных многообразиям M_t. Согласно теореме § 9 такие оценки мы можем гарантировать при условии, что гауссовы кривизны поверхностей больше кривизны пространства. Таким образом, утверждение п. 3 можно считать доказанным, если указанным выше образом будет построено семейство многообразий M_t.

Итак, для того чтобы доказать нашу теорему, достаточно построить непрерывное семейство многообразий M_t с гауссовыми кривизнами, большими c, содержащее данное многообразие M и многообразие M_0, заведомо погружаемое в R. Построим такое семейство.

Проведем из точки O_R в пространстве R полугеодезическую, перпендикулярную площадке пучка α_R, таким образом, чтобы направление обхода пучка с направлением полугеодезической

в O_R образовало правый вннт. На полугеодезнческой возьмем близкую к O_R точку S н радиусом SO_R опишем из цeнтра S сферическую поверхиость ω. Эта поверхиость является регулярной (по крайней мере k раз диффереицируемой) и выпуклой. Следовательно, гауссова крнвнзна ω больше кривизны пространства в площадках, касающихся ω, в частиости больше c. Пучок направлений иа ω, совпадающий с α_R, обозиачим α_ω.

Возьмем теперь пространство Лобачевского кривизны $\bar{c}$ и построим в нем выпуклые регуляриые поверхиости $\bar{F}$ и $\bar{\omega}$, изометричные M н ω соответствеино*). Возможиость такого построения гарантируется соответствующей теоремой А. Д. Алексаидрова и теоремой о регулярности выпуклой поверхиости с регулярной метрнкой в простраистве Лобачевского (§ 8 гл. V). Не огран132чивая общностн, можио считать, что пучки α поверхностей $\bar{F}$ н $\bar{\omega}$ совпадают, а самн поверхиости располагаются по одиу стороиу плоскостн этнх пучков. В противиом случае одиу из поверхностей можно было бы отразить зеркальио в плоскости пучка.

Отобразнм пространство Лобачевского, в котором построены поверхностн $\bar{F}$ и $\bar{\omega}$, геодезическн на виутреиность евклидова шара (нитерпретацня Кели — Клейиа простраиства Лобачевского). При этом поверхиостям $\bar{F}$ н $\bar{\omega}$ будут соответствовать замкнутые выпуклые поверхиости евклидова простраиства внутри шара с общей точкой O и общей касательиой плоскостью в этой точке. Будем обозначать эти поверхиости $\tilde{F}$ и $\tilde{\omega}$ соответственио.

Пусть H_F и H_ω — опориые фуикцнн поверхностей $\tilde{F}$ и $\tilde{\omega}$. Построим семейство выпуклых поверхностей $\tilde{F}_t$, задаваемых опорными функциями:

$$H_t = tH_F + (1-t)H_\omega, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

В этом семействе при $t=1$ содержится поверхиость $\tilde{F}$, а при $t=0$ — поверхность $\tilde{\omega}$.

Возьмем иа внутренней иормали поверхиостей $\tilde{F}$ и $\tilde{\omega}$ в точке O точку Q, расположенную внутри обеих поверхиостей, а следовательно, внутри всех поверхностей $\tilde{F}_t$. Определим теперь семейство метрик M_t. Все эти метрики мы будем задавать на поверхности $\tilde{F}$. Итак, пусть X н Y — две произвольиые точки на поверхностн $\tilde{F}$. Определим расстояиие между иимн в метрнке M_t. Для этого спроектнруем точки X и Y на поверхность $\tilde{F}_t$; полученные точки обозиачим X_t и Y_t. Назовем расстоянием между точками X н Y в метрнке M_t расстояиие между точками X_t и Y_t иа поверхности $\tilde{F}_t$ в метрике Лобачевского.

*) В случае $c=0$ берем евклидово пространство.

Так как поверхность F_t строго выпуклая при любом t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, то гауссова кривизна многообразия с метрикой M_t больше кривизны пространства Лобачевского, т. е. больше c. Итак, мы построили непрерывное семейство многообразий M_t, содержащее заданное многообразие M, заведомо погружаемое многообразие M_0 (изометричное ω), и гауссова кривизна каждого многообразия M_t всюду больше c. Тем самым доказана теорема 1.

Рассмотрим теперь общий случай. Прежде всего заметим, что в пп. 1 и 2 доказательства условие неположительности кривизны пространства R несущественно. Оно существенно только в п. 3 и понадобилось при установлении оценки нормальной кривизны поверхности F_t, изометричной M_t. Таким образом, для доказательства теоремы 1 достаточно показать погружаемость многообразия M_{t^*}, предельного для погружаемых, без предположения о неположительности кривизны пространства R. При этом мы можем считать, что $c>0$, так как случай $c \leqslant 0$ рассмотрен.

Пусть S — точка пространства R, из которой исходят направления пучка α'. Построим накрывающее риманово многообразие R_0 для шара Ω радиуса $\pi/\sqrt{c}$ с центром в точке S. Для этого возьмем в евклидовом пространстве шар Ω_0 радиуса $\pi/\sqrt{c}$ и установим изометрическое соответствие между направлениями пространства R в S и направлениями в евклидовом пространстве в центре S_0 шара Ω_0.

Пусть X — произвольная точка шара Ω_0. Соединим ее с центром S_0 прямолинейным отрезком. В соответствующем направлении из S проведем геодезическую и отложим на ней отрезок, равный S_0X. Конец этого отрезка обозначим X'. Так мы получим отображение евклидова шара Ω_0 на шар Ω в римановом пространстве R. Это отображение локально топологическое, так как кривизна пространства R меньше c, и следовательно, на геодезической, исходящей из S, нет точек, сопряженных S на расстоянии, меньшем $\pi/\sqrt{c}$. Зададим внутри шара Ω_0 риманову метрику, принимая за расстояние между близкими точками X и Y расстояние между их образами в R. Полученное при этом риманово многообразие R_0 является накрывающим для R в Ω. Для того чтобы погрузить изометрически M в R, достаточно M погрузить изометрически в R_0, а затем указанным образом отобразить R_0 в R. Таким образом, мы можем ограничиться рассмотрением погружения многообразия M в накрывающее многообразие R_0.

Возьмем многообразие M_0 семейства M_t, заведомо погружаемое. По доказанному многообразия M_t, близкие к M_0, тоже погружаемы. Соответствующие им поверхности F_t получаются

непрерывной деформацией F_0. Мы утверждаем, что каждая из поверхностей F_t ограничивает гомеоморфное шару тело V_t и однозначно проектируется геодезическими лучами, исходящими из S_0. Это свойство очевидно для поверхности F_0, которая представляет собой малую сферу. По непрерывности семейства F_t указанное свойство может нарушиться только, если при некотором t отрезок геодезического луча, соединяющего точку A поверхности F_t с S_0, коснется поверхности в точке A. Но это невозможно, так как тогда этот отрезок окажется по крайней мере частично вне тела, ограниченного поверхностью F_t, ввиду ее строгой выпуклости.

Заметим еще, что все поверхности F_t содержатся внутри шара радиуса $\pi/\sqrt{c'}$, $c'>c$, с центром S_0. Действительно, гауссова кривизна поверхности F_t строго больше c, следовательно, больше некоторого $c'>c$, так как множество значений параметра t замкнуто. Внутренний диаметр поверхности с гауссовой кривизной, большей $c'>0$, меньше $\pi/\sqrt{c'}$. А так как поверхность F_t проходит через точку S_0, то она содержится в шаре радиуса $\pi/\sqrt{c}$ с центром S_0.

Обозначим t^* верхнюю грань таких значений параметра t, что при любом $t<t^*$ многообразие M_t изометрически погружается в R_0. Мы утверждаем, что многообразие M_{t^*} погружаемо. Для доказательства достаточно показать, что для поверхностей F_t при малом $|t-t^*|$ можно указать оценку сверху нормальных кривизн, не зависящую от t. Допустим, многообразие M_{t^*} не допускает изометрического погружения в R_0 в виде регулярной поверхности и, следовательно, для поверхностей F_t при t, близких к t^*, не существует оценки нормальных кривизн, не зависящей от t. Это значит, что среди поверхностей F_t при любом $n>0$ можно указать такую поверхность F_{t_n}, для которой $|t-t_n|<1/n$, а максимум нормальной кривизны больше n. Пусть этот максимум на поверхности F_t достигается в точке P_n. Не ограничивая общности, можно считать, что последовательность точек P_n сходится к некоторой точке P_0.

Возьмем шар G_0 с центром в точке P_0, настолько малый, чтобы любые две его точки соединялись единственной кратчайшей в R_0. Пусть ω_n — часть поверхности F_{t_n}, содержащейся внутри шара G_0. Очевидно, она представляет собой выпуклую поверхность и является областью на границе выпуклого тела, которое получается в пересечении V_{t_n} и G_0. Не ограничивая общности, можно считать, что последовательность выпуклых поверхностей ω_n сходится к некоторой общей выпуклой поверхности ω_0. Эта поверхность имеет положительную внешнюю кривизну. Отсюда, как и в случае евклидова пространства, можно

вывести, что она строго выпуклая, т. е. не содержит геодезических отрезков R_0.

Соединим произвольную точку A поверхности ω_0 с точкой P_0. Пусть $\vartheta(A)$ — угол, который образует внутренняя нормаль к ω_0 в точке A с направлением кратчайшей AP_0. В силу строгой выпуклости поверхности ω_0 угол $\vartheta(A)<\pi/2$ и для всех точек A, которые удалены от P_0 на расстояние, не меньшее $\varepsilon>0$, $\vartheta(A)<\frac{\pi}{2}-\eta(\varepsilon)$, где $\eta(\varepsilon)$ больше нуля.

Точка P_0 на поверхности ω_0 не может быть конической. Поэтому через нее проходит некоторая геодезическая γ_0, касающаяся поверхности ω_0. Проведем полугеодезическую γ' из точки P_0 внутрь тела, на границе которого расположена поверхность ω_0, так, чтобы она образовала с геодезической γ_0 в точке P_0 угол меньше $\eta(\varepsilon)/2$. На полугеодезической γ' возьмем точку P'. Если точка P' достаточно близка к P_0 и вместо точки P_0 при определении угла $\vartheta(A)$ взять точку P', то этот угол для точек A, удаленных от P_0 на расстояние, большее ε, тоже будет меньше $\pi/2-\eta(\varepsilon)$. В силу сходимости ω_n к ω_0 при достаточно большом n угол $\vartheta(A)$, определяемый для поверхности ω_n и точки P', также будет меньше $\pi/2-\eta(\varepsilon)$ при $AP_0<\varepsilon$, а при $A\equiv P_n$ этот угол больше $\pi/2-\eta(\varepsilon)/2$.

Определим теперь на поверхности ω_n функцию

$$\overline{w}(X)=\frac{\overline{\varkappa}(X)}{(\cos\vartheta(X))^{\mu}},$$

где $\overline{\varkappa}(X)$ — максимальная нормальная кривизна в точке X, $\vartheta(X)$ — угол, образуемый внутренней нормалью поверхности с направлением полугеодезической XP' в точке X, а μ — некоторая положительная постоянная. При достаточной близости ω_n к ω_0 для каждой точки X, удовлетворяющей условию $XP_0>\varepsilon$,

$$\overline{w}(X)<\overline{w}(P_n).$$

Действительно, по определению точки P_n имеем $\overline{\varkappa}(X)\leqslant\overline{\varkappa}(P_n)$. Далее, $\vartheta(X)<\frac{\pi}{2}-\eta(\varepsilon)$, а $\vartheta(P_n)>\frac{\pi}{2}-\frac{\eta(\varepsilon)}{2}$. Отсюда $\vartheta(X)<\vartheta(P_n)$, и, следовательно, $\overline{w}(X)<\overline{w}(P_n)$.

Так как при $XP_0>\varepsilon$ функция $\overline{w}(X)<\overline{w}(P_n)$, то ее максимум достигается в некоторой точке X_0, удаленной от точки P_0 на расстояние, не большее ε, следовательно, на расстояние, не большее $\varepsilon+P_0P'$, от точки P'.

Теперь мы вводим в окрестности точки P' полярную геодезическую систему координат и повторяем дословно доказательство теоремы об оценках из § 9. В этом доказательстве неположительность кривизны пространства играла роль только при установлении положительности внешней кривизны сферической

поверхности $v^3=\mathrm{const}$, проходящей через точку X_0. Теперь это имеет место независимо от кривизны пространства из-за малости радиуса $P'X_0$ этой поверхности.

Установление оценки для $\overline{w}$ есть вместе с тем установление оценки для $\overline{\varkappa}(P_n)$. Но по предположению $\overline{\varkappa}(P_n)>n$, и мы приходим к противоречию. Таким образом, многообразие M_{t^*} погружаемо, а следовательно, погружаемо и данное многообразие M. Теорема доказана.

Замечание. Как видно из доказательства теоремы 1, требование полноты пространства R несущественно. Достаточно, чтобы шар радиуса d, равного внутреннему диаметру многообразия M, с центром в точке S был компактным. Или, что то же самое, чтобы расстояние точки S от границы R было больше d.

А. А. Дубровин доказал, что теорему 1 в части регулярности погружения можно улучшить, если воспользоваться результатами Е. Хейнца об оценках решений уравнений Монжа — Ампера эллиптического типа. Именно, если метрика пространства R и погружаемого многообразия M принадлежат классу C^n, $n\geqslant 3$, то поверхность F, существование которой утверждается теоремой 1, принадлежит классу $C^{n-1+\nu}$, $0<\nu<1$.

Полное решение вопроса об оценках нормальных кривизн позволяет усилить другие теоремы § 8.

Теорема 2. *Поверхность F, существование которой утверждается теоремой* 1, *двумерным элементом α' определяется однозначно.*

Теорема 3. *Если в полном римановом пространстве с кривизной в двумерных площадках, меньшей c, даны две гомеоморфные сфере регулярные изометричные поверхности F_1 и F_2 с гауссовой кривизной, большей c, то одна поверхность допускает непрерывное изгибание в другую.*

§ 11. *Изометрические преобразования пунктированной поверхности в евклидовом пространстве*

Пусть F — замкнутая регулярная выпуклая поверхность в евклидовом пространстве. Поверхность F', которая получается из F удалением конечного числа точек $P_1, \ldots, P_k$, мы будем называть пунктированной в этих точках. В настоящем параграфе мы рассмотрим вопрос о возможности нетривиальных изометрических преобразований пунктированной поверхности.

Пусть F — замкнутая регулярная выпуклая поверхность с положительной кривизной, пунктированная в одной точке S. Покажем, что такая поверхность не допускает иных изометрических преобразований, кроме тривиальных. Действительно,

пусть F_1 — регулярная поверхность, изометричная F. Построим выпуклую оболочку поверхности F_1, обозначим ее $\overline{F}_1$. Могут представиться два случая: либо точка S_1, соответствующая S, принадлежит $\overline{F}_1$, либо она лежит внутри $\overline{F}_1$. Рассмотрим сначала второй случай.

Так как точка S_1 лежит внутри $\overline{F}_1$, то $\overline{F}_1$ является гладкой выпуклой поверхностью. Каждая точка строгой выпуклости $\overline{F}_1$ является точкой F_1. И так как полная кривизна поверхности $\overline{F}_1$, равная 4π, сосредоточена на множестве точек строгой выпуклости, то все точки поверхности F_1 должны принадлежать $\overline{F}_1$. Вместе с тем точки, достаточно близкие к S_1, лежат внутри $\overline{F}_1$. И мы приходим к противоречию.

Рассмотрим первый случай: точка S_1 лежит на выпуклой оболочке $\overline{F}_1$. Допустим, кривизна поверхности $\overline{F}_1$ в точке S_1 равна нулю. Тогда, рассуждая как и раньше, мы приходим к выводу, что вся поверхность F_1 лежит на $\overline{F}_1$, а следовательно, является выпуклой поверхностью. Поэтому, если мы пополним поверхности F и F_1 точками S и S_1 соответственно, то получим две замкнутые изометричные выпуклые поверхности, а они, как известно, равны. Следовательно, равны поверхности F и F_1.

Пусть теперь кривизна выпуклой оболочки $\overline{F}_1$ в точке S_1 отлична от нуля и, таким образом, точка S_1 является конической точкой поверхности $\overline{F}_1$. Проведем через точку S_1 опорную плоскость α_0 поверхности $\overline{F}_1$ таким образом, чтобы точка S_1 была единственной общей точкой плоскости α_0 и поверхности $\overline{F}_1$. Провести такую плоскость возможно, так как точка S_1 является конической.

Возьмем теперь произвольную плоскость α, параллельную α_0 и пересекающую поверхность F_1. Пусть G — множество тех точек поверхности F, которым по изометрии на F_1 соответствуют точки, расположенные в том из полупространств, определяемых плоскостью α, которое не содержит точку S_1. Пусть G' — связная компонента G, и G_1' — соответствующая ей область на F_1. Область G_1' представляет собой выпуклую поверхность с краем в плоскости α (§ 5 гл. IX).

Пусть теперь плоскость α неограниченно приближается к α_0. Тогда поверхность G_1' переходит в замкнутую поверхность, пунктированную в точке S_1. Действительно, так как S_1 единственная общая точка поверхности $\overline{F}_1$ и плоскости α_0, то край поверхности G_1', будучи расположен в плоскости α, стягивается к точке S_1 при $\alpha \to \alpha_0$. Отсюда следует, что при $\alpha \to \alpha_0$ область G' распространяется на всю поверхность F, и поверхность F_1 представляет собой замкнутую выпуклую поверхность, пунктированную в точке S_1. После этого мы заключаем о равенстве поверхностей F и F_1, как и в предыдущем рассмотрении.

Итак, *замкнутая выпуклая поверхность, пунктированная в одной точке, не допускает иных изометрических преобразований, кроме тривиальных.*

Иначе обстоит дело в том случае, когда поверхность пунктирована в двух точках. Рассмотрим, например, сферу, пунктированную в двух диаметрально противоположных точках S и S'. Разобьем сферу на n равных двуугольников меридианами m_k, соединяющими полюсы S и S'. Из каждого двуугольника образуем замкнутую поверхность путем склеивания сторон. В результате получатся веретенообразные поверхности вращения постоянной кривизны. Все эти поверхности совместим так, чтобы линии склеивания совпадали, и разрежем их по линиям склеивания. А теперь склеим снова полученные двуугольники в том же порядке, как они расположены на поверхности сферы, и удалим их вершины. В результате получится поверхность, изометричная сфере, пунктированной в точках S и S'. Так как число n в описанном построении произвольно, то существует по крайней мере счетное множество поверхностей, нетривиально изометричных сфере, пунктированной в двух точках.

Аналогично можно построить нетривиально изометричные поверхности для любой замкнутой поверхности вращения, пунктированной в полюсах.

Естественно поставить следующий вопрос. Пусть F — произвольная замкнутая выпуклая поверхность, пунктированная в двух произвольных точках. Спрашивается, допускает ли она нетривиальные изометричные преобразования? Утвердительный ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. *Всякая регулярная замкнутая, с положительной кривизной, выпуклая поверхность, пунктированная в любых двух точках, допускает по крайней мере счетное множество нетривиальных изометрических преобразований в классе регулярных поверхностей.*

Для доказательства этой теоремы построим сначала специальное риманово пространство неположительной кривизны.

Введем на плоскости полярные координаты ρ, ϑ и построим функцию $\varphi(\rho)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1. Функция $\varphi(\rho)$ достаточно регулярна.
2. При $\rho \geqslant \varepsilon > 0$ функция $\varphi(\rho) = 0$.
3. При $\rho < \varepsilon$ функция $\varphi(\rho) < 0$.

Очевидно, такая функция строится без труда.

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение

$$g'' + \alpha\varphi(\rho) g = 0,$$

где α — положительный параметр. Обозначим $g(\rho, \alpha)$ решение этого уравнения, которое при $\rho = 0$ удовлетворяет условиям

$$g(0, \alpha) = 0, \qquad g'(0, \alpha) = 1.$$

Очевидно, функция $g(\rho, \alpha)$ неотрицательна, обращается в нуль только при $\rho=0$, а при $\rho \geqslant \varepsilon$ является линейной функцией.

Определим в плоскости с полярными координатами ρ, ϑ метрику линейным элементом

$$ds^2 = d\rho^2 + g^2\, d\vartheta^2.$$

Риманово многообразие, которое при этом получается, имеет гауссову кривизну

$$K = -\frac{g''}{g} = \alpha\varphi \leqslant 0.$$

Интегральная кривизна многообразия равна

$$\omega = \int\int \alpha\varphi g\, d\rho\, d\vartheta = -\int\int g''\, d\rho\, d\vartheta = -2\pi(g'(\varepsilon, \alpha) - 1).$$

Если $\alpha=0$, то $g'(\varepsilon, \alpha)=1$ и, следовательно, $\omega=0$. При достаточно большом α, очевидно, $g'(\varepsilon, \alpha)$ сколь угодно велико и, следовательно, сколь угодно велико по абсолютной величине ω. Подберем параметр α так, чтобы

$$\omega = -2\pi(n-1),$$

где n — целое положительное число.

Зададим теперь в евклидовом пространстве с цилиндрическими координатами ρ, ϑ, h метрику линейным элементом

$$ds^2 = d\rho^2 + g^2\, d\vartheta^2 + dh^2.$$

Полученное при этом риманово пространство будем обозначать R. Изучим кривизну пространства R.

Пространство R симметрично относительно каждой поверхности $h=\mathrm{const}$. Действительно, отображение пространства R на себя, при котором точке с координатами ρ, ϑ, $h+\zeta$ сопоставляется точка с координатами ρ, ϑ, $h-\zeta$, является изометрическим. Отсюда следует, что каждая поверхность $h=\mathrm{const}$ является вполне геодезической. Так как поверхность $h=\mathrm{const}$ вполне геодезическая, то кривизна пространства в двумерной площадке $dh=0$ совпадает с гауссовой кривизной поверхности $h=\mathrm{const}$. Поверхность $h=\mathrm{const}$ имеет линейный элемент $d\rho^2 + g^2\, d\vartheta^2$, и, следовательно, ее гауссова кривизна

$$K = -\frac{g''}{g} = \alpha\varphi \leqslant 0.$$

Таким образом, кривизна пространства R в двумерных площадках $dh=0$ неположительна, а при $\rho \geqslant \varepsilon$ равна нулю.

Точно так же пространство R симметрично относительно поверхности $\vartheta=\mathrm{const}$. Следовательно, поверхность $\vartheta=\mathrm{const}$ яв-

ляется вполне геодезической и кривизна пространства R в площадках $d\vartheta=0$ равна гауссовой кривизне этой поверхности. Поверхность $\vartheta=\text{const}$ имеет евклидов линейный элемент $d\rho^2+dh^2$, а следовательно, ее гауссова кривизна равна нулю. Итак, кривизна пространства R в двумерных площадках $d\vartheta=0$ равна нулю.

Рассмотрим, наконец, кривизну пространства R в двумерных площадках $d\rho=0$. Для этого заметим, что поверхность $\rho=\text{const}$ изометрична евклидову цилиндру, а значит, имеет нулевую гауссову кривизну. Кроме того, эта поверхность имеет нулевую внешнюю кривизну, так как геодезические h на этой поверхности являются линиями кривизны в силу симметрии пространства относительно плоскостей $\vartheta=\text{const}$. Так как внутренняя и внешняя кривизны поверхности $\rho=\text{const}$ равны нулю, а следовательно, равны друг другу, то кривизна пространства R в площадках, касающихся этой поверхности, т. е. в площадках $d\rho=0$, равна нулю.

Так как пространство R симметрично относительно поверхностей $h=\text{const}$ и $\vartheta=\text{const}$, то направления координатных линий h и ϑ, а следовательно, и координатных линий ρ, являются главными направлениями индикатрисы Римана. Таким образом, кривизна пространства R в двумерных площадках, отвечающих главным направлениям индикатрисы Римана, неположительна. Отсюда следует, что она неположительна в любой двумерной площадке.

Так как при $\rho\geqslant\varepsilon$ кривизна пространства в главных двумерных площадках $d\rho=0$, $d\vartheta=0$, $dh=0$ равна нулю, то в области R_0, определяемой условием $\rho>\varepsilon$, пространство R локально евклидово.

Итак, построенное нами риманово пространство R является пространством неположительной кривизны, а в области R_0 оно локально евклидово.

Построим теперь специальное локально евклидово пространство E. Для этого введем в пространстве декартовы координаты x, y, z и сделаем в нем разрез по полуплоскости $y=0$, $x\geqslant 0$. Возьмем n экземпляров пространств $E_1, \ldots, E_n$ с таким разрезом и произведем склеивание этих пространств по берегам разрезов, причем таким образом, чтобы скеливались берега разрезов E_i и E_{i+1}, примыкающие к полупространствам $y>0$ и $y<0$ соответственно. В результате такого склеивания получится локально евклидово пространство E с особенностью вдоль оси z. Обозначим E_0 область пространства E, состоящую из точек, удаленных на расстояние, большее ε' от оси z.

Очевидно, локально евклидовы пространства R_0 и E_0 изометричны, если край $\rho=\varepsilon$ поверхности $h=\text{const}$ имеет геодезическую кривизну, равную $1/\varepsilon'$. А так как геодезическая

кривизна края $\rho=\varepsilon$ поверхности $h=\mathrm{const}$ равна $k_g=\frac{g'(\varepsilon, \alpha)}{g(\varepsilon, \alpha)}$, то условие изометрии пространств R_0 и E_0 состоит в том, чтобы

$$\frac{g'(\varepsilon, \alpha)}{g(\varepsilon, \alpha)}=\frac{1}{\varepsilon'}.$$

Покажем, что ε' стремится к нулю вместе с ε. Действительно,

$$g'(\varepsilon, \alpha)=n, \quad g'(\rho, \alpha)\leqslant n, \quad g(0, \alpha)=0.$$

Отсюда $g(\varepsilon, \alpha)\leqslant n\varepsilon$,

$$\frac{g'(\varepsilon, \alpha)}{g(\varepsilon, \alpha)}\geqslant\frac{1}{\varepsilon}.$$

Следовательно, $\varepsilon'<\varepsilon$, а значит, ε' стремится к нулю, когда $\varepsilon\to 0$.

Перейдем теперь к доказательству теоремы.

Пусть F — регулярная замкнутая выпуклая поверхность с положительной кривизной в евклидовом пространстве, S и S' — две произвольные точки на поверхности F. Построим риманово пространство R неположительной кривизны так, как это было сделано выше. По теореме об изометрическом погружении двумерного риманова многообразия в трехмерное риманово пространство неположительной кривизны поверхность F можно изометрически погрузить в R, причем это погружение можно осуществить так, что точка S перейдет в заданную точку пространства A и пучок направлений α_F в точке S на F перейдет в заданный, изометричный α_F пучок направлений в точке A пространства, а направление обхода с направлением внутренней нормали поверхности будет образовывать правый винт.

Возьмем два перпендикулярных направления t_1 и t_2 в точке S поверхности F. На оси s $(\rho=0)$ пространства R возьмем точку A и в ней два перпендикулярных направления t_1' и t_2'. По теореме об изометрическом погружении поверхность F можно изометрически погрузить в R так, что точка S перейдет в A, направления t_1 и t_2 — в направления t_1' и t_2', и направления t_1, t_2' будут образовывать с направлением t_3' внутренней нормали поверхности правую тройку. Поверхность пространства R, в которую при указанном погружении переходит F, назовем F'.

Обозначим α_1, α_2, α_3 косинусы углов, образуемых направлением оси s пространства R с направлениями t_1', t_2', t_3' соответственно. Поверхность F', которая получается при изометрическом погружении F в пространство R, пересекается с осью s пространства в двух точках, если $\alpha_3\neq 0$. Одной из этих точек

является A по построению. Другую точку пересечения обозначим B. Точке B поверхности F' по изометрии на F соответствует некоторая точка $S(B)$. В силу симметрии пространства относительно геодезической s положение точки $S(B)$ зависит только от углов, образуемых направлением s в точке A с направлениями t_1', t_2', t_3', т. е. от чисел α_1, α_2, α_3.

Мы утверждаем, что при некотором выборе направлений t_1' и t_2' ось s пересекает поверхность F' в точке B, соответствующей по изометрии точке S' поверхности F, т. е. $S(B) \equiv S'$.

Как указано выше, положение точки $S(B)$ на F однозначно определяется числами α_1, α_2, α_3. Это позволяет определить отображение T множества направлений $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ на множество точек поверхности F:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \to S(B).$$

Это отображение непрерывно. Обозначим G^* гомеоморфную кругу замкнутую область в множестве направлений $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, определяемую условием $\alpha_3 \geqslant \varepsilon^* > 0$.

Так как для нормальных кривизн поверхности F' можно указать оценку, не зависящую от выбора направлений t_1' и t_2' то образ границы G^* при отображении T представляет собой при достаточно малом ε^* замкнутую кривую, разделяющую точки S и S'. Отсюда следует, что в G^* существует такое направление, которому при отображении T сопоставляется точка S'. А это значит, что поверхность F можно так погрузить изометрически в R, что точки S и S' попадут на ось s пространства, причем точка S совпадет с точкой A оси. В дальнейшем будем считать, что поверхность F погружена в R именно таким образом.

Пространство R зависит от параметра ε. Будем уменьшать ε. Тогда R при $\varepsilon \to 0$ переходит в локально евклидово пространство E, а поверхность F' — в некоторую поверхность F_0', регулярную всюду, кроме двух точек S_0 и S_0', расположенных на оси пространства E. Каждая полупрямая, исходящая из точки O пространства E, расположенной на отрезке S_0S_0', пересекает поверхность F_0' в одной точке.

Отобразим локально евклидово пространство E на евклидово пространство E_0, из которого E получается путем сопоставления точке X пространства E геометрически совпадающей с ней точки пространства E_0. Это отображение локально изометрическое. Оно переводит поверхность F_0' в некоторую поверхность F_0'', изометричную F_0', а следовательно, изометричную F. Так как пространство E образовано из n совмещенных экземпляров пространства E_0, то поверхность F_0'' с каждым

лучом, исходящим из внутренней точки отрезка S_0S_0', пересекается в n точках, геометрически не обязательно различных.

Таким образом, мы доказали возможность нетривиального изометрического преобразования поверхности F, пунктированной в двух точках S и S'. В силу отмеченного геометрического свойства пересечения с лучом в n точках это преобразование существенно зависит от целочисленного параметра n. Поэтому существует по крайней мере счетное множество различных поверхностей, изометричных поверхности F, пунктированной в двух точках. Теорема доказана.

§ 12. Жесткость не гомеоморфных сфере замкнутых поверхностей в римановом пространстве

Пусть поверхность F в римановом пространстве подвергается непрерывной деформации, переходя к моменту t в поверхность F_t. Эта деформация называется бесконечно малым изгибанием, если в начальный момент $(t=0)$ длины кривых на поверхности стационарны. С бесконечно малым изгибанием поверхности естественным образом связано векторное поле

$$\xi = \frac{dx(t)}{dt}\bigg|_{t=0},$$

где $x(t)$ — точка поверхности F_t, в которую при деформации переходит точка x поверхности F. Это векторное поле называется изгибающим полем.

В § 3 доказано, что всякая замкнутая, гомеоморфная сфере поверхность с положительной внешней кривизной в римановом пространстве, закрепленная в одной точке вместе с пучком направлений в этой точке, является жесткой в том смысле, что при указанной деформации всякое ее изгибающее поле равно нулю тождественно.

В настоящем параграфе мы докажем аналогичные теоремы для замкнутых, не гомеоморфных сфере поверхностей с положительной внешней кривизной. В связи с этим мы прежде всего покажем, что в римановом пространстве могут существовать поверхности с положительной внешней кривизной, гомеоморфные любому замкнутому ориентируемому двумерному многообразию. Как известно, такие многообразия различаются родом p. Многообразие рода $p=1$ гомеоморфно тору, многообразие рода $p>1$ гомеоморфно сфере с p ручками. Многообразие рода p можно получить, отождествляя параллельные, противоположно ориентированные стороны правильного многоугольника с $2(p+1)$ сторонами.

Замкнутая поверхность, гомеоморфная тору, с положительной внешней кривизной была нами построена в § 9. Напомним это построение. Возьмем в пространстве Лобачевского прямолинейный отрезок A_1A_2 и проведем три плоскости, перпендикулярные этому отрезку, — σ_1 и σ_2 через концы отрезка и σ через его средину. Обозначим R' область пространства, заключенную между плоскостями σ_1 и σ_2. Если отождествить симметричные относительно плоскости σ точки плоскостей σ_1 и σ_2, ограничивающих область R', то R' перейдет в полное риманово пространство R постоянной отрицательной кривизны. Отрезок A_1A_2 будет замкнутой геодезической γ в этом пространстве. Обозначим F геометрическое место точек пространства R, равноудаленных от геодезической γ. Очевидно, F есть поверхность, гомеоморфная тору. Она допускает транзитивную группу движений в себе, индуцированных движениями в R, а поэтому имеет постоянную, следовательно, равную нулю гауссову кривизну. Так как кривизна пространства R отрицательна, то внешняя кривизна поверхности F, равная разности между ее гауссовой кривизной и кривизной пространства, положительна.

Построим замкнутую поверхность с положительной внешней кривизной любого рода $p>1$. Для этого возьмем на плоскости Лобачевского правильный многоугольник с $2(p+1)$ сторонами. Внутренние углы этого многоугольника зависят от его размеров и могут принимать любые значения между 0 и $\pi-\frac{\pi}{p+1}$. Поэтому при $p>1$ найдется такой многоугольник, внутренние углы которого равны $\pi/(p+1)$. Если мы отождествим противоположные стороны этого многоугольника, то получим замкнутое многообразие рода p с постоянной отрицательной кривизной. Обозначим его M.

Зададим теперь на трехмерном многообразии $M^*=M\times g$, которое является топологическим произведением многообразия M на прямую g, риманову метрику следующим образом.

Пусть P — произвольная точка многообразия M. В окрестности точки P метрика многообразия M задается некоторой квадратичной формой

$$ds^2=g_{ij}\,dv^i\,dv^j \qquad i,\ j=1,\ 2.$$

Отобразим многообразие M в окрестности точки P изометрически на плоскость σ пространства Лобачевского R'. Тогда в окрестности точки P', соответствующей P, линейный элемент σ также задается формой $g_{ij}\,dv^i\,dv^j$. Введем в окрестности перпендикуляра к плоскости σ в точке P' полугеодезическую систему координат в R', приняв за линии v^3 геодезические, перпендикулярные σ, а за поверхности $v^3=\text{const}$ — эквидистантные к плоскости σ поверхности. В качестве координат точки

примем взятое со знаком расстояние точки от плоскости σ (координата v^3) и координаты v^1, v^2 основания перпендикуляра, опущенного на плоскость σ. При этом линейный элемент пространства примет вид

$$ds_1^2 = \varphi(v^3)\, g_{ij}\, dv^i\, dv^j + (dv^3)^2.$$

Если теперь мы зададим метрику M^* в окрестности прямой g линейным элементом ds_1^2, то M^* превратится в риманово пространство R^*, локально изометричное пространству Лобачевского. Любая поверхность $v^3=\mathrm{const}\neq 0$ в пространстве R^*, так же как поверхность, эквидистантная плоскости в пространстве Лобачевского, имеет положительную внешнюю кривизну. Таким образом, доказано существование замкнутых поверхностей рода $p>1$ со всюду положительной внешней кривизной в римановом пространстве, и, следовательно, постановка вопроса о бесконечно малых изгибаниях таких поверхностей имеет смысл.

Теперь мы сформулируем две теоремы, которые будут доказаны в настоящем параграфе.

Теорема 1. *Замкнутая, гомеоморфная тору поверхность с положительной внешней кривизной в римановом пространстве, закрепленная в одной точке, жесткая, т. е. всякое изгибающее поле такой поверхности, равное нулю хотя бы в одной точке, равно нулю тождественно.*

Теорема 2. *Замкнутая поверхность рода $p>1$ с положительной внешней кривизной в римановом пространстве жесткая, т. е. она не допускает иных изгибающих полей, кроме равных нулю тождественно.*

Прежде чем перейти к доказательству теорем, заметим, что условие закрепления поверхности в теореме 1 существенно. Действительно, если не предполагать закрепления, то поверхность, гомеоморфная тору, вообще говоря, может допускать нетривиальные изгибающие поля. Чтобы это показать, возьмем гомеоморфную тору поверхность в пространстве постоянной кривизны, построенную выше. Эта поверхность допускает движения по себе. Поле скоростей этого движения есть изгибающее поле. Правда, оно тривиально в том смысле, что является полем скоростей движения всего пространства. Однако сколь угодно малой деформацией метрики пространства в окрестности поверхности (но не на самой поверхности) можно перейти к неоднородному пространству, которое уже не будет допускать движений. И движение поверхности в себе будет сопровождаться изменением ее внешней формы, т. е. изменением пространственных расстояний между ее точками.

Доказательство теоремы 1. Пусть F — гомеоморфная тору поверхность с положительной внешней кривизной в

римановом пространстве R. Введем на поверхности F какую-нибудь параметризацию u^1, u^2 и определим в окрестности F полугеодезическую параметризацию пространства, приняв в качестве координат v^i точки взятое со знаком расстояние точки до поверхности F (v^3) и координаты u^1, u^2 основания геодезического перпендикуляра, опущенного на поверхность (v^1, v^2).

Если параметризацию поверхности выбрать так, чтобы вторая квадратичная форма $\lambda_{ij}du^idu^j$ приняла изотермический вид ($\lambda_{11}=\lambda_{22}$, $\lambda_{12}=0$), то уравнения бесконечно малого изгибания поверхности принимают особенно простую форму. Именно, ковариантные компоненты ξ_1 и ξ_2 вектора изгибающего поля удовлетворяют системе

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial u^1}-\frac{\partial \xi_2}{\partial u^2}-\left(\tilde{\Gamma}_{11}^{\alpha}-\tilde{\Gamma}_{22}^{\alpha}\right)\xi_\alpha=0, \qquad \frac{\partial \xi_1}{\partial u^2}+\frac{\partial \xi_2}{\partial u^1}-2\tilde{\Gamma}_{12}^{\alpha}\xi_\alpha=0, \qquad (*)$$

где $\tilde{\Gamma}_{ij}^{\alpha}$ — символы Христоффеля для поверхности. Вывод этих уравнений содержится в § 3. Мы хотим воспользоваться системой (*) для доказательства теоремы 1, и в связи с этим прежде всего рассмотрим вопрос о введении сопряженно-изотермической системы координат на поверхности F.

Отобразим поверхность F на тор нулевой кривизны. Такой тор получается отождествлением противоположных сторон прямоугольника Δ на евклидовой плоскости. Если мы введем в плоскости такого прямоугольника декартовы координаты u^1 и u^2, взяв в качестве осей стороны прямоугольника Δ, и сопоставим в качестве координат на поверхности F координаты соответствующей точки прямоугольника, то первая и вторая квадратичные формы поверхности в таких координатах будут

$$g_{ij}\,du^i\,du^j, \qquad \lambda_{ij}\,du^i\,du^j,$$

где g_{ij} и λ_{ij} — периодические по u^1 и u^2 функции с периодами, равными сторонам прямоугольника. Универсальная накрывающая $\bar{F}$ поверхности F имеет те же фундаментальные формы, но рассматриваемые на всей плоскости u^1, u^2.

Обозначим M двумерное риманово многообразие, метрика которого задается второй квадратичной формой поверхности $\bar{F}$, т. е. формой $\lambda_{ij}du^i du^j$ в плоскости u^1, u^2. Так как внешняя кривизна поверхности F положительная и, следовательно, форма $\lambda_{ij}\,du^i\,du^j$ определенная (не ограничивая общности, ее можно считать положительно определенной), то риманову метрику такой формой задавать можно.

Отобразим многообразие M на плоскость u^1, u^2 с ее естественной метрикой, сопоставляя точки с одинаковыми координатами u^1, u^2. Это отображение квазиконформно. Оно переводит бесконечно малый круг M в бесконечно малый эллипс плоскости с равномерно ограниченным отношением полуосей.

Отсюда следует, что многообразие M допускает конформное отображение S на плоскость. Пусть u и v — декартовы координаты точки, в которую переходит точка (u^1, u^2) многообразия M при конформном отображении S на плоскость. Если в многообразии M ввести в качестве координат точки координаты u, v ее образа при конформном отображении S, то линейный элемент M примет изотермическую форму

$$ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2).$$

Положим

$$\tilde{z} = u^1 + iu^2, \qquad z = u + iv.$$

Тогда отображение S задается некоторой функцией s комплексного переменного $\tilde{z}$ со значениями в плоскости комплексного переменного z, т. е.

$$z = s(\tilde{z}).$$

Обозначим α_1 и α_2 отличные от нуля комплексные числа, изображающие вершины прямоугольника Δ, расположенные на осях координат u^1 и u^2 соответственно. Отметим следующее свойство отображения S.

Существуют комплексные числа ω_1 и ω_2 такие, что при любом $\tilde{z}$ и целых m, n

$$s(\tilde{z} + m\alpha_1 + n\alpha_2) = s(\tilde{z}) + m\omega_1 + n\omega_2.$$

Для того чтобы доказать это свойство при любых m и n, достаточно убедиться, что оно справедливо при $m=1$, $n=0$, и $m=0$, $n=1$. Рассмотрим случай $m=1$, $n=0$.

Отображение многообразия M на себя, при котором точке $\tilde{z}$ сопоставляется точка $\tilde{z}+\alpha_1$, есть изометрическое отображение в силу периодичности коэффициентов формы $\lambda_{ij}\,du^i\,du^j$ — линейного элемента многообразия M. Поэтому отображение плоскости z на себя, при котором точке $s(\tilde{z})$ сопоставляется точка $s(\tilde{z}+\alpha_1)$, является конформным. Но единственным конформным отображением евклидовой плоскости на себя является линейное отображение. Таким образом,

$$s(\tilde{z} + \alpha_1) = cs(\tilde{z}) + \omega_1.$$

Так как это отображение не должно иметь неподвижных точек (отображение $\tilde{z} \to \tilde{z} + \alpha_1$ не имеет неподвижных точек), то постоянная c равна единице, и, следовательно,

$$s(\tilde{z} + \alpha_1) = s(\tilde{z}) + \omega_1.$$

Аналогично доказывается существование такого ω_2, что

$$s(\tilde{z} + \alpha_2) = s(\tilde{z}) + \omega_2.$$

Отсюда как следствие получается, что при любых целых m и n

$$s(\tilde{z}+m\alpha_1+n\alpha_2)=s(\tilde{z})+m\omega_1+n\omega_2.$$

Введем теперь u и v в качестве координат на универсальной накрывающей $\tilde{F}$. Тогда ее первая и вторая квадратичные формы будут заданы в плоскости u, v, причем вторая квадратичная форма будет иметь изотермический вид

$$\lambda(du^2+dv^2).$$

Коэффициенты обеих форм будут двоякопериодическими функциями комплексного переменного $z=u+iv$ с периодами ω_1 и ω_2.

Замечание. Пусть Δ' — криволинейный четырехугольник в плоскости z, в который отображение S переводит прямоугольник Δ. Отмеченное свойство отображения S позволяет утверждать, что Δ' превращается в тор нулевой кривизны при отождествлении соответствующих точек противоположных сторон. Таким образом, попутно мы доказали возможность конформного отображения произвольного, гомеоморфного тору римановa многообразия на некоторый тор нулевой кривизны.

Изгибающее поле ξ поверхности F мы можем продолжить на универсальную накрывающую $\tilde{F}$, сопоставляя произвольной точке $\tilde{F}$ вектор изгибающего поля поверхности F в точке, геометрически совпадающей с данной точкой $\tilde{F}$. В координатах u, v на $\tilde{F}$ компоненты ξ_1 и ξ_2 изгибающего поля будут также двоякопериодическими функциями комплексного переменного $z=u+iv$.

Обратимся теперь к уравнениям изгибающего поля:

$$\frac{\partial\xi_1}{\partial u}-\frac{\partial\xi_2}{\partial v}=a\xi_1+b\xi_2,$$

$$\frac{\partial\xi_1}{\partial v}+\frac{\partial\xi_2}{\partial u}=c\xi_1+d\xi_2.$$

Коэффициенты $a, \ldots, d$ этой системы выражаются через символы Христоффеля поверхности и, следовательно, являются двоякопериодическими функциями z.

Полагая

$$\zeta=\xi_1+i\xi_2, \quad \overline{\zeta}=\xi_1-i\xi_2,$$

$$A=\frac{1}{4}(a+d+ic-ib), \quad B=\frac{1}{4}(a-d+ic+ib),$$

$$\frac{\partial}{\partial\overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u}+i\frac{\partial}{\partial v}\right),$$

мы можем уравнения изгибающего поля записать в следующей форме:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\overline{z}}=A\zeta+B\overline{\zeta}.$$

Возьмем теперь круг K_R радиуса R с центром в точке $z=0$. Тогда внутри круга функция ζ допускает представление

$$\zeta = \varphi(z)\, e^{\omega(z)},$$

где $\varphi(z)$ — некоторая аналитическая функция,

$$\omega(z) = \iint\limits_{K_R} \frac{C(t)\, ds}{t-z}, \quad C(t) = -\frac{1}{\pi}\left(A(t) + B(t)\frac{\overline{\zeta}(t)}{\zeta(t)}\right),$$

а интегрирование выполняется по площади круга K_R.

Пусть $q<1$ — некоторое фиксированное число. Оценим $|\omega(z)|$ для значений z, удовлетворяющих условию $|z| \leqslant qR$. Возьмем круг $K(z)$ с центром в точке z, касающийся изнутри круга K_R. Тогда

$$\omega(z) = \iint\limits_{K(z)} \frac{C(t)\, ds}{t-z} + \iint\limits_{K_R - K(z)} \frac{C(t)\, ds}{t-z}.$$

Так как $C(t)$ как периодическая функция ограничена, а при $|z| \leqslant qR$ в области $K_R - K(z)$

$$|t-z| \geqslant (1-q) R,$$

то

$$\left| \iint\limits_{K_R - K(z)} \frac{C(t)\, ds}{t-z} \right| \leqslant c_1 |z|,$$

где c_1 — некоторая постоянная.

Обозначим через Δ_0 параллелограмм с вершинами $z + \frac{1}{2} \times \times (\pm\omega_1, \pm\omega_2)$. Через Δ_{mn} обозначим параллелограмм, равный и параллельно расположенный Δ_0 с центром в точке $z + m\omega_1 + n\omega_2$, где m и n — любые целые числа. Теперь разобьем круг $K(z)$ на две области — $K_1(z)$ и $K_2(z)$. Область $K_1(z)$ состоит из тех параллелограммов Δ_{mn}, которые содержатся целиком в круге $K(z)$, а $K_2(z) = K(z) - K_1(z)$. Очевидно,

$$\left| \iint\limits_{K_2(z)} \frac{C(t)\, ds}{t-z} \right| < c_2,$$

где c_2 — некоторая постоянная. Остается оценить

$$\omega_1(z) = \iint\limits_{K_1(z)} \frac{C(t)}{t-z}\, ds.$$

Используя периодичность функции $C(t)$, приведем интегрирование в выражении $\omega_1(z)$ к основному параллелограмму Δ_0.

Тогда получим

$$\omega_1(z) = \iint\limits_{\Delta_0} \left(\sum_{m,\,n} \frac{1}{t - z + \omega_{mn}} \right) C(t)\, ds, \quad \omega_{mn} = m\omega_1 + n\omega_2.$$

В этой формуле преобразованием переменной интегрирования можно сделать z равным нулю. Тогда

$$\omega_1(z) = \iint\limits_{\Delta_0} \left(\sum_{m,\,n} \frac{1}{t - \omega_{mn}} \right) C_1(t)\, ds.$$

Так как среди слагаемых суммы, стоящей в выражении $\omega_1(z)$, вместе с членом $1/(t - \omega_{mn})$ содержится член $1/(t + \omega_{mn})$, то можно записать

$$\omega_1(z) = \frac{1}{2} \iint\limits_{\Delta_0} \left(\sum_{m,\,n} \frac{1}{t^2 - \omega_{mn}^2} \right) t C_1(t)\, ds.$$

Рассмотрим теперь разность

$$\iint\limits_{\Delta_{mn}} \frac{ds_\tau}{t^2 - \omega_{mn}^2} - \iint\limits_{\Delta_{mn}} \frac{ds_\tau}{t^2 - \tau^2}.$$

При сравнительно большом $|\omega_{m,\,n}|$

$$\left| \frac{1}{t^2 - \omega_{mn}^2} - \frac{1}{t^2 - \tau^2} \right| \leqslant c_3 \left| \frac{1}{\tau^3} \right|,$$

где c_3 — некоторая постоянная. Поэтому

$$\omega_1 = \iint\limits_{\Delta_0} \left(\iint\limits_{K_1(z)} \frac{ds_\tau}{t^2 - \tau^2} \right) t C_1(t)\, ds_t + O(1).$$

Внутреннее интегрирование можно выполнять по кругу $K(z)$, так как связанное с этим изменение в интегральной части ω_1 может быть включено в остаток $O(1)$. Но

$$\iint\limits_{K(z)} \frac{ds_\tau}{t^2 - \tau^2} = \int \oint \frac{d\rho\, d\tau}{(t^2 - \tau^2)\,\tau},$$

где внутреннее интегрирование в правой части выполняется по комплексному переменному τ вдоль окружности радиуса ρ, а внешнее интегрирование — по ρ в пределах от нуля до радиуса круга $K(z)$. Так как при $|t| < \rho$

$$\oint \frac{d\tau}{(t^2 - \tau^2)\,\tau} = 0,$$

то

$$\left| \iint\limits_{K(z)} \frac{ds_\tau}{t^2 - \tau^2} \right| \leqslant c_1,$$

где c_1 — некоторая постоянная. Отсюда мы, наконец, заключаем, что $|\omega_1|$ не превосходит некоторой постоянной, и, следовательно, при больших z

$$|\omega(z)| \leqslant c_0 |z|.$$

Возьмем теперь последовательность кругов K_n радиуса n и построим последовательность соответствующих им функций ω_n и φ_n:

$$\zeta(z) = \varphi_n(z)\, e^{\omega_n(z)}.$$

Так как $\zeta(z)$ как периодическая функция ограничена, то из последовательности функций φ_n можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Предельная функция $\varphi(z)$ будет аналитической во всей плоскости z.

По условию теоремы функция ζ в некоторой точке z_0 обращается в нуль (точка закрепления поверхности). В силу периодичности ζ обращается в нуль во всех точках $z_{mn} = z_0 + \omega_{mn}$. В этих же точках обращаются в нуль функции $\varphi_n(z)$, а следовательно, и предельная функция $\varphi(z)$.

Так как функция $\varphi(z)$ растет не быстрее $e^{c_0|z|}$, то она, обращаясь в нуль в точках z_{mn}, по известной теореме должна быть равна нулю тождественно. Отсюда в силу равномерной ограниченности функций $\omega_n(z)$ в любой конечной части плоскости z заключаем, что $|\zeta(z)|$ в любой конечной части плоскости z сколь угодно мала, а следовательно, $\zeta(z)$ равна нулю тождественно.

Таким образом, у нашего изгибающего поля компоненты ξ_1 и ξ_2 равны нулю. Что касается третьей компоненты ξ_3, то она обращается в нуль вместе с ξ_1 и ξ_2, так как

$$2\frac{\partial \xi_1}{\partial u} - \Gamma_{11}^k \xi_k - 2\lambda\xi_3 = 0.$$

Теорема доказана полностью.

Наметим доказательство теоремы 2.

Пусть F — замкнутая поверхность рода p с положительной внешней кривизной в римановом пространстве R. Возьмем замкнутое двумерное многообразие F_0 рода p с постоянной отрицательной гауссовой кривизной и отобразим на него какнибудь поверхность F. Это отображение индуцирует отображение универсальной накрывающей $\bar{F}$ поверхности F на плоскость Лобачевского. Введем на поверхности $\bar{F}$ метрику с помощью второй квадратичной формы F и полученное при этом риманово многообразие обозначим M.

Отображение поверхности $\bar{F}$ на плоскость Лобачевского порождает отображение многообразия M. Это отображение ква-

зиконформно. Отображая теперь плоскость Лобачевского конформно на единичный круг евклидовой плоскости, мы получим квазиконформное отображение многообразия M. Отсюда следует, что многообразие M может быть конформно отображено на единичный круг. Обозначим это отображение S.

Пусть M_0 — область многообразия M, соответствующая поверхности F. Многообразие M допускает дискретную группу G изометрических преобразований g_k. Области $M_k=g_kM_0$, которые получаются при этих изометрических преобразованиях из M_0, покрывают все многообразие M.

Изометрические преобразования g_k многообразия M в себя порождают преобразования $h_k=Sg_kS^{-1}$ единичного круга в себя. Мы утверждаем, что эти преобразования являются дробно-линейными. Действительно, так как отображение g_k является изометрическим, а отображение S конформно, то отображение h_k круга в себя конформно. Всякое же конформное отображение круга в себя осуществляется дробно-линейной функцией комплексного переменного.

Отображение S многообразия M на единичный круг есть вместе с тем отображение поверхности $\bar{F}$ на этот круг. Если в качестве координат точки на поверхности $\bar{F}$ взять декартовы координаты u, v в круге, то вторая квадратичная форма поверхности $\bar{F}$ примет изотермический вид, а изометрические преобразования $\bar{F}$ в себя будут изображаться дробно-линейными преобразованиями комплексного переменного $z=u+iv$.

Сохраняя введенные обозначения, обратимся к уравнению для изгибающего поля в комплексной форме

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\bar{z}}=A\zeta+B\bar{\zeta}.$$

Внутри круга $|z|<\rho<1$ решение этого уравнения допускает представление

$$\zeta=\varphi(z)\,e^{\omega(z)}.$$

Предположим теперь, что нам удалось каким-нибудь образом доказать равномерную ограниченность функций $\varphi(z)$ при $\rho\to 1$. Тогда доказательство теоремы заканчивается следующим образом.

Строим последовательность кругов K_n радиуса $\rho=1-\dfrac{1}{n}$.

Для каждого круга определяем функцию φ_n. Так как функции φ_n равномерно ограничены, то из них можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Пусть φ — предельная функция этой подпоследовательности. Выясним наличие и распределение нулей функции φ. Так как нули функции φ совпадают

с нулями функции ζ, то достаточно рассмотреть нули функции ζ.

В каждой области $\Delta_k = S(M_k)$ функция ζ обращается в нуль по крайней мере в одной точке. Действительно, если бы это было не так, то на поверхности F можно было бы задать непрерывное, нигде не обращающееся в нуль касательное векторное поле (проекция изгибающего поля на поверхность). Но такое поле может быть задано только на поверхности, гомеоморфной тору. А наша поверхность имеет род $p>1$.

Пусть z_k — нули функции ζ, а следовательно, и φ. Рассмотрим ряд

$$U = \sum_k (1 - |z_k|).$$

Покажем, что он расходится. Действительно, точки A_k на плоскости Лобачевского, соответствующие корням z_k функции ζ, распределены равномерно. Поэтому плотность распределения корней z_k растет по мере приближения к окружности круга $|z|=1$, как $1/(1-\rho^2)^2$, т. е. в элементе площади ds круга содержится $\approx \frac{c_0\, ds}{(1-\rho^2)^2}$ нулей. Принимая это во внимание, можем записать, что

$$U = \iint\limits_{|z|<1} \frac{c_0 (1-\rho)\, ds}{(1-\rho^2)^2} + O(1),$$

где $O(1)$ — ограниченная величина. Так как интеграл в правой части равенства расходится, то расходится и ряд U.

Из расходимости ряда U и ограниченности функции φ следует, что φ равна нулю тождественно. Отсюда без труда заключаем, что равна нулю функция ζ, а вместе с ней и вектор изгибающего поля.

Таким образом, нам остается показать только, что функция φ ограничена во всем круге $|z|<1$. Сейчас мы укажем один подход к доказательству этого утверждения, который, по-видимому, должен привести к цели.

Весь круг $|z|<1$ покрыт областями $\Delta_k = S(M_k)$. Пусть Δ_0 — та из областей, которая содержит точку $z=0$. Сравним значения функции $C(t)$ в соответствующих точках областей Δ_0 и Δ'. Речь идет о соответствии, которое устанавливается дробно-линейным преобразованием h_k, переводящим круг $|z| \leqslant 1$ в себя и область Δ_0 в Δ'. Пусть z — произвольная точка области Δ_0, а z' — соответствующая точка области Δ'. Будем рассматривать координаты u, v точки z как координаты точки z'. Такая замена координат сопровождается соответствующим преобразованием ковариантных компонент ξ_α изгибающего поля. Это пре-

образование для комплексной компоненты ζ выполняется по формуле

$$\zeta' = \zeta \frac{d\bar{z}}{d\bar{z}'} .$$

Из уравнения бесконечно малого изгибания в комплексной форме видно, что

$$C(z) = -\frac{1}{\pi\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} .$$

Отсюда, принимая во внимание связь между ζ и ζ' при преобразовании координат, получаем

$$C(z') = C(z) - \frac{1}{\pi} \frac{d^2\bar{z}}{d\bar{z}'^2} \Big/ \frac{d\bar{z}}{d\bar{z}'} .$$

Так как функция $C(z)$ в Δ_0 ограничена, то функцию ω можно записать в виде

$$\omega = \iint\limits_{K_\rho} \frac{D(t)\,ds}{t-z} + O(1),$$

где D — функция, которая в области Δ' определяется равенством

$$D(z') = -\pi \frac{d^2\bar{z}}{(d\bar{z}')^2} \Big/ \frac{d\bar{z}}{d\bar{z}'} .$$

Здесь z' — произвольная точка области Δ', а z — соответствующая ей точка области Δ_0 при преобразовании h_k, переводящем область Δ_0 в Δ'.

Обозначим теперь E функцию, которая в области Δ' определяется равенством

$$E(z') = \frac{d\bar{z}}{d\bar{z}'} .$$

Тогда доказательство ограниченности функции φ эквивалентно доказательству ограниченности функции

$$\Psi = E(z)\, e^{-\pi \iint\limits_{K_\rho} \frac{D(t)}{t-z} ds} .$$

Существенно заметить, что функция Ψ не зависит от конкретного вида поверхности F. Она определяется полностью группой преобразований h_k. Последняя зависит только от топологии поверхности F, т. е. от ее рода p. Можно сказать, что группа преобразований h_k совпадает с группой преобразований некоторой автоморфной функции в круге $|z| < 1$.

Глава VII

Выпуклые поверхности с данным сферическим изображением

Во всех основных проблемах, рассмотренных до сих пор, речь идет о двух или большем числе объектов, находящихся в изометрическом соответствии: многообразие с заданной на нем метрикой и реализующая эту метрику поверхность в проблеме погружения, две изометричные поверхности в проблеме однозначной определенности, непрерывное семейство изометричных поверхностей в проблеме изгибания. В применении к регулярному случаю речь идет соответственно о многообразиях и поверхностях с общим линейным элементом (ds^2), т. е. первой квадратичной формой. Заданию этой формы в нерегулярном случае соответствует задание внутренней метрики.

В настоящей главе решаются вопросы геометрии в целом, связанные с рассмотрением поверхностей, имеющих заданную третью квадратичную форму в случае, когда идет речь о регулярных поверхностях, или имеющих заданное сферическое изображение — в общем случае. Типичной проблемой такого рода является решение вопроса о равенстве двух замкнутых выпуклых поверхностей, у которых в точках с параллельными и одинаково направленными нормалями n главные радиусы кривизны R_1 и R_2 связаны соотношением

$$f(R_1,\ R_2,\ n)=\varphi(n). \qquad (*)$$

Изложение начинается решением классических проблем Христоффеля и Минковского. Затем ставится и решается общая проблема о существовании и единственности замкнутой выпуклой поверхности, удовлетворяющей уравнению (*). Аналогичная проблема ставится и решается так же для выпуклых многогранников. В конце главы рассматриваются вопросы устойчивости решения некоторых задач геометрии в целом и другие вопросы.

§ 1. Проблема Христоффеля

Проблема Христоффеля состоит в решении вопроса о существовании и единственности замкнутой выпуклой поверхности F, для которой заданная функция $f(n)$ единичного вектора n равна сумме главных радиусов кривизны поверхности в точке

с нормалью n. Эта проблема была в известном смысле решена самим Христоффелем, который восстановил поверхность по заданной функции f, т. е. нашел ее уравнения. Мы здесь приведем решение проблемы Христоффеля, данное Бляшке [22].

Пусть F — замкнутая выпуклая поверхность и X — произвольная точка пространства, отличная от начала координат O. Проведем опорную плоскость α поверхности F с внешней нормалью OX. Пусть Y — точка поверхности, которая лежит в плоскости α. Тогда функция

$$P(X) = \overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OY}$$

координат x_1, x_2, x_3 точки X называется *опорной функцией* поверхности F. Рассмотрим некоторые свойства опорной функции.

Очевидно, опорная функция является положительно однородной функцией первой степени. Поэтому, если она дифференцируема, то по теореме Эйлера

$$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 = P,$$

где P_1, P_2, P_3 обозначают первые производные P по координатам x_1, x_2, x_3 соответственно.

Если выпуклая поверхность вырождается в точку, то опорная функция будет линейной функцией. Действительно, если координаты этой точки a_1, a_2, a_3, то

$$P = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3.$$

Если поверхность F содержит внутри поверхность F_1, то опорные функции P и P_1 этих поверхностей связаны неравенством

$$P_1(x_1,\ x_2,\ x_3) \leqslant P(x_1,\ x_2,\ x_3),$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, если поверхности имеют общую опорную плоскость с внешней нормалью (x_1, x_2, x_3).

Из двух последних свойств опорной функции следует ее выпуклость. Именно,

$$P(\lambda x' + (1-\lambda)x'') \leqslant \lambda P(x') + (1-\lambda)P(x''), \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

Действительно, будем рассматривать наряду с опорной функцией P поверхности F опорную функцию P' точки A. Точку A можно так расположить на поверхности F, чтобы при данных x', x'' и λ имело место равенство

$$P(\lambda x' + (1-\lambda)x'') = P'(\lambda x' + (1-\lambda)x'').$$

Для этого внешняя нормаль поверхности F в точке A должна иметь направление $\lambda x' + (1-\lambda)\, x''$. Так как $P' \leqslant P$, а для P', очевидно,

$$P'(\lambda x' + (1-\lambda)\, x'') \leqslant \lambda P'(x') + (1-\lambda)\, P'(x''),$$

то

$$P(\lambda x' + (1-\lambda)\, x'') \leqslant \lambda P(x') + (1-\lambda)\, P(x'').$$

Утверждение доказано.

Опорная функция выпуклого многогранника является кусочно-линейной. Именно, если ω — сферическое изображение вершины A многогранника и V — многогранный угол, проектирующий область ω из начала координат, то опорная функция многогранника линейна внутри угла V и совпадает с опорной функцией вершины A.

Если поверхность F сместить на вектор a, то опорная функция поверхности получит линейное слагаемое

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3,$$

где a_1, a_2, a_3 — компоненты вектора смещения по осям x_1, x_2, x_3.

Из определения опорной функции выпуклой поверхности непосредственно следует ее непрерывность.

Опорная функция, будучи положительно однородной первой степени, однозначно определяется своими значениями на единичной сфере с центром в начале координат. При этом она имеет простой геометрический смысл: ее значение $P(n)$ в точке сферы с вектором n есть с точностью до знака расстояние от начала координат O до опорной плоскости с внешней нормалью n; если начало координат находится внутри поверхности, то это просто расстояние.

Для выпуклых кривых на плоскости понятие опорной функции вводится аналогично, причем имеют место отмеченные выше свойства. Пусть γ — замкнутая выпуклая кривая с положительной кривизной. Найдем выражение для радиуса кривизны кривой γ через опорную функцию p, заданную на единичной окружности. В качестве аргумента функции p возьмем дугу σ окружности. Пусть $r(s)$ — вектор точки кривой, отвечающей дуге s (кривой γ). Тогда

$$p = rn.$$

Дифференцируя это равенство по дуге σ окружности, и замечая, что $r'n = 0$, получим

$$p' = r\tau = q,$$

где τ — единичный вектор касательной кривой γ в точке с нормалью n. Заметим, что производная p' имеет простой геометрический смысл. Она равна длине отрезка (q) касательной

к кривой γ между точкой касания и основанием перпендикуляра, опущенного на касательную из начала координат O (рис. 32).

Продифференцируем равенство $p=rn$ дважды по дуге σ. Замечая, что $ds/d\sigma=R$ (радиус кривизны кривой γ), $r'_\sigma=\tau R$, $n''=-n$, получим

$$p''=R\tau^2-rn=R-p.$$

Отсюда получаем следующую формулу для радиуса кривизны кривой:

$$R=p''+p.$$

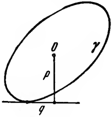

Рис. 32.

Рассмотрим теперь регулярную, дважды дифференцируемую замкнутую выпуклую поверхность. Пусть $P(a_1, a_2, a_3)$ — значение ее опорной функции в точке с вектором $a(a_1, a_2, a_3)$. Проведем касательную плоскость поверхности в точке с внешней нормалью a. Уравнение этой плоскости, очевидно, будет

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=P(a_1, a_2, a_3).$$

Положим

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, a_1, a_2, a_3)\equiv a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3-P(a_1, a_2, a_3).$$

Пусть $\bar{x}$ — точка поверхности F и $\bar{a}$ — внешняя нормаль в этой точке. Тогда при фиксированном $\bar{x}$ и переменном a функция $\Phi(\bar{x}, a)$ сохраняет знак, а при $a=\bar{a}$ имеем $\Phi(\bar{x}, \bar{a})=0$. Поэтому при $x=\bar{x}$ и $a=\bar{a}$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a_1}=\frac{\partial\Phi}{\partial a_2}=\frac{\partial\Phi}{\partial a_3}=0.$$

Отсюда для координат точки касания получаются следующие формулы

$$x_1=\frac{\partial P}{\partial a_1}, \quad x_2=\frac{\partial P}{\partial a_2}, \quad x_3=\frac{\partial P}{\partial a_3},$$

где a_1, a_2, a_3 — координаты вектора внешней нормали в точке касания.

Выразим главные радиусы кривизны выпуклой поверхности в зависимости от ее опорной функции. Следуя Бляшке, рассмотрим смещение из данной точки поверхности в бесконечно близкую точку по главному направлению на поверхности. Тогда по формуле Родрига будем иметь

$$dx_i+R\,d\xi_i=0,$$

где ξ_i — компоненты вектора внешней нормали поверхности, а R — радиус кривизны в направлении смещения точки. Так как $x_i = P_i$, то

$$\sum_k P_{ik}\, d\xi_k + R\, d\xi_i = 0, \qquad i = 1,\ 2,\ 3.$$

Рассматривая эти равенства как систему линейных уравнений относительно величин $d\xi_i$, запишем условие ее совместности

$$\begin{vmatrix} P_{11}+R, & P_{12}, & P_{13} \\ P_{21}, & P_{22}+R, & P_{23} \\ P_{31}, & P_{32}, & P_{33}+R \end{vmatrix} = 0.$$

Два корня R, которые удовлетворяют этому уравнению, суть главные радиусы кривизны поверхности. Что касается третьего, то он равен нулю. Действительно, из условия однородности функции P получаем

$$\sum_k P_{ik} a_k = 0, \qquad i = 1,\ 2,\ 3.$$

Это влечет за собой равенство нулю определителя, составленного из величин P_{ik}, а следовательно, равенство нулю одного из корней уравнения для R.

Из уравнения, определяющего главные радиусы кривизны R_1 и R_2, находим

$$-(R_1 + R_2) = P_{11} + P_{22} + P_{33},$$

где после формального дифференцирования опорной функции надо взять в качестве аргументов координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 единичного вектора нормали.

Обратимся теперь к проблеме Христоффеля. Покажем, что поверхность F восстанавливается по заданной сумме главных радиусов кривизны $f = R_1 + R_2$.

Пусть U_k — однородный многочлен степени k, удовлетворяющий уравнению Лапласа

$$\Delta U_k = \frac{\partial^2 U_k}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 U_k}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 U_k}{\partial \xi_3^2} = 0.$$

Из функций U_k, рассматриваемых на единичной сфере с центром в начале координат, известным приемом может быть построена полная ортонормированная система (шаровые функции). Разложим опорную функцию P поверхности F на единичной сфере в ряд по шаровым функциям U_k. Получим

$$P = \sum_k c_k U_k(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3).$$

При этом опорная функция P во всем пространстве будет, очевидно, задаваться формулой

$$P(x_1, x_2, x_3) = \sum_k c_k \frac{U_k(x_1, x_2, x_3)}{r^{k-1}}, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Вычислим теперь выражение $P_{11}+P_{22}+P_{33}$. Замечая, что

$$\Delta U_k = 0, \quad x_1 \frac{\partial U_k}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial U_k}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial U_k}{\partial x_3} = kU_k,$$

получим

$$P_{11} + P_{22} + P_{33} = -\sum_k c_k \frac{(k-1)(k+2)}{r^{k+1}} U_k.$$

Разложим теперь заданную функцию $f(n) = R_1 + R_2$ по шаровым функциям:

$$f = \sum_k d_k U_k.$$

Так как на единичной сфере $P_{11}+P_{22}+P_{33} = -(R_1+R_2)$, то

$$(k-1)(k+2)c_k = d_k.$$

Отсюда

$$c_k = \frac{d_k}{(k-1)(k+2)}.$$

И, следовательно,

$$P = \sum_k \frac{d_k}{(k-1)(k+2)} U_k, \tag{*}$$

где d_k — коэффициенты разложения по шаровым функциям заданной суммы f главных радиусов кривизны.

Из равенства $(k-1)(k+2)c_k = d_k$ при $k=1$ следует $d_1 = 0$. Отсюда следует, что

$$\int_\omega f U_1 \, d\omega = 0,$$

где интегрирование ведется по единичной сфере. Так как функцию U_1 можно взять произвольно, то

$$\int_\omega f \xi_i \, d\omega = 0, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Или соответственно в векторной форме

$$\int_\omega f n \, d\omega = 0.$$

Так как $d_1=0$, то коэффициент c_1 в разложении P остается неопределенным. Это соответствует тому, что поверхность F заданной суммой главных радиусов кривизны определяется с точностью до переноса.

Полученное выше интегральное условие для функции f является необходимым, но недостаточным для того, чтобы существовала замкнутая *выпуклая* поверхность с данной суммой f главных радиусов кривизны. На это обстоятельство обратил внимание А. Д. Александров. Естественно спросить, каковы достаточные условия. Сейчас мы найдем некоторые достаточные условия. Полученный результат представляет известный интерес. Но главное здесь — метод установления оценок для главных радиусов кривизны, который мы применяем далее в более сложных задачах (например, в § 5).

Идея получения достаточного условия состоит в следующем. Пусть P — функция на единичной сфере, определяемая через заданную функцию f по формуле $(*)$. Если взять достаточно большое положительное C, то функция $P+C$ будет опорной функцией некоторой замкнутой выпуклой поверхности. (Мы предполагаем двукратную дифференцируемость P). Если меньший из главных радиусов кривизны этой поверхности будет больше C, то параллельная ей поверхность на расстоянии C будет выпуклой, и она задается опорной функцией P. Таким образом, дело сводится к оценке минимального радиуса кривизны выпуклой поверхности.

Пусть Φ — выпуклая поверхность, задаваемая опорной функцией $h(\xi)=P(\xi)+C$, и $F(\xi)$ — сумма главных радиусов кривизны этой поверхности в точке с нормалью ξ. Введем на единичной сфере Ω с центром в начале координат функцию $w(\xi, t)$ точки ξ и направления t в ней, равную

$$h(\xi)+h_{ss}(\xi),$$

где дифференцирование h выполняется по дуге большого круга $K(\xi, t)$, проходящего через точку ξ в направлении t. Функция $w(\xi, t)$ представляет собой радиус кривизны цилиндра, касающегося поверхности Φ, с образующими, перпендикулярными к плоскости круга $K(\xi, t)$ в точке с нормалью ξ. Максимум и минимум функции $w(\xi, t)$ при фиксированном ξ получаются, если направление t параллельно главному направлению поверхности Φ, причем максимальное и минимальное значения w равны главным радиусам кривизны поверхности.

Функция $w(\xi, t)$ достигает абсолютного минимума в некоторой точке ξ_0 для некоторого направления t_0 в этой точке. Введем на единичной сфере Ω географические координаты φ, ϑ, приняв большой круг, проходящий через точку ξ_0 в направлении t_0, за экватор, а перпендикулярный ему большой круг, про-

ходящий через точку ξ_0 — за начальный меридиан. При таком выборе координат сумма главных радиусов кривизны поверхности Φ в точке с нормалью $\xi(\varphi, \vartheta)$ равна

$$F(\xi) = 2h + h_{\vartheta\vartheta} + \frac{1}{\cos^2\vartheta} h_{\varphi\varphi} - h_\vartheta \operatorname{tg} \vartheta.$$

Функция

$$\overline{w}(\xi) = h + h_{\vartheta\vartheta}$$

в окрестности точки ξ_0 удовлетворяет неравенству

$$\overline{w}(\xi) \geqslant w(\xi_0, t_0),$$

причем в точке ξ_0 достигается равенство. Отсюда следует, что функция $\overline{w}(\xi)$ в точке ξ_0 достигает минимума и этот минимум равен $w(\xi_0, t_0)$.

Так как функция $\overline{w}(\xi)$ достигает в точке ξ_0 минимума, то в этой точке необходимо выполнение условий

$$\begin{aligned}
\overline{w}_\vartheta &= h_\vartheta + h_{\vartheta\vartheta\vartheta} = 0,\\
\overline{w}_\varphi &= h_\varphi + h_{\vartheta\vartheta\varphi} = 0,\\
\overline{w}_{\vartheta\vartheta} &= h_{\vartheta\vartheta} + h_{\vartheta\vartheta\vartheta\vartheta} \geqslant 0,\\
\overline{w}_{\varphi\varphi} &= h_{\varphi\varphi} + h_{\vartheta\vartheta\varphi\varphi} \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что точка поверхности Φ, в окрестности которой ведутся наши рассмотрения (точка с нормалью ξ_0), совпадает с началом координат. При этом, очевидно,

$$h = 0, \quad h_\vartheta = 0, \quad h_\varphi = 0.$$

Отсюда в силу условий минимума $\overline{w}_\vartheta = \overline{w}_\varphi = 0$ получаем

$$h_{\vartheta\vartheta\vartheta} = 0, \qquad h_{\vartheta\vartheta\varphi} = 0.$$

Дифференцируя $F(\xi)$ дважды по ϑ, в точке ξ_0 будем иметь

$$F_{\vartheta\vartheta} = h_{\vartheta\vartheta\vartheta\vartheta} + h_{\varphi\varphi\vartheta\vartheta} + 2h_{\varphi\varphi}.$$

Так как в той же точке ξ_0

$$F = h_{\vartheta\vartheta} + h_{\varphi\varphi},$$

то

$$F - F_{\vartheta\vartheta} = -(h_{\vartheta\vartheta} + h_{\vartheta\vartheta\vartheta\vartheta}) - (h_{\varphi\varphi} + h_{\vartheta\vartheta\varphi\varphi}) + 2h_{\vartheta\vartheta}.$$

Первые два слагаемых правой части равенства не положительны по условиям минимума $\overline{w}_{\vartheta\vartheta} \geqslant 0$, $\overline{w}_{\varphi\varphi} \geqslant 0$. Величина $h_{\vartheta\vartheta}$ в точке ξ_0 равна $w(\xi_0, t_0)$, т. е. минимальному радиусу кривизны поверхности Φ. Следовательно,

$$2R_{\min}|_\Phi \geqslant F - F_{\vartheta\vartheta}.$$

Очевндно,

$$F = f + 2C.$$

Поэтому

$$R_{\min}|_{\Phi} \geqslant C + \frac{f - f_{\theta\theta}}{2}.$$

Пусть теперь для заданной функции f на еднннчной сфере удовлетворяется условие

$$f - f_{ss} \geqslant 0,$$

где дифференцнрование ведется по дуге s любого большого круга. Тогда

$$R_{\min}|_{\Phi} \geqslant C.$$

Следовательно, параллельная к Φ поверхность, проведенная на расстоянни C от нее, выпуклая. Эта поверхность нмеет своей опорной функцией функцню P, определяемую заданной функцней f по формуле $(*)$. Полученный результат можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема. *Для того чтобы существовала замкнутая выпуклая поверхность с данной суммой $f(\xi)$ главных радиусов кривизны, достаточно выполнение следующих условий:*

$$f(\xi) \geqslant 0, \quad f - f_{ss} \geqslant 0, \quad \int\limits_{\Omega} \xi f(\xi)\, d\omega = 0.$$

§ 2. Проблема Минковского

Пусть F — замкнутая, дважды дифференцируемая выпуклая поверхность с положнтельной гауссовой кривнзной. С помощью этой поверхностн на единнчной сфере Ω можно определить функцню $K(n)$ единичного вектора n, сопоставляя точке n сферы гауссову крнвнзну $K(n)$ поверхности F в точке с внешней нормалью n.

Пусть теперь $K(n)$ — пронзвольная положительная непрерывная функция, заданная на сфере Ω. Тогда можно поставить вопрос о существованнн н единственностн замкнутой выпуклой поверхностн F, которая в точке с внешней нормалью n имеет гауссову крнвизну $K(n)$. Решенне этого вопроса составляет содержание проблемы Минковского. Она была решена самим Минковскнм [48]. Мы приведем решенне проблемы Мннковского, прннадлежащее А. Д. Александрову [3]. Оно начннается рассмотрением соответствующей проблемы для выпуклых многогранников. Общне соображения, которые при этом применяются, будут нами использованы и в других доказательствах настоящей главы.

Лемма 1. *Пусть $n_1, n_2, \ldots, n_k$ — система единичных некомпланарных векторов и $F_1, F_2, \ldots, F_k$ — положительные числа, удовлетворяющие условию*

$$\sum_i n_i F_i = 0. \qquad (*)$$

Тогда существует и притом единственный с точностью до параллельного переноса замкнутый выпуклый многогранник P, грани которого имеют внешние нормали n_i, а их площади равны F_i.

Доказательство этой леммы будет основано на «лемме об отображении», также принадлежащей А. Д. Александрову [3]. Сейчас мы рассмотрим некоторые свойства многогранников, удовлетворяющих условиям леммы 1, которые позволят нам воспользоваться леммой об отображении.

Прежде всего заметим, что внешние нормали n_i многогранника, удовлетворяющего условию (*), не могут быть направлены в одно полупространство. Действительно, если бы векторы n_i были направлены в одно полупространство, например, в $z>0$, то вектор $\Sigma n_i F_i$, ввиду некомпланарности векторов n_i, был бы отличен от нуля и направлен в то же полупространство. Следовательно, условие (*) не выполнялось бы.

Какова бы ни была система векторов n_i, удовлетворяющих условию (*), существует замкнутый выпуклый многогранник с внешними нормалями n_i к граням. Действительно, проведем из центра сферы лучи l_i, имеющие направления векторов n_i. Они пересекут сферу в точках A_i. Проведем в точках A_i касательные плоскости α_i сферы и обозначим E_i полупространства, в которых лежит сфера. Пересечение полупространств E_i есть выпуклый многогранник P, конечный или бесконечный. Его грани лежат в плоскостях α_i и имеют внешние нормали n_i. Многогранник P не может быть бесконечным. Действительно, в противном случае ему принадлежит луч l, не пересекающий ни одной из плоскостей α_i. Следовательно, полупрямые l_i образуют с l углы не меньше $\pi/2$. При этом векторы n_i направлены в одно полупространство, что невозможно.

Рассмотрим совокупность всех замкнутых выпуклых многогранников с внешними нормалями граней n_i и с площадями граней F_i, удовлетворяющими условию

$$0<a<F_i<b.$$

Утверждается, что многогранники рассматриваемой совокупности равномерно ограничены, т. е. что они могут быть расположены внутри шара достаточно большого радиуса, зависящего только от чисел a, b и векторов n_i.

Прежде всего заметим, что, каково бы ни было направление l, среди векоторов n_i найдется такой, который образует

с направлением l угол не больше $\pi/2-\varepsilon$, причем $\varepsilon>0$ и зависит только от векторов n_i. Действительно, если это неверно, то существует последовательность направлений l_s, которые образуют со всеми векторами n_i углы больше $\pi/2-1/s$. Не ограничивая общности, можно считать, что направления l_s сходятся к некоторому направлению l. Это направление образует с векторами n_i углы не меньше $\pi/2$, и, следовательно, векторы n_i направлены в одно полупространство, ограниченное плоскостью, перпендикулярной l. А это невозможно.

Докажем теперь ограниченность совокупности многогранников с внешними нормалями к граням n_i и площадями F_i, удовлетворяющими условию $0<a<F_i<b$. Допустим, рассматриваемая совокупность многогранников не ограничена. Тогда существуют многогранники P_s, удовлетворяющие указанным условиям и имеющие сколь угодно большой диаметр. Пусть, например, диаметр многогранника P_s больше s. Внутри многогранника P_s найдется пара точек A_s и B_s, которые удалены на расстояние, большее s. Спроектируем многогранник P_s на плоскость α, перпендикулярную отрезку A_sB_s. При этом мы получим выпуклый многоугольник $\bar{P}_s$. Так как площади граней многогранника P_s не меньше a, а направление отрезка A_sB_s образует с одним из векторов n_i угол не больше $\pi/2-\varepsilon$ (по доказанному), то площадь многоугольника $\bar{P}_s$, очевидно, не меньше некоторого числа σ, зависящего только от ε и a.

Внутри многоугольника $\bar{P}_s$ найдется пара точек $\bar{C}_s$ и $\bar{P}_s$, расстояние между которыми не меньше некоторого числа δ, зависящего только от σ, следовательно, только от ε и a. Пусть C_s и D_s — точки многогранника P_s, которые проектируются в точки $\bar{C}_s$ и $\bar{D}_s$ на плоскость α. Проведем плоскость β, параллельную отрезкам A_sB_s и C_sD_s. Спроектируем многогранник P_s на плоскость β. Проекция многогранника содержит четырехугольник, вершины которого являются проекциями точек A_s, B_s, C_s, D_s. Площадь этого четырехугольника, очевидно, не меньше $s\delta$, и следовательно, сколь угодно велика, если велико s. Соответственно площадь проекции многогранника сколь угодно велика, а значит, велика и площадь самого многогранника P_s. Вместе с тем она не превосходит bk, где k — число векторов n_i. Мы пришли к противоречию. Утверждение доказано.

Как указано выше, доказательство леммы 1 будет основано на лемме об отображении. Эта лемма гласит:

Пусть A и B — два многообразия одного и того же числа измерений n. Пусть дано отображение φ многообразия A в многообразие B, удовлетворяющее следующим условиям:

1. *В каждой компоненте многообразия B содержатся образы точек из A.*

2. *φ взаимно однозначно.*

3. φ *непрерывно.*

4. *Если точки b_m многообразия B являются образами точек a_n многообразия A и сходятся к точке b, то в A существует точка a, которая имеет своим образом b и является предельной для точек a_n.*

При этих условиях $\varphi(A)=B$, т. е. все точки многообразия B оказываются образами точек многообразия A.

Определим многообразия A и B, о которых идет речь в лемме об отображении. Точками многообразия A являются классы равных и параллельно расположенных многогранников с нормалями n_i, т. е. многогранники одного класса могут быть совмещены параллельным переносом. Так как каждый многогранник определяется опорными числами его граней, число которых k, то многообразие A имеет размерность $k-3$.

Точками многообразия B являются точки k-мерного евклидова пространства с координатами F_i, удовлетворяющими условиям $F_i>0$, $\sum\limits_i n_iF_i=0$. Оно также имеет размерность $k-3$.

Отображение φ, о котором идет речь в лемме об отображении, состоит в сопоставлении данному классу равных и параллельно расположенных многогранников точки пространства с координатами $F_1, F_2, \ldots, F_k$, равными площадям граней многогранников.

Покажем, что условия леммы об отображении для указанных многообразий A, B и отображения φ выполняются. Условие 1 леммы об отображении выполняется потому, что многообразие B как пересечение выпуклых множеств выпукло и, следовательно, связно. Кроме того, как показано выше, существует многогранник с внешними нормалями граней n_i. Следовательно, в каждой компоненте многообразия B (в данном случае единственной) есть образы точек A.

Второе условие леммы об отображении состоит во взаимнооднозначности отображения φ. Покажем, что оно выполнено. Действительно, это условие сводится к утверждению равенства двух замкнутых выпуклых многогранников с данными направлениями и площадями граней. Известна следующая теорема А. Д. Александрова [3].

Если у двух замкнутых выпуклых многогранников все пары параллельных граней таковы, что ни одну грань нельзя поместить внутрь другой параллельным переносом, то такие многогранники равны и параллельно расположены.

Ввиду условия равенства площадей параллельных граней их, очевидно, нельзя поместить одну внутрь другой. Следовательно, многогранник направлениями и площадями граней определен однозначно с точностью до параллельного переноса. А это значит, что отображение φ многообразия A в B взаимно

однозначно. Таким образом, второе условие леммы об отображении выполняется.

Третье условие леммы об отображении состоит в непрерывности отображения φ. По существу оно выражает непрерывность площадей граней при непрерывной деформации с сохранением направления граней. А это очевидно.

Обратимся, наконец, к четвертому условию леммы об отображении. Пусть $b_s(F_1^s, \ldots, F_k^s)$ — последовательность точек многообразия B, сходящаяся к точке $b_0(F_1^0, \ldots, F_k^0)$, P_s — замкнутый многогранник с внешними нормалями граней $n_1, \ldots, n_k$ и площадями граней $F_1^s, \ldots, F_k^s$. Четвертое условие леммы требует, чтобы существовал многогранник P^0 с внешними нормалями граней $n_1, \ldots, n_k$ и площадями граней $F_1^0, \ldots, F_k^0$, предельный для последовательности многогранников, равных P^s. Покажем, что и это условие выполняется. Действительно, в виду условия $F_i^0 > 0$, существуют положительные числа a и b такие, что при всех i, s имеем $a < F_i^s < b$. Поэтому, как показано выше, многогранники P^s ограничены в совокупности. Не ограничивая общности, можно считать, что последовательность многогранников P^s сходится к некоторому многограннику P^0. Очевидно, многогранник P^0 имеет грани с внешними нормалями n_i и площадями F_i^0. Таким образом, и четвертое условие леммы об отображении выполняется.

Согласно лемме об отображении каждая точка многообразия B является образом некоторой точки многообразия A. А это значит, что для каждой системы единичных векторов n_i и положительных чисел F_i, удовлетворяющих условию

$$\sum n_i F_i = 0,$$

существует замкнутый выпуклый многогранник с внешними нормалями граней n_i и площадями граней F_i. Лемма 1 доказана.

Теорема. *Пусть на единичной сфере Ω с центром в начале координат O задана непрерывная положительная функция $K(n)$ точки n на сфере. Пусть эта функция удовлетворяет условию*

$$\int_{\Omega} \frac{n\, d\omega}{K(n)} = 0, \qquad (**)$$

где $d\omega$ — элемент площади сферы Ω, а интегрирование распространяется на всю сферу.

Тогда существует и притом единственная с точностью до параллельного переноса замкнутая выпуклая поверхность Φ, которая в точке с внешней нормалью n имеет гауссову кривизну, равную $K(n)$.

Мы ограничимся в этом параграфе только доказательством существования поверхности Ф. Единственность будет получена в § 4 как следствие более общей теоремы.

Доказательство. Разобьем сферу Ω меридианами и параллелями на малые области ω_α. Положим

$$\int_{\omega_\alpha} \frac{n\,d\omega}{K(n)} = n_\alpha F_\alpha,$$

где n_α — единичный вектор, а F_α — положительное число. Для векторов n_α и чисел F_α ввиду условия (**) выполнены условия леммы 1

$$\sum n_\alpha F_\alpha = 0.$$

Следовательно, существует замкнутый выпуклый многогранник P с внешними нормалями граней n_α и площадями граней F_α. Площадь проекции многогранника P на плоскость, перпендикулярную единичному вектору τ, равна

$$S_\tau = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{|n\tau|}{K(n)}\,d\omega > \varepsilon > 0,$$

где ε — некоторая постоянная.

Построим последовательность многогранников P_s, отвечающих разбиениям сферы на области ω_α при измельчении этих разбиений. Многогранники P_s ограничены в совокупности. Действительно, площади многогранников P_s ограничены сверху, они не превосходят величины

$$\int_{\Omega} \frac{d\omega}{K(n)},$$

а их проекции на любую плоскость, как показано выше, ограничены снизу числом $\varepsilon > 0$. После этого достаточно воспроизвести рассуждение, приведенное по аналогичному поводу в доказательстве леммы 1.

Так как многогранники P_s ограничены в совокупности, то, не ограничивая общности, можно считать, что они сходятся к некоторой замкнутой выпуклой поверхности Ф. Покажем, что эта поверхность гладкая и строго выпуклая. Гладкость поверхности Ф означает отсутствие у нее конических и ребристых точек, строгая выпуклость — отсутствие на ней прямолинейных отрезков. Допустим, на поверхности Ф имеется коническая точка A. Не ограничивая общности, можно считать, что многогранники P_s при больших s располагаются внутри поверхности

Φ в окрестности точки A. Пусть G — сферическое изображение точки A поверхности Φ. Так как точка A коническая, то G содержит кружок g с окружностью, не пересекающейся с границей области G. При $s \to \infty$ общая площадь тех граней многогранника P_s, нормали которых принадлежат g, сколь угодно мала. Но это невозможно, так как

$$\int\limits_g \frac{d\omega}{K} > \sum{}' F_\alpha > \bar{\varepsilon}(g) > 0,$$

где $\bar{\varepsilon}$ — постоянная, зависящая только от g и одинаковая для всех многогранников.

В случае ребристой точки A надо воспользоваться конструкцией, которая была применена в § 3 гл. II при доказательстве гладкости поверхности с ограниченной удельной кривизной. Строгая выпуклость поверхности Φ устанавливается с помощью конструкции, приведенной в доказательстве строгой выпуклости поверхности с положительной удельной кривизной (см. там же). Мы опускаем эти доказательства.

Так как поверхность Φ гладкая и строго выпуклая, то для каждого единичного вектора n найдется и притом только одна точка поверхности Φ с внешней нормалью n. Покажем, что гауссова кривизна поверхности в этой точке равна $K(n)$. При этом под гауссовой кривизной поверхности в точке $A(n)$ мы понимаем предел отношения кривизны области на поверхности к площади области, когда область произвольным образом стягивается к точке $A(n)$.

Возьмем произвольную область G на единичной сфере Ω. Пусть область G' содержится в G вместе с границей и ее площадь ω' отличается от площади области G не более чем на $\varepsilon > 0$. Обозначим σ и σ' общую площадь тех граней многогранника P_s, сферические изображения которых принадлежат областям G и G' соответственно. Обозначим σ_0 и σ_0' площади областей на поверхности Φ, соответствующих областям G и G' при сферическом отображении. При достаточно большом s в силу гладкости и строгой выпуклости поверхности Φ

$$\sigma_0 > \sigma', \qquad \sigma > \sigma_0'.$$

Отсюда, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, заключаем, что область G_Φ на поверхности Φ, соответствующая области G при сферическом отображении, имеет площадь

$$S = \int\limits_G \frac{d\omega}{K(n)}.$$

Следовательно, удельная кривизна области G_Φ на поверхности Ф равна

$$\omega \Big/ \int\limits_G \frac{d\omega}{K(n)}.$$

Переходя к пределу при стягивании области G к точке $A(n)$, в силу непрерывности функции $K(n)$ заключаем, что гауссова кривизна поверхности Ф в точке с нормалью n равна $K(n)$, что и требовалось доказать.

§ 3. Регулярность выпуклой поверхности, у которой гауссова кривизна положительна и как функция нормали регулярна

Решение проблемы Минковского, данное самим Минковским, а также решение, изложенное в § 2, является неполным, если функция $K(n)$ не только непрерывна, но и достаточно дифференцируема. В этом случае естественно ставить вопрос о существовании регулярной поверхности с заданной гауссовой кривизной $K(n)$. В настоящем параграфе мы докажем, что выпуклая поверхность (не обязательно замкнутая) с регулярной функцией $K(n)$ регулярна. В соединнении с результатом § 2 это дает решение проблемы Минковского в полном объеме.

Идея доказательства теоремы о регулярности выпуклой поверхности с регулярной функцией $K(n)$ состоит в следующем. Пусть F — выпуклая поверхность с гауссовой кривизной $K(n)$ в точке с внешней нормалью n, причем $K(n)$ — регулярная функция. Пусть Ω — сферическое изображение F, X_0 — внутренняя точка Ω и ω — круг на единичной сфере с центром X_0, содержащийся в области Ω. Обозначим F_ω ту часть поверхности F, которая имеет своим сферическим изображением круг ω.

Мы покажем, что существует регулярная выпуклая поверхность F', обладающая следующими свойствами:

1. Выпуклая поверхность F' имеет сферическим изображением круг ω.

2. В каждой точке с нормалью n поверхность F' имеет ту же гауссову кривизну, что и F_ω, т. е. $K(n)$.

3. Значения опорных функций $H(n)$ и $H'(n)$ поверхностей F_ω и F' совпадают на границе круга ω.

Далее мы покажем, что поверхности F и F' совпадают. Так как поверхность F' регулярна, то поверхность F обладает такой же степенью регулярности в окрестности произвольной точки X_0, а следовательно, везде, что и требуется доказать.

Построение выпуклой поверхности F' аналитически сводится к решению задачи Дирихле для уравнения

$$rt - s^2 = \varphi(x, y) > 0. \tag{1}$$

В связи с этим мы начнем наше изложение с решения этой задачи.

Лемма 1. *Пусть $\varphi(x, y)$ — аналитическая функция в круге $x^2+y^2 \leqslant R^2$ и ψ — любая аналитическая функция на его окружности. Тогда в указанном круге существуют два решения уравнения* (1), *которые на его окружности обращаются в заданную функцию ψ. Если $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ — эти решения, то поверхности, заданные уравнениями $z=z_1(x, y)$ и $z=z_2(x, y)$, — выпуклые и обращены выпуклостью в разные стороны: одна — в сторону $z>0$, другая — в сторону $z<0$.*

Доказательство этой леммы опирается на теорему С. Н. Бернштейна о разрешимости задачи Дирихле для уравнения в частных производных эллиптического типа, согласно которой, для того чтобы уравнение эллиптического типа $f(r, s, t, p, q, z, x, y)=0$, $f'_z \geqslant 0$, допускало решение задачи Дирихле в области G, ограниченной аналитическим контуром $\bar{C}$, достаточно уметь à priori при помощи данных на контуре установить верхний предел модулей предполагаемого решения и его производных первых двух порядков в $G+\bar{C}$. Для получения оценок модулей решения уравнения (1) и его производных мы воспользуемся соображениями, которые были применены С. Н. Бернштейном к указанному частному случаю уравнения $\varphi(x, y)=\text{const}$ в работе [21].

Пусть $z(x, y)$ — решение уравнения (1). Поверхность $z=z(x, y)$, очевидно, выпуклая, так как гауссова кривизна ее положительна. Будем предполагать, что эта поверхность обращена выпуклостью в сторону $z<0$. Это значит, что производные r и t положительны. Так как поверхность $z=z(x, y)$ выпуклая и обращена выпуклостью в сторону $z<0$, то максимум функции $z(x, y)$ достигается на окружности $x^2+y^2=R^2$ и, следовательно, не превосходит максимума модуля функции ψ.

Нетрудно оценить и минимум функции $z(x, y)$. Для этого рассмотрим разность $z-\frac{k}{2}(x^2+y^2)=\bar{z}$, где k — положительная постоянная, для которой выполнено условие $k^2>\varphi(x, y)$ в замкнутом круге. Легко проверить, что функция $\bar{z}(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$A\bar{z}_{xx}-2B\bar{z}_{xy}+C\bar{z}_{yy}=\varphi-k^2,$$

где

$$A=\frac{z_{yy}+k}{2}, \quad B=\frac{z_{xy}}{2}, \quad C=\frac{z_{xx}+k}{2}.$$

Отсюда следует, что квадратичная форма $d^2\bar{z}$ не может быть положительно определенной ни в одной точке круга, а следовательно, минимум функции $\bar{z}$ достигается на границе круга. Это

дает возможность оценить минимум функции $z(x, y)$ в зависимости от величины k и минимума ψ.

Оценим теперь максимум модулей производных p и q функции z. Во-первых, заметим, что так как поверхность $z=z(x, y)$ — выпуклая, то максимум и минимум производных p и q достигаются на границе круга. Поэтому максимум модулей p и q достаточно оценить на границе круга.

С. Н. Бернштейн показал, что через касательную в произвольной точке M контура γ, ограничивающего поверхность $z=z(x, y)$, можно провести плоскость σ

$$z=ax+by+c$$

так, что не будет точек кривой γ, расположенных ниже плоскости σ, причем коэффициенты a, b, c уравнения плоскости ограничены по модулю числом, зависящим только от максимума модуля функции ψ и ее производных до третьего порядка.

Для оценки максимума модулей p и q на окружности $x^2+y^2=R^2$, очевидно, достаточно уметь оценить производную функции z по внутренней нормали к окружности. Не ограничивая общности, покажем, как такую оценку получить в точке $M(-R, 0)$. В этой точке производная z по нормали равна p. Так как поверхность $z=z(x, y)$ обращена выпуклостью в сторону $z<0$, то максимум p оценивается очевидным образом через максимум модуля функции ψ. Поэтому достаточно оценить минимум p. Для этого рассмотрим функцию

$$\tilde{z}=z-\frac{k}{2}(x^2+y^2-R^2)-ax-by-c.$$

Она обладает следующими свойствами. На окружности $x^2+y^2=R^2$ функция $\tilde{z}\geqslant 0$, причем в точке M имеем $\tilde{z}=0$. Ни в одной точке круга $x^2+y^2\leqslant R^2$ форма $d^2\tilde{z}$ не является положительно определенной. Отсюда следует, что минимум $\tilde{z}$ достигается на окружности и, следовательно, в круге $\tilde{z}\geqslant 0$. А тогда в точке M $\partial\tilde{z}/\partial x\geqslant 0$. Принимая во внимание, что a, b и c по модулю ограничены числом, зависящим только от максимума модуля функции ψ и ее производных, приходим к оценке минимума p.

В заключение заметим, что для модулей первых производных функции $z(x, y)$ во внутренней точке X круга $x^2+y^2\leqslant R^2$ могут быть получены оценки в зависимости только от максимума модуля функции ψ и расстояния точки до границы круга. Более точно, если m_0 — максимум модуля функции ψ, а d — расстояние точки X до границы круга, то модули производных p и q не превосходят $\dfrac{m_0+\dfrac{kR^2}{2}}{d}$.

Переходим к получению оценок для модулей вторых производных. Такие оценки получим сначала на окружности $x^2+y^2=R^2$.

В полярных координатах ρ, ϑ уравнение (1) запишется так:

$$z_{\rho\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}z_{\vartheta\vartheta}+\frac{1}{\rho}z_\rho\right)-\left(\frac{1}{\rho}z_{\rho\vartheta}-\frac{1}{\rho^2}z_\vartheta\right)^2=\varphi.$$

Дифференцируя это уравнение по ϑ и обозначая z_ϑ через z_1, получим

$$z_{1\rho\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}z_{\vartheta\vartheta}+\frac{1}{\rho}z_\rho\right)-2\left(\frac{1}{\rho}z_{1\rho\vartheta}-\frac{1}{\rho^2}z_{1\vartheta}\right)\left(\frac{1}{\rho}z_{\rho\vartheta}+\frac{1}{\rho^2}z_\vartheta\right)+\\+\left(\frac{1}{\rho^2}z_{1\vartheta\vartheta}+\frac{1}{\rho}z_{1\rho}\right)z_{\rho\rho}=\varphi_\vartheta.$$

Отсюда следует, что функция $z_2=z_1-\mu z$, где μ — любая постоянная, удовлетворяет уравнению

$$(z_2)_{\rho\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}z_{\vartheta\vartheta}+\frac{1}{\rho}z_\rho\right)-2\left(\frac{1}{\rho}(z_2)_{\rho\vartheta}-\frac{1}{\rho^2}(z_2)_\vartheta\right)\left(\frac{1}{\rho}z_{\rho\vartheta}-\frac{1}{\rho^2}z_\vartheta\right)+\\+\left(\frac{1}{\rho^2}(z_2)_{\vartheta\vartheta}+\frac{1}{\rho}(z_2)_\rho\right)z_{\rho\rho}=\varphi_\vartheta-\mu\varphi.$$

Пусть μ настолько велико, что в круге $x^2+y^2\leqslant R^2$ имеем $\varphi_\vartheta-\mu\varphi<0$. Так как

$$(z_2)_{xx}(z_2)_{yy}-(z_2)^2_{xy}=(z_2)_{\rho\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}(z_2)_{\vartheta\vartheta}+\frac{1}{\rho}(z_2)_\rho\right)-\\-\left(\frac{1}{\rho}(z_2)_{\rho\vartheta}-\frac{1}{\rho^2}(z_2)_\vartheta\right)^2\leqslant 0,$$

то форма d^2z_2 не может быть положительно определенной, и для $|z_{2\rho}|=|z_{\rho\vartheta}-\mu z_\rho|$, а следовательно, для $|z_{\rho\vartheta}|$ может быть получена оценка в зависимости от максимума модуля функции ψ и ее производных по ϑ до третьего порядка.

Чтобы получить оценку для $|z_{\rho\rho}|$, найдем сначала нижнюю грань положительного выражения $\frac{1}{\rho^2}z_{\vartheta\vartheta}+\frac{1}{\rho}z_\rho$.

Пусть мы хотим найти нижнюю грань этого выражения в точке $M(\vartheta=0)$. С. Н. Бернштейн в работе [21] показал, что существует функция

$$z_0=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+a_1x+a_2y+a_0,$$

удовлетворяющая следующим условиям:

1. $a_{11}>0,\ a_{22}>0,\ a_{11}a_{22}-a_{12}^2=k^2$.

2. В точке M

$$z_0=\psi,\ (z_0)_\vartheta=\psi_\vartheta,\ (z_0)_{\vartheta\vartheta}=\psi_{\vartheta\vartheta},\ (z_0)_{\vartheta\vartheta\vartheta}=\psi_{\vartheta\vartheta\vartheta}.$$

3. В точках окружности, отличных от M,

$$z_0 > \psi.$$

4. В точке M

$$\frac{1}{\rho^2}(z_0)_{\vartheta\vartheta} + \frac{1}{\rho}(z_0)_\rho > 2\alpha_0 > 0,$$

где α_0 зависит только от максимума модулей производных функции ψ до четвертого порядка.

Пусть k удовлетворяет в круге $x^2+y^2 \leqslant R^2$ условию $k^2 < \varphi(x, y)$. Тогда функция $z_0 - z$ не принимает в круге отрицательных значений, и, следовательно, в M имеем $(z_0 - z)_\rho \leqslant 0$, т. е. $(z_0)_\rho \leqslant z_\rho$. Осюда вытекает, что в точке M величина $\frac{1}{\rho^2} z_{\vartheta\vartheta} + \frac{1}{\rho} z_\rho$ не меньше чем

$$\frac{1}{\rho^2}(z_0)_{\vartheta\vartheta} + \frac{1}{\rho}(z_0)_\rho > 2\alpha_0 > 0.$$

Итак, получены оценки для вторых производных функции $z(x, y)$ на границе круга $x^2+y^2 \leqslant R^2$. Для оценки вторых производных внутри круга рассмотрим выражение

$$w = \lambda r,$$

где $\lambda > 0$ — некоторая функция переменных x, y. Пусть максимум w достигается в некоторой точке P внутри круга. В точке P имеем

$$w_x = 0, \qquad w_y = 0,$$

откуда

$$r_x = w\left(\frac{1}{\lambda}\right)_x, \qquad r_y = w\left(\frac{1}{\lambda}\right)_y,$$

$$r_{xx} = \frac{w_{xx}}{\lambda} + w\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{xx}, \quad r_{xy} = \frac{w_{xy}}{\lambda} + w\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{xy}, \quad r_{yy} = \frac{w_{yy}}{\lambda} + w\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{yy}.$$

Дифференцируя уравнение (1) по x, последовательно получаем

$$r_x t + t_x r - 2ss_x = \varphi_x, \tag{2}$$

$$(r_{xx}t - 2r_{xy}s + r_{yy}r) + 2(r_x t_x - r_y^2) = \varphi_{xx}. \tag{3}$$

Выражение $r_x t_x - r_y^2$ при помощи уравнения (2) и выражений для производных r_x и r_y в точке P можно представить следующим образом:

$$r_x t_x - r_y^2 = -\left(\frac{\lambda_x}{\lambda}\right)\varphi_x + 2rs\left(\frac{\lambda_x}{\lambda}\right)\left(\frac{\lambda_y}{\lambda}\right) - rt\left(\frac{\lambda_x}{\lambda}\right)^2 - r^2\left(\frac{\lambda_y}{\lambda}\right)^2.$$

Подставляя теперь в уравнение (3) значения вторых производных r в точке P и выражение для $r_x t_x - r_y^2$, получим

$$\frac{1}{2}(tw_{xx} - 2sw_{xy} + rw_{yy}) + \lambda r\left\{t\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{xx} - 2s\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{xy} + r\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{yy}\right\} + \\ + 2\left\{-\varphi_x\left(\frac{\lambda_x}{\lambda}\right) + 2rs\left(\frac{\lambda_x}{\lambda}\right)\left(\frac{\lambda_y}{\lambda}\right) - rt\left(\frac{\lambda_x}{\lambda}\right)^2 - r^2\left(\frac{\lambda_y}{\lambda}\right)^2\right\} = \varphi_{xx}.$$

Замечая, что

$$\left(\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{xx} - 2\left(\frac{\lambda_x}{\lambda}\right)^2\right)rt = -\left(\frac{\lambda_{xx}}{\lambda}\right)rt,$$

$$-2\left(\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{yy} - 2\left(\frac{\lambda_x}{\lambda}\right)\left(\frac{\lambda_y}{\lambda}\right)\right)rs = 2\left(\frac{\lambda_{xy}}{\lambda}\right)rs,$$

$$\left(\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{yy} - 2\left(\frac{\lambda_y}{\lambda}\right)^2\right)r^2 = -\left(\frac{\lambda_{yy}}{\lambda}\right)r^2,$$

преобразуем последнее равенство так:

$$\frac{1}{\lambda}(tw_{xx} - 2sw_{xy} + rw_{yy}) - \frac{\lambda_{xx}}{\lambda}rt + 2\frac{\lambda_{xy}}{\lambda}rs - \\ - \frac{\lambda_{yy}}{\lambda}r^2 - 2\varphi_x\left(\frac{\lambda_x}{\lambda}\right) = \varphi_{xx}.$$

Заменяя в этом равенстве rt на $s^2 + \varphi$ и замечая, что

$$\varphi_{xx} + 2\varphi_x\left(\frac{\lambda_x}{\lambda}\right) + \varphi\frac{\lambda_{xx}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}(\varphi\lambda)_{xx},$$

получим

$$(tw_{xx} - 2sw_{xy} + rw_{yy}) - \lambda_{xx}s^2 + 2\lambda_{xy}rs - \lambda_{yy}r^2 = (\varphi\lambda)_{xx}.$$

Так как выражение $tw_{xx} - 2sw_{xy} + rw_{yy}$ в точке P, где w достигает максимума, неположительно, то в этой точке имеет место неравенство

$$\lambda_{xx}s^2 - 2\lambda_{xy}rs + \lambda_{yy}r^2 \leqslant -(\varphi\lambda)_{xx}. \tag{4}$$

Полагая $\lambda = 1 + \frac{y^2}{2}$, приходим к заключению, что в точке P $r^2 \leqslant \left\{\varphi\left(1 + \frac{y^2}{2}\right)\right\}_{xx}\Big|_{(P)}$, а это дает возможность оценить производную r во всем круге $x^2 + y^2 \leqslant R^2$ после того, как для нее известна оценка на границе круга. Оценка для производной t получается так же, как и для r. После этого оценка для s получается из уравнения (1).

Таким образом, доказана возможность получения оценок для функции $z(x, y)$ и ее производных первых двух порядков, а следовательно, доказано существование решения уравнения (1) в круге $x^2 + y^2 \leqslant R^2$ при заданных произвольных аналитических значениях на его окружности. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть* $\varphi(x, y)$ *есть* k *раз дифференцируемая функция* ($k \geqslant 3$) *в круге* $x^2+y^2 \leqslant R^2$ *и* ψ — *непрерывная функция на окружности этого круга. Тогда существует* $(k+1)$ *раз дифференцируемое решение* $z(x, y)$ *уравнения* (1) *в указанном круге, принимающее на его окружности значения* ψ.

Доказательство. Получим оценки максимума модуля решения уравнения (1) и его производных первых двух порядков во внутренней точке произвольной области G, ограниченной выпуклым контуром $\bar{\gamma}$, без использования производных функций ψ.

При помощи тех же соображений, которые мы применили в случае, когда область G — круг, легко получить для $|z|$ следующую оценку:

$$|z| \leqslant \|\psi\| + \frac{D^2}{8}\|\varphi\|,$$

где $\|\varphi\|$ и $\|\psi\|$ — максимумы модулей функций φ и ψ в области G и на ее границе $\bar{\gamma}$ соответственно, а D — диаметр области G.

Используя выпуклость поверхности $z=z(x, y)$, без труда получаем оценку модулей производных p и q. Именно, если через m_0 обозначить максимум модуля функции $z(x, y)$ в области G, то в точке M, которая удалена от границы области G на расстояние, не меньшее δ,

$$|p| \leqslant \frac{2m_0}{\delta}, \quad |q| \leqslant \frac{2m_0}{\delta}.$$

Получим теперь оценку модулей вторых производных в произвольной точке $\bar{M}(\bar{x}, \bar{y})$ области G. Пусть M — точка поверхности $z=z(x, y)$, которая проектируется в точку $\bar{M}$ области G. Проведем плоскость $z=z_0(x, y)$ так, чтобы она разделяла точку M и границу γ поверхности $z=z(x, y)$, и притом чтобы в каждой точке (x, y) области, удаленной от $\bar{\gamma}$ на расстояние, не большее $\delta/2$, было $z_0(x, y) - z(x, y) \leqslant 0$. Обозначим через $\Delta(\bar{M}) \equiv \sup(z_0(\bar{x}, \bar{y}) - z(\bar{x}, \bar{y}))$ по всем плоскостям, обладающим указанным свойством. Покажем, что для $\Delta(\bar{M})$ можно указать оценку снизу, зависящую только от δ, m_0 — максимума модуля функции $z(x, y)$ и n_0 — минимума функции $\varphi(x, y)$.

Действительно, допустим, что утверждение неверно. Тогда существует число $\delta_0 > 0$, последовательности функций $z_k(x, y)$, $\varphi_k(x, y)$ и точек $\bar{M}_k$, удовлетворяющие условиям:

1. В области G имеем $|z_k| \leqslant m_0$, $|\varphi_k| \geqslant n_0$,

$$r_k t_k - s_k^2 = \varphi_k.$$

2. Точка $\bar{M}_k$ удалена от $\bar{\gamma}$ на расстояние, не меньшее δ_0 и $\Delta_k(\bar{M}_k) < \frac{1}{k}$.

Не ограничивая общности, можно считать, что последовательность функций $z_k(x, y)$ сходится к некоторой функции $z^*(x, y)$, а последовательность точек $\overline{M}_k$ сходится к точке $\overline{M}^*$. Пусть $G_{\left(\frac{\delta_0}{2}\right)}$ — множество точек из G, удаленных от $\overline{\gamma}$ на расстояние, не меньшее $\delta_0/2$. Поверхности, определяемые уравнениями $z=z_k(x, y)$, в $G_{\left(\frac{\delta_0}{2}\right)}$ — выпуклые и имеют ограниченную снизу удельную кривизну. Поэтому предельная поверхность $z=z^*(x, y)$ также обладает этим свойством. С другой стороны, ясно, что касательная плоскость этой поверхности в точке M^*, проектирующейся в $\overline{M}^*$, содержит точку P поверхности, проекция которой $\overline{P}$ на плоскость xy удалена от $\overline{\gamma}$ на расстояние, не большее $\delta/2$. Отсюда следует, что предельная поверхность содержит прямолинейный отрезок, а это невозможно (теорема § 3 гл. II). Утверждение доказано.

Пусть $z=z_0(x, y)=ax+by+c$ — уравнение плоскости, удовлетворяющей условию $z_0-z\leqslant 0$ в $G_{\left(\frac{\delta}{2}\right)}$ и $z_0-z=\Delta(\overline{M})$ в точке $\overline{M}$. Рассмотрим функцию

$$w=\lambda r=(z_0-z)\,re^{p}.$$

В $G_{\left(\frac{\delta}{2}\right)}$ она достигает максимума. В точке, где достигается максимум, имеет место неравенство (4), которое после подстановки $\lambda=(z_0-z)\,e^{p}$ и упрощений имеет вид

$$e^{p}(z_0-z)\,\varphi r^2+(-2(p-a)\,e^{p}\varphi+3(z_0-z)\,e^{p}\varphi_x-2e^{p}\varphi)\,r-\\-2\varphi_x e^{p}(p-a)+e^{p}\varphi_{xx}(z_0-z)\leqslant 0.$$

Отсюда следует, что w не может превзойти некоторого числа w_0, зависящего только от максимума модуля функции $z(x, y)$, максимума модуля функции $\varphi(x, y)$ и ее производных и расстояния δ точки $\overline{M}$ от границы области G. Итак, в точке $\overline{M}$ $w=\Delta e^{p}r\leqslant w_0$, откуда получаем оценку для r. Оценка для t получается аналогично, после чего оценка для s получается из уравнения (1).

Теперь, когда известна оценка верхней грани модулей функции $z(x, y)$ и ее производных до второго порядка внутри области G, могут быть получены оценки верхней грани модулей производных функции $z(x, y)$ третьего и четвертого порядка в зависимости от верхней грани модулей производных z до второго порядка, расстояния точки $\overline{M}$ от границы области G и верхней грани модулей функций φ, $1/\varphi$ и производных функции φ до третьего порядка (§ 11 гл. II).

Построим последовательность аналитических функций φ_m, сходящихся равномерно вместе с их производными до третьего

порядка в круге $x^2+y^2 \leqslant R^2$, и последовательность аналитических функций ψ_m, равномерно сходящихся к функции ψ на окружности $x^2+y^2=R^2$. Было показано, что существует аналитическая функция z_m, удовлетворяющая уравнению

$$rt - s^2 = \varphi_m$$

в круге и принимающая значения ψ_m на его окружности, причем поверхность F_m, заданная уравнением $z=z_m(x, y)$, обращена выпуклостью в сторону $z<0$.

Так как функции $z_m(x, y)$ равномерно ограничены, из последовательности поверхностей F_m можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Не ограничивая общности, можно считать, что сама последовательность поверхностей F_m сходится. Пусть F — предельная поверхность и $z=z(x, y)$ — ее уравнение.

В круге $x^2+y^2 \leqslant R_1^2 < R^2$ для модулей первых производных функций z_m, очевидно, можно указать оценку, не зависящую от m. Отсюда следует, что гауссова кривизна поверхности F_m в точке, проектирующейся в круг $x^2+y^2 \leqslant R_1^2$, равная

$$\frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2},$$

заключена в положительных пределах, не зависящих от m. Следовательно, удельная кривизна любой области $G \subset F$, проектирующейся внутрь круга $x^2+y^2 \leqslant R_1^2$, заключена в тех же пределах. Тогда по теореме А. Д. Александрова поверхность F является гладкой и существенно выпуклой, т. е. не содержит прямолинейных отрезков.

Так как предельная поверхность F существенно выпуклая, то для величин $\Delta^m(\overline{M})$, которые входят в оценки для вторых производных функций $z_m(x, y)$, может быть указана положительная нижняя грань, не зависящая от m и положения точки $\overline{M}$ в круге $x_2+y^2 \leqslant R_1^2$. А это значит, что для производных функций $z_m(x, y)$ до четвертого порядка в круге $x^2+y^2 \leqslant R_1^2$ могут быть даны оценки, не зависящие от m. Отсюда следует, что предельная функция $z(x, y)$ дифференцируема по крайней мере три раза.

Так как функция $\varphi(x, y)$ по условию k раз дифференцируема, то функция $z(x, y)$ — решение уравнения $rt - s^2 = \varphi$ — дифференцируема по крайней мере $(k+1)$ раз. Лемма 2 доказана.

Теорема 1. *Если гауссова кривизна выпуклой поверхности всюду положительна и как функция внешней нормали к поверхности регулярна (m раз дифференцируема, $m \geqslant 3$), то сама поверхность регулярна (по крайней мере $(m+1)$ раз дифференцируема). Если гауссова кривизна как функция нормали поверхности аналитическая, то поверхность аналитическая.*

Доказательство. Пусть F — рассматриваемая выпуклая поверхность с регулярной гауссовой кривизной $K(n)$. По теореме А. Д. Александрова (§ 3 гл. II) поверхность F гладкая и строго выпуклая.

Введем в пространстве прямоугольные декартовы координаты x, y, z, взяв за начало какую-нибудь точку O внутри выпуклого тела, на границе которого расположена поверхность F. Пусть $H(x, y, z)$ — опорная функция поверхности F.

Как показал А. Д. Александров [7], функция H на единичной сфере почти всюду имеет второй дифференциал, причем если в точке n единичной сферы существует второй дифференциал функции H, то в точке поверхности F с нормалью n гауссова кривизна, определяемая как предел отношения площади сферического изображения к площади области, вычисляется по формуле

$$K(n) = \frac{1}{\begin{vmatrix} H_{xx} & H_{xy} \\ H_{xy} & H_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} H_{yy} & H_{yz} \\ H_{yz} & H_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} H_{zz} & H_{xz} \\ H_{xz} & H_{zz} \end{vmatrix}},$$

где производные $H_{xx}, \ldots, H_{zz}$ взяты в точке n на единичной сфере.

Пусть Ω — сферическое изображение поверхности F и n_0 — произвольная точка на Ω. Возьмем в качестве оси z прямую, имеющую направление вектора n_0, и рассмотрим конечную часть F_1 поверхности F, сферическое изображение которой Ω_1 содержится внутри сферического сегмента, меньшего полусферы, с полюсом n_0. Введем в рассмотрение функцию $h(x, y)$, определяемую условием

$$h(x, y) = H(x, y, 1),$$

где $H(x, y, 1)$ — опорная функция поверхности F_1. Функция $h(x, y)$ определена в области G_1, которая получается центральным проектированием сферического изображения поверхности F_1 на плоскость $z=1$ и затем ортогональным проектированием на плоскость xy. Из выпуклости функции H следует выпуклость функции h. Если функция H в точке $(x, y, 1)$ имеет второй дифференциал, то гауссова кривизна поверхности F_1 в точке с внешней нормалью направления $(x, y, 1)$ равна

$$K = \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)\left(h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2\right)}.$$

Рассмотрим поверхность $\bar{F}_1$, заданную в прямоугольных координатах x, y, z уравнением

$$z = h(x, y).$$

Поверхность $\bar{F}_1$ выпуклая. Покажем, что из ограниченности удельной кривизны поверхности F_1 следует ограниченность удельной кривизны поверхности $\bar{F}_1$. Для этого установим точечное соответствие между поверхностями F_1 и $\bar{F}_1$, сопоставляя точке (x, y, z) поверхности $\bar{F}_1$ точку поверхности F_1, в которой внешняя нормаль имеет направление вектора $(x, y, 1)$.

Допустим, что поверхность F_1 дважды дифференцируемая. Пусть G — произвольная область на этой поверхности и $\bar{G}$ — соответствующая область на поверхности $\bar{F}_1$. Удельные кривизны областей G и $\bar{G}$ на поверхностях F_1 и $\bar{F}_1$ соответственно равны

$$K_G = \frac{\sigma}{\iint (1 + x^2 + y^2)\left(h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2\right) d\sigma}, \qquad K_{\bar{G}} = \frac{\iint \frac{h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}\, dS}{S},$$

где σ — площадь сферического изображения области G, а S — площадь поверхности $\bar{G}$. По характеру установленного точечного соответствия между поверхностями F_1 и $\bar{F}_1$ отношение σ/S заключено в положительных пределах, не зависящих от выбора области G. Удельная кривизна K_G тоже заключена в положительных пределах, не зависящих от G; производные p и q равномерно ограничены в области G_1, содержащей $\bar{G}$, так как поверхность F_1 конечна (а p и q всегда являются абсциссой и ординатой некоторой точки поверхности F_1). Все это дает нам основание заключить, что величина $K_{\bar{G}}$ заключена в положительных пределах, не зависящих от выбора $\bar{G}$. Для того чтобы прийти к тем же выводам без предположения регулярности поверхности F_1, надо построить последовательность аналитических выпуклых поверхностей, сходящуюся к $\bar{F}_1$, и, зафиксировав сферическое изображение областей G на них, сделать предельный переход.

Пусть n_0 — произвольная точка области Ω (Ω — сферическое изображение поверхности F) и ω — малый сегмент единичной сферы с полюсом n_0, содержащийся целиком в области Ω. Введем прямоугольные координаты в пространстве, приняв точку O на внешней нормали n_0 за начало координат и направив ось z противоположно n_0. Пусть H — опорная функция поверхности F и $h(x, y) = H(x, y, 1)$. Спроектируем сегмент ω на плоскость xy. При этом получим некоторый круг $x^2 + y^2 \leqslant R^2$ в плоскости xy. Функция $h(x, y)$ почти во всех точках указанного круга имеет второй дифференциал и удовлетворяет уравнению

$$rt - s^2 = \frac{1}{K(1 + x^2 + y^2)},$$

где K — гауссова кривизна поверхности F в точке с нормалью направления $(x, y, 1)$.

Построим регулярную функцию $\bar{h}(x, y)$, удовлетворяющую в круге этому уравнению и принимающую на его окружности значения $h(x, y)$. Как было показано выше, поверхности, определяемые уравнениями $z=h(x, y)$ и $z=\bar{h}(x, y)$, имеют ограниченную удельную кривизну.

Рассмотрим функцию $\tilde{h}(x, y)=h(x, y)-\bar{h}(x, y)$. Эта функция на окружности круга $x^2+y^2\leqslant R^2$ обращается в нуль. Покажем, что она равна нулю во всем круге. Допустим, утверждение неверно, причем в некоторой точке круга, например, $\tilde{h}<0$. Так как функция $h(x, y)$ выпуклая, то она имеет почти всюду второй дифференциал. Множество тех точек круга, где второй дифференциал не существует, обозначим через M. Это множество имеет меру нуль. Обозначим через $\tilde{F}$ поверхность, задаваемую уравнением

$$z=\tilde{h}(x, y).$$

Краем этой поверхности является окружность $x^2+y^2=R^2$ в плоскости xy.

Как показано в § 5 гл. II, существует выпуклая поверхность Φ: $\bar{z}=\varphi(x, y)$ с краем в плоскости xy, содержащим внутри окружность $x^2+y^2=R^2$, обращенная выпуклостью в сторону $z<0$ и обладающая следующими свойствами:

1. Поверхность Φ в каждой гладкой точке имеет положительную нижнюю кривизну.

2. Если гладкая точка X поверхности Φ проектируется в точку заданного множества M нулевой меры, то верхняя кривизна поверхности в этой точке бесконечна.

Рассмотрим поверхность Φ_λ, заданную уравнением

$$z=\lambda\varphi(x, y).$$

Эта поверхность также обладает свойствами 1, 2. При некотором значении параметра λ поверхности $\tilde{F}$ и Φ_λ имеют общую гладкую точку X, причем поверхность $\tilde{F}$ располагается над поверхностью Φ_λ. Обозначим Φ'_λ поверхность, задаваемую уравнением

$$z=\bar{h}(x, y)+\lambda\varphi(x, y).$$

Поверхность Φ'_λ и поверхность $\bar{F}_1$, задаваемая уравнением $z=h(x, y)$, также имеют общую точку X', которая лежит на одной вертикали с X, причем поверхность $\bar{F}_1$ располагается над поверхностью Φ'_λ. Поверхность Φ'_λ, так же как и поверхность Φ_λ, обладает свойствами 1, 2. Ввиду условий 1, 2 и указанного расположения поверхностей $\bar{F}_1$ и Φ'_λ, точка X' не может проектироваться в точку множества M на плоскость xy, так как тогда в точке X' нижняя кривизна поверхности $\bar{F}_1$ будет положительна, а верхняя равна бесконечности (§ 5 гл. II). Итак,

точка X' является точкой двукратной дифференцируемости поверхности $\bar{F}_1$.

Пусть $\bar{X}$ — точка плоскости xy, в которую проектируются точки X и X'. В этой точке

$$h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2 = \bar{h}_{xx}\bar{h}_{yy} - \bar{h}_{xy}^2 > 0.$$

Отсюда следует, что квадратичная форма

$$(h_{xx} - \bar{h}_{xx})\,\xi^2 + 2\,(h_{xy} - \bar{h}_{xy})\,\xi\eta + (h_{yy} - \bar{h}_{yy})\,d\eta^2$$

либо знакопеременная либо равна нулю тождественно. С другой стороны, ввиду условия 1 второй дифференциал

$$d^2(h - \bar{h}) = (h_{xx} - \bar{h}_{xx})\,dx^2 + 2\,(h_{xy} - \bar{h}_{xy})\,dx\,dy + (h_{yy} - \bar{h}_{yy})\,dy^2$$

должен быть строго положительной формой. Мы пришли к противоречию. Итак $h \equiv \bar{h}$. Следовательно, функция $h(x, y)$, а вместе с ней и $H(x, y, z)$ — регулярные функции. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть на единичной сфере Ω с центром в начале координат O задана регулярная (k раз дифференцируемая, $k \geqslant 3$) положительная функция $K(n)$ точки n на сфере. Пусть эта функция удовлетворяет условию*

$$\int_{\Omega} \frac{n\,d\omega}{K(n)} = 0,$$

где $d\omega$ — элемент площади сферы Ω, а интегрирование распространяется на всю сферу.

Тогда существует регулярная (по крайней мере $(k+1)$ раз дифференцируемая) поверхность F, которая в точке с внешней нормалью n имеет гауссову кривизну $K(n)$. Поверхность F определена однозначно с точностью до параллельного переноса.

Эта теорема является следствием теоремы § 2 и теоремы 1 настоящего параграфа.

§ 4. *Теоремы единственности для выпуклых поверхностей с заданной функцией главных радиусов кривизны*

Пусть функция $f(R_1, R_2, n)$ определена для единичного вектора n и положительных значений R_1, R_2 $(R_1 \leqslant R_2)$, и пусть она строго монотонна по переменным R_1, R_2, т. е. $f(R_1', R_2) > f(R_1, R_2)$ при $R_1' > R_1$ и $f(R_1, R_2') > f(R_1, R_2)$ при $R_2' > R_2$.

В настоящем параграфе будут доказаны теоремы единственности для выпуклых поверхностей, у которых значения функции f от главных радиусов кривизны поверхностей и единичного вектора нормали n совпадают

Пусть F' и F'' — две строго выпуклые поверхности, имеющие общую точку P и общую внешнюю нормаль n_0 в этой точке. Пусть H' и H'' — значения опорных функций поверхностей на единичной сфере. Мы скажем, что поверхности F' и F'' сильно касаются в точке P внутренним образом, если для всех n, достаточно близких к n_0, выполняется условие

$$|H'(n) - H''(n)| > c\,|n - n_0|^2, \quad c > 0, \quad n \neq n_0.$$

Мы будем говорить, что выпуклые поверхности допускают сильное внутреннее касание, если одну из них параллельным переносом можно так расположить относительно другой, что в некоторой общей точке они будут сильно касаться внутренним образом.

Теорема 1. *Пусть F' и F'' — строго выпуклые поверхности, имеющие общее сферическое изображение ω, которое вместе с границей расположено на единичной полусфере $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, $x_3 > 0$.*

Тогда, если на границе сферического изображения ω опорные функции поверхностей совпадают, то поверхности либо совпадают, либо они допускают сильное внутреннее касание.

Доказательство. Пусть $H'(n)$ и $H''(n)$ — опорные функции поверхностей F' и F''. Если $H'(n) = H''(n)$ для всех n из ω, то поверхности F' и F'', очевидно, совпадают. Если поверхности F' и F'' не совпадают, то найдется вектор n_0 такой, что $H'(n_0) \neq H''(n_0)$; пусть для определенности $H'(n_0) > H''(n_0)$.

Обозначим $\bar{\omega}$ максимальную область на единичной сфере, содержащую n_0, в которой $H'(n) > H''(n_0)$. Введем в рассмотрение вектор-функцию

$$\varphi(n) = \frac{n}{H'(n) - H''(n)}$$

в области $\bar{\omega}$. Бесконечная поверхность Φ, задаваемая уравнением $r = \varphi(n)$, расположена внутри некоторого конуса $x_3^2 = k(x_1^2 + x_2^2)$, $k > 0$, в полупространстве $x_3 > 0$. Рассечем поверхность Φ плоскостью α: $z = c = \text{const}$. Пусть $\bar{\Phi}$ — часть поверхности, расположенная ниже плоскости α.

При достаточно малом ε параболоид, задаваемый уравнением $x_3 = \varepsilon^2(x_1^2 + x_2^2)$, содержит внутри поверхность $\bar{\Phi}$. Если параболоид аффинно прижимать к плоскости α, то в некоторый момент он упрется в поверхность $\bar{\Phi}$ в некоторой точке X_0. Проведем касательную плоскость σ к параболоиду в точке X_0. Она является касательной плоскостью к поверхности $\bar{\Phi}$ и поэтому не может проходить через начало координат.

Пусть $r = \psi(n) = n/(an)$ — уравнение плоскости σ (a — постоянный вектор). Если обозначить n_0 единичный вектор, на-

правленный в точку X_0, то для всех n, достаточно близких к n_0, очевидно, выполняется неравенство

$$|\varphi(n)-\psi(n)|\geqslant c_1|n-n_0|^2,$$

где c_1 — постоянная, бо́льшая нуля, а равенство достигается только при $n=n_0$. Подставляя в это неравенство значения φ и ψ и замечая, что $H'(n_0)\neq H''(n_0)$ и $(an_0)\neq 0$, получим

$$|(an)+H''(n_0)-H'(n_0)|\geqslant c_2|n-n_0|^2,$$

Слагаемое an можно включить в любую функцию H' или H'', для чего достаточно сместить на вектор a $(-a)$ соответствующую поверхность. В новом расположении поверхностей

$$|H''(n)-H'(n)|\geqslant c_2|n-n_0|^2,$$

т. е. поверхности F' и F'' допускают сильное внутреннее касание. Теорема 1 доказана.

Как следствие теоремы 1 получается следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $f(R_1, R_2, n)$ — произвольная функция положительных переменных R_1, R_2, $R_1\leqslant R_2$, и единичного вектора n, монотонная по переменным R_1, R_2. Тогда, если у дважды дифференцируемых выпуклых поверхностей F' и F'', удовлетворяющих условиям теоремы* 1, *значения функции f для главных радиусов кривизны и единичного вектора внешней нормали равны, то поверхности совпадают.*

Действительно, если поверхности не совпадают, то по теореме 1 они допускают сильное внутреннее касание в некоторой точке с нормалью n. В этой точке второй дифференциал функции $H=H'(x_1, x_2, x_3)-H''(x_1, x_2, x_3)$ является неотрицательной формой, не равной тождественно нулю. Покажем, что это невозможно. Пусть R_1', R_2' — главные радиусы кривизны поверхности F' в точке с нормалью n, а R_1'', R_2'' — главные радиусы кривизны поверхности F'' в точке с той же внешней нормалью. По свойству монотонности функции f для R_1', R_2', R_1'', R_2'' выполняется одно из условий: 1. $R_1'=R_1''$, $R_2'=R_2''$. 2. $R_1'<R_1''$, $R_2'>R_2''$. 3. $R_1'>R_1''$, $R_2'<R_2''$.

Так как главные радиусы кривизны поверхности являются собственными значениями второго дифференциала опорной функции (§ 1), то в любом из трех случаев форма d^2H либо знакопеременная, либо тождественно равна нулю. Мы пришли к противоречию. Теорема 2 доказана.

Для замкнутых выпуклых поверхностей имеет место следующая теорема А. Д. Александрова.

Теорема 3. *Пусть F' и F'' — две замкнутые выпуклые поверхности и $f(R_1, R_2, n)$ — функция положительных перемен-*

ных R_1, R_2 и единичного вектора n, строго монотонная по переменным R_1, R_2. Тогда, если поверхности F' и F'' в точках с параллельными и одинаково направленными внешними нормалями n удовлетворяют условию

$$f(R_1', R_2', n) = f(R_1'', R_2'', n), \quad R_1' \leqslant R_2', \ R_1'' \leqslant R_2'',$$

где R_1', R_2' и R_1'', R_2'' — главные радиусы кривизны поверхностей, то поверхности равны и параллельно расположены, т. е. могут быть совмещены параллельным переносом.

Эта теорема была доказана А. Д. Александровым сначала для случая аналитических поверхностей F', F'' и любой функции f, удовлетворяющей только условию монотонности [13]. Затем она была доказана им же для кусочно-аналитических поверхностей F', F'' и аналитической функции f [14]. Автор ослабил требование аналитичности поверхностей и функции f до трехкратной дифференцируемости [64]. В цикле работ последнего времени А. Д. Александров еще дальше ослабил требования дифференцируемости [15]. Однако до сих пор теорема не доказана в естественном предположении двукратной дифференцируемости поверхностей и одной лишь монотонности функции f.

Мы здесь докажем теорему 3 в случае трехкратной дифференцируемости поверхностей и функции f, а требование монотонности f заменим несколько более сильным условием

$$\partial f / \partial R_1 > 0, \qquad \partial f / \partial R_2 > 0.$$

Кроме того, чтобы упростить изложение, мы предположим, что

$$f(R_1, R_2, n) \equiv \tilde{f}(R_1 + R_2, R_1 R_2, n),$$

где $\tilde{f}$ имеет ту же регулярность, что и f, т. е. трижды дифференцируема по своим аргументам.

Лемма 1. *Пусть F' и F'' — дважды дифференцируемые выпуклые поверхности, для которых в точках с одинаковыми нормалями n значения функции $f(R_1, R_2, n)$ совпадают; $H'(x, y, z)$ и $H''(x, y, z)$ — опорные функции этих поверхностей. Положим $h(x, y) = H'(x, y\ 1) - H''(x, y, 1)$.*

Тогда поверхность Φ, заданная уравнением

$$z = h(x, y),$$

может иметь только гиперболические точки и точки уплощения.

Доказательство. Допустим, точка $P(x^0, y^0, z^0)$ поверхности Φ является эллиптической или параболической точкой. Пусть $ax + by + c = 0$ — уравнение касательной плоскости поверхности Φ в точке P. Не ограничивая общности, можно считать, что в этой точке $h_{xx} > 0$. А тогда существует такая положитель-

ная постоянная k^2, что прн любом фнкснрованном $\varepsilon^2 > 0$ для точек $Q(x, y, z)$ поверхностн Φ, достаточно блнзкнх к P, будет нметь место неравенство

$$h(x, y) - (ax + by + c) \geqslant k^2 (x - x^0)^2 - \varepsilon^2 (y - y^0)^2.$$

Введем вместо x, y однородные переменные, полагая $x = x_1/x_3$, $y = x_2/x_3$. Тогда будем нметь

$$H'(x_1, x_2, x_3) - H''(x_1, x_2, x_3) - (ax_1 + bx_2 + cx_3) \geqslant \\ \geqslant k^2 (x_1 x_3^0 - x_1^0 x_3)^2 - \varepsilon^2 (x_2 x_3^0 - x_2^0 x_3)^2.$$

Отсюда следует, что в точке (x_1^0, x_2^0, x_3^0) второй дифференциал удовлетворяет неравенству

$$d^2 (H' - H'') \geqslant k^2 (x_3^0 \, dx_1 - x_1^0 \, dx_3)^2 - \varepsilon^2 (x_3^0 \, dx_1 - x_2^0 \, dx_3)^2.$$

Так как ε^2 пронзвольно мало, то в указанной точке

$$d^2 (H' - H'') \geqslant k^2 (x_3^0 \, dx_1 - x_1^0 \, dx_3)^2,$$

т. е. второй днфференцнал $d^2(H' - H'')$ не равен нулю тождественно н не является знакопеременной формой. Мы пришлн к протнворечию *) Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если в некоторой точке P поверхности Φ функция $h_1 = \partial h/\partial x$ достигает экстремума, то эта точка является точкой уплощения поверхности.*

Действительно, в точке P нмеем $h_{11} = 0$ и $h_{12} = 0$ по свойству экстремума. Точка P не может быть гнперболической, так как $h_{11} h_{22} - h_{12} = 0$. Следовательно, она является точкой уплощения.

Как показано в § 1, главные раднусы кривизны выпуклой поверхностн с опорной функцней H определяются из уравнення

$$\begin{vmatrix} H_{11} + R & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} + R & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} + R \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда для суммы и пронзведення главных радиусов крнвнзны получаются следующие выраження:

$$R_1 + R_2 = H_{11} + H_{22} + H_{33},$$

$$R_1 R_2 = \begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} H_{22} & H_{23} \\ H_{32} & H_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} H_{33} & H_{31} \\ H_{13} & H_{11} \end{vmatrix}.$$

*) Напомннм, что в конце доказательства теоремы 2 было установлено, что форма $d^2(H' - H'')$ лнбо знакопеременная лнбо тождественно равна нулю.

Полагая

$$H(x, y, z) = zh\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right), \quad h(\alpha, \beta) = H(\alpha, \beta, 1),$$

получим для суммы и произведения главных радиусов кривизны в точке с нормалью направления $(x, y, 1)$ следующие выражения:

$$R_1 + R_2 = (h_{11}(1 + x^2) + 2h_{12}xy + h_{22}(1 + y^2))(1 + x^2 + y^2)^{1/2},$$
$$R_1R_2 = (h_{11}h_{22} - h_{12}^2)(1 + x^2 + y^2).$$

Индексы у h обозначают дифференцирование по соответствующим аргументам.

Обозначим через φ общее значение функции f для поверхностей F' и F''. Если в f вместо аргументов R_1+R_2 и R_1R_2 подставить найденные выражения через h, то мы получим некоторое дифференциальное уравнение для функции h

$$\psi(h_{11}, h_{12}, h_{22}, x, y) = \varphi(x, y). \qquad (*)$$

Мы утверждаем, что это уравнение эллиптического типа.

Действительно, тип уравнения не изменится, если сделать замену переменных, в частности, если специализировать выбор системы координат x, y, z. Примем главные направления на поверхности в рассматриваемой точке за направления осей xy. Тогда в этой точке

$$R_1 + R_2 = h_{11} + h_{22},$$
$$R_1R_2 = h_{11}h_{22}.$$

Следовательно, $h_{11} = R_1$, $h_{22} = R_2$. Поэтому

$$\frac{\partial\psi}{\partial h_{11}} = f_1 + f_2R_2 = \frac{\partial f}{\partial R_1},$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial h_{22}} = f_1 + f_2R_1 = \frac{\partial f}{\partial R_2},$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial h_{12}} = 0,$$

где f_1 и f_2 — производные функции f по аргументам R_1+R_2 и R_1R_2. Условие эллиптичности

$$\frac{\partial\psi}{\partial h_{11}}\frac{\partial\psi}{\partial h_{22}} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\psi}{\partial h_{12}}\right)^2 > 0$$

очевидным образом выполняется в рассматриваемой точке, так как по наложенным условиям $\partial f/\partial R_1 > 0$, $\partial f/dR_2 > 0$. Утверждение доказано.

Положим

$$h' = H'(x, y, 1), \qquad h'' = H''(x, y, 1).$$

Покажем, что разность $h=h'-h''$ удовлетворяет линейному уравнению эллиптического типа вида

$$Ah_{11}+Bh_{12}+Ch_{22}=0. \qquad (**)$$

Действительно,

$$\psi(h'_{11},\ h'_{12},\ h'_{22},\ x,\ y)-\psi(h''_{11},\ h''_{12},\ h''_{22},\ x,\ y)=0.$$

Применяя лемму Адамара, мы действительно получим для h уравнение вида (**). Покажем, что это уравнение эллиптического типа. Ограничимся окрестностью точки P, где $h_{11}=h_{12}=h_{22}=0$. В этой точке

$$A=\frac{\partial\psi}{\partial h_{11}},\quad B=\frac{\partial\psi}{\partial h_{12}},\quad C=\frac{\partial\psi}{\partial h_{22}},$$

и эллиптичность уравнения (**) в точке P, а следовательно и в некоторой окрестности P, вытекает из эллиптичности уравнения (*).

Доказательство теоремы 3. Пусть $\alpha(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$ — произвольная фиксированная точка единичной сферы Ω с центром в начале координат. Производная H_α функции $H=H'-H''$ в направлении $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$, рассматриваемая на сфере Ω, достигает максимума в некоторой точке. При этом могут представиться два случая:

1. Для каждого α максимум H_α достигается в точке α или диаметрально противоположной точке $(-\alpha)$;

2. Для некоторого α максимум H_α не достигается ни в точке α, ни в точке $-\alpha$.

Рассмотрим первый случай. Прежде всего покажем, что если максимум H_α достигается в точке α (или $-\alpha$), то в этой точке $d^2H=0$. Примем направление α за направление оси z. Полагая $x/z=\xi$, $y/z=\eta$, будем иметь $H_z=h-\xi h_1-\eta h_2$. По доказанному поверхность Φ, задаваемая уравнением $\zeta=h(\xi,\ \eta)$ в декартовых координатах $\xi,\ \eta,\ \zeta$, может иметь только гиперболические точки и точки уплощения. Если точка $\xi=\eta=0$ является точкой уплощения, то в ней $h_{11}=h_{12}=h_{22}=0$. Нетрудно проверить, что вторые производные H_{ij} линейно и однородно выражаются через производные h_{kl}. Отсюда следует обращение в нуль всех производных H_{ij}, если соответствующая точка поверхности Φ является точкой уплощения. Покажем, что точка $\xi=\eta=0$ не может быть гиперболической. Действительно, в окрестности этой точки

$$h=c+a\xi+b\eta+A\xi^2+2B\xi\eta+C\eta^2+\ \ldots,$$

где не выписаны члены более высокого порядка малости, и

$$H_z=c-(A\xi^2+2B\xi\eta+C\eta^2)+\ \ldots$$

Так как форма в скобках знакопеременная, то в точке $\xi=\eta=0$ H_z заведомо не достигает максимума. Итак, точка $\xi=\eta=0$ не может быть гиперболической точкой. Утверждение доказано.

Определим множество N на единичной сфере Ω. Точку α отнесем к N, если в этой точке достигает максимума H_α или $H_{-\alpha}$. Очевидно, N — замкнутое множество. Его дополнение $M=\Omega-N$ является открытым. Покажем, что множество N имеет внутренние точки. Это очевидно, если $N\equiv\Omega$. Если же N не совпадает с Ω, то M не пусто; диаметрально противоположное к M множество M^* сплошь состоит из внутренних точек и содержится в N.

Пусть P — внутренняя точка множества N. Выберем оси координат так, чтобы точка P была на полусфере $z>0$. В окрестности точки P имеем $d^2H\equiv0$ и, следовательно, H — линейная функция. Сдвигом одной из поверхностей можно добиться того, что в окрестности P будет $H\equiv0$. Соответственно функция $h(x, y)=H(x, y, 1)$ равна нулю в окрестности некоторой точки $\bar{P}$ плоскости xy. В силу теоремы единственности для уравнения (**) отсюда следует, что $h(x, y)\equiv0$ на всей плоскости xy.

Рассмотрим поверхность $\bar{\Phi}$, задаваемую уравнением $z=\bar{h}(x, y)=H'(x, y, -1)-H''(x, y, -1)$. Так как $h\equiv0$, то при $x^2+y^2\to\infty$ функция $\bar{h}\to0$. Отсюда, ввиду неположительности кривизны $\bar{\Phi}$ следует $\bar{h}\equiv0$. Так как $h\equiv0$ и $\bar{h}\equiv0$, то $H'-H''\equiv0$, т. е. поверхности F' и F'' совпадают.

Рассмотрим теперь второй случай. Итак, пусть для некоторого α максимум H_α не достигается ни в точке α, ни в точке $-\alpha$. Введем координаты x, y, z таким образом, чтобы ось x соединяла точки α и $-\alpha$, а в точке, где достигается максимум H_α, было бы $z>0$. Снова рассматриваем поверхность Φ, задаваемую уравнением $z=h(x, y)=H'(x, y, 1)-H''(x, y, 1)$. Так как функция $h_1=\partial h/\partial x$ достигает максимума в некоторой точке P, то по условию максимума в этой точке $h_{11}=h_{12}=0$. Отсюда следует, что и $h_{22}=0$ (точка не может быть гиперболической). Не ограничивая общности, можно считать, что в точке P $h=0$, $h_1=0$, $h_2=0$. Этого всегда можно добиться соответствующим сдвигом одной из поверхностей F' или F''. Если в окрестности точки P все точки поверхности Φ являются точками уплощения, то мы заключаем о равенстве поверхностей F' и F'' так же, как и в рассмотренном случае. Если не все точки поверхности Φ, близкие к P, являются точками уплощения, то найдется последовательность гиперболических точек P_k, сходящаяся к P.

Проведем в точке P_k касательную плоскость α_k к поверхности Φ. При достаточно большом k она близка к касательной плоскости в точке P, т. е. к плоскости xy. Не ограничивая общ-

ности, можно считать, что угловые коэффициенты плоскости α_k по абсолютной величине не превосходят $1/k$.

Так как точка P_k гиперболическая, то окрестность точки P_k на поверхности Φ плоскостью α_k разбивается на четыре сектора V_1, V_2, V_3, V_4; два расположены над плоскостью α_k, например V_1 и V_3, а два другие — V_2 и V_4 — под ней. Секторы V_1, V_3 и V_2, V_4, хотя и располагаются по одну сторону плоскости α_k, но принадлежат различным компонентам G_k разбиения поверхности Φ плоскостью α_k. Действительно, допустим, точки A_1 и A_3 секторов V_1 и V_3 можно соединить кривой γ над плоскостью α_k. Соединим точки A_1 и A_3 кривыми γ_1 и γ_3 с точкой P_k внутри секторов V_1 и V_3. Замкнутый контур $\gamma+\gamma_1+\gamma_3$ охватывает одну из компонент G_k, содержащую либо V_2, либо V_4. Но тогда плоскость α_k отрезает горбушку от этой компоненты. А поверхность Φ имеет неположительную кривизну, и, следовательно, не допускает отрезания горбушек.

Так как при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$ функция $h_1(x, 0)$ стремится к отрицательным пределам (нуль — максимум h_1), то все точки $(x, 0)$ поверхности Φ при достаточно большом положительном x принадлежат одной компоненте разбиения поверхности Φ плоскостью α_k. Обозначим эту компоненту G^+. Точки $(-x, 0)$ при достаточно большом x принадлежат компоненте G^-. Более того, при каждом фиксированном y и большом x точки (x, y) принадлежат G^+, а точки $(-x, y)$ принадлежат G^-.

Пусть G_1, G_2, G_3, G_4 — компоненты разбиения поверхности Φ плоскостью α_k, содержащие секторы V_1, V_2, V_3, V_4 соответственно. Среди компонент G_1, G_2, G_3, G_4 найдется компонента, отличная от G^+ и G^-. Пусть для определенности это будет G_1. Так как компонента G_1 бесконечна, то она распространяется в бесконечность по крайней мере в одном из двух направлений: $y>0$ или $y<0$. Пусть для определенности она уходит в бесконечность в направлении $y>0$.

Проведем сечение поверхности Φ плоскостью $y=\text{const}>0$. Пересечение компонент G^+, G^- и G_1 с этой плоскостью обозначим g^+, g^- и g_1 соответственно. Так как g^+ и g^- содержат бесконечные уходящие в стороны $x>0$ и $x<0$ кривые, то g_1 состоит из конечных кривых с концами в плоскости α_k. Следовательно, на g_1 есть по крайней мере одна точка, где $|h_1|<1/k$. Переходя к пределу при $P_k\to P$, заключаем, что в одной из полуплоскостей, например $y>0$, на каждой прямой $y=\text{const}$ есть точка, где $h=0$ и $h_1=0$.

Обозначим через M множество тех точек плоскости xy, где $h=0$ и $h_1=0$. По доказанному в этих точках $h_{11}=h_{12}=h_{22}=0$. На каждой прямой $y=\text{const}>0$ есть точки множества M, причем пересечение M с указанной прямой есть либо одна точка, либо отрезок. В противном случае в этом сечении были бы точки,

где $x_1>0$, что невозможно (нуль есть максимум h_1). Если в каком-нибудь сечении получается отрезок, то вдоль этого отрезка, ввиду равенства нулю производных h_{ij}, функция h линейна. Сдвигом одной из поверхностей можно добиться того, что вдоль отрезка будет $h=0$, $h_1=0$ и $h_2=0$. По теореме единственности для уравнения (**) отсюда следует, что $h\equiv 0$. После этого заключаем о совпадении поверхностей F' и F'' так же, как и в предыдущем рассмотрении.

Если в каждом сечении $y=\mathrm{const}>0$ находится только одна точка $P(y)$ множества M, то эта точка непрерывно зависит от y. В противном случае в некотором сечении, где нарушается непрерывность, должны быть по крайней мере две точки множества M, а следовательно, и целый отрезок. Покажем, что в каждой точке $P(y)$ будет $h_2=0$. Действительно, если в точке $P(y_0)$ $h_2\neq 0$, то M в окрестности этой точки представляет собой гладкую кривую, однозначно проектирующуюся на оси x и y. Ввиду условия $h_1=0$ вдоль этой кривой касательные к ней должны быть параллельны оси y в каждой точке, близкой к $P(y_0)$. Следовательно, эта кривая содержит отрезок, параллельный оси y. Но это противоречит однозначности $P(y)$. Итак, в каждой точке $P(y)$ функция $h_2=0$. Ввиду непрерывной зависимости точки $P(y)$ от y точка P является пределом для точек плоскости xy, в которых $h=h_1=h_2=0$. По теореме единственности для уравнения (**) следует, что $x\equiv 0$. После этого заключаем о совпадении поверхностей F' и F'' так же, как и ранее. Теорема 3 доказана.

Ввиду того, что теорема 3 доказана пока что в тех или иных предположениях о дифференцируемости функции f, не лишена интереса следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть F — дважды дифференцируемая выпуклая поверхность и $f(R_1, R_2)$ — любая монотонная по обоим переменным функция в области $R_1>0$, $R_2>0$, $R_1\leqslant R_2$.*

Тогда, если главные радиусы кривизны R_1 и R_2 поверхности F *удовлетворяют условию*

$$f(R_1, R_2)=\mathrm{const},$$

то поверхность F — сфера.

Доказательство. Введем произвольным образом декартову систему координат x, y, z. Пусть $H(x, y, z)$ — опорная функция поверхности F. Положим

$$h(x, y)=H(x, y, 1)-H(x, y, -1).$$

Подобно тому как в лемме 1, доказывается, что поверхность Φ, задаваемая уравнением $z=h(x, y)$, может иметь только гиперболические точки и точки уплощения.

Покажем, что при $x^2+y^2\to\infty$ функция $h(x, y)$ остается ограниченной. Допустим, утверждение неверно. Тогда суще-

ствует последовательность точек (x_k, y_k) таких, что $x_k^2+y_k^2 \to \infty$ и $h(x_k, y_k) \to \infty$. Не ограничивая общности, можно считать, что при $k \to \infty$

$$\frac{x_k}{\sqrt{1+x_k^2+y_k^2}} \to \xi, \qquad \frac{y_k}{\sqrt{1+x_k^2+y_k^2}} \to \eta.$$

Этого всегда можно добиться, переходя к соответствующей подпоследовательности точек (x_k, y_k).

Положим

$$x' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \quad y' = \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \quad z' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

Пусть P — точка единичной сферы с координатами ξ, η, 0. При $k \to \infty$

$$h(x_k, y_k) = \frac{H(x_k', y_k', z_k') - H(x_k', y_k', -z_k')}{z_k'} \to 2H_z(\xi, \eta, 0) < \infty.$$

Мы пришли к противоречию, и ограниченность $h(x, y)$ доказана.

По известной теореме С. Н. Бернштейна [20] поверхность Φ, содержащая только гиперболические точки и точки уплощения, при условии ограниченности функции h, задающей эту поверхность, есть плоскость $z=\mathrm{const}$.

Сдвигом системы координат x, y, z можно добиться того, что $h(x, y)$ будет тождественно равна нулю. В этом случае плоскость xy является плоскостью симметрии поверхности F. Так как система координат xyz была взята произвольно, то поверхность F имеет плоскости симметрии всех направлений. Отсюда очевидным образом следует, что она есть сфера. Теорема доказана.

В заключение заметим, что теорема 3 может быть доказана без каких-либо предположений дифференцируемости для f, если функция f симметрична относительно n, т. е. если $f(R_1, R_2, n) = f(R_1, R_2, -n)$ (А. И. Медяник [46]).

§ 5. *Существование выпуклой поверхности с заданной функцией главных радиусов кривизны*

Пусть F — дважды дифференцируемая замкнутая выпуклая поверхность с положительной гауссовой кривизной и $f(R_1, R_2)$ — некоторая функция переменных R_1, R_2, определенная в области $R_1>0$, $R_2>0$, $R_1 \geqslant R_2$. Пусть $R_1(n)$ и $R_2(n)$ $(R_1(n) \geqslant R_2(n))$ — главные радиусы кривизны поверхности F в точке с внешней нормалью n. Поверхность F и функция f определяет некоторую функцию $\varphi(n) = f(R_1(n), R_2(n))$ единичного вектора n. Естественно поставить следующую проблему: при каких условиях

для заданных функций f и φ существует замкнутая выпуклая поверхность, удовлетворяющая уравнению

$$f(R_1,\ R_2)=\varphi(n). \tag{1}$$

Рассмотренные в §§ 1 и 2 проблемы Христоффеля и Минковского являются частными случаями этой более общей проблемы. Именно, проблема Христоффеля соответствует случаю, когда $f(R_1,\ R_2)=R_1+R_2$, а в проблеме Минковского $f(R_1,\ R_2)=R_1R_2$.

В настоящем параграфе мы будем рассматривать указанную проблему. В аналитическом истолковании проблема сводится к вопросу о разрешимости некоторого нелинейного уравнения для опорной функции искомой поверхности, которое получается из уравнения (1). Для решения этого уравнения мы применим метод непрерывного продолжения решения по параметру. Эффективность применения этого метода предполагает возможность априорных оценок решения вместе с его производными до второго порядка. Получение таких оценок эквивалентно оценке главных радиусов кривизны поверхности. В связи с этим мы начнем наше изложение получением априорных оценок для главных радиусов кривизны замкнутой выпуклой поверхности, удовлетворяющей уравнению (1). Относительно обеих функций f и φ предполагается их двукратная дифференцируемость, а для функции f, кроме того, строгая монотонность, т. е.

$$\partial f/\partial R_1>0, \qquad \partial f/\partial R_2>0. \tag{2}$$

Теорема 1. *В точке P_1 поверхности F, где R_1 достигает максимума,*

$$(R_2-R_1)\frac{\partial f}{\partial R_2}+\frac{\partial^2 f}{\partial R_2^2}\,\frac{\varphi_s^2}{(\partial f/\partial R_2)^2}\geqslant\varphi_{ss}.$$

В точке P_2 поверхности, где R_2 достигает минимума,

$$(R_1-R_2)\frac{\partial f}{\partial R_1}+\frac{\partial^2 f}{\partial R_1^2}\,\frac{\varphi_s^2}{(\partial f/\partial R_1)^2}\leqslant\varphi_{ss}.$$

Дифференцирование φ выполняется по дуге s большого круга на единичной сфере в соответствующем главном направлении.

Доказательство. Пусть в точке P_1 имеем $R_1>R_2$. Тогда в окрестности этой точки

$$f(R_1,\ R_2)\equiv g(R_1R_2,\ R_1+R_2),$$

где g — также дважды дифференцируемая функция. Таким образом, уравнение (1) в окрестности точки P_1 можно записать в виде

$$g(R_1R_2,\ R_1+R_2)=\varphi(n). \tag{3}$$

Примем точку P_1 поверхности F за начало координат, а главные направления в этой точке за направления координатных осей x и y. Пусть для определенности ось x соответствует главному направлению с радиусом кривизны R_1. Обозначим $H(x, y, z)$ опорную функцию поверхности. Тогда при $x=y=0$, $z=1$ будем иметь

$$H=0, \quad H_x=0, \quad H_y=0.$$

Соответственно для функции $h(x, y)=H(x, y, 1)$ получим

$$h=0, \quad h_x=0, \quad h_y=0.$$

Для суммы и произведения главных радиусов кривизны поверхности в § 4 получены следующие выражения:

$$\begin{gathered} R_1R_2=(rt-s^2)(1+x^2+y^2) \\ R_1+R_2=((1+x^2)r+2xys+(1+y^2)t)\sqrt{1+x^2+y^2}, \end{gathered} \tag{4}$$

где r, s, t — общепринятые обозначения для вторых производных функции h. Заметим, что в самой точке P_1, т. е. при $x=y=0$, ввиду специального выбора направления осей координат x, y производная $s=0$ и, следовательно, $r=R_1$, $t=R_2$.

Декартова координатная сеть на плоскости $z=1$ при проектировании из точки P_1 на единичную сферу $x^2+y^2+z^2=1$ переходит в криволинейную сеть. Координатные линии $x=\text{const}$ и $y=\text{const}$ на сфере суть большие круги. Проведем цилиндр Z, проектирующий поверхность F на плоскость большого круга $y=\text{const}$. Радиус кривизны R этого цилиндра вдоль линии касания с поверхностью заключен между главными радиусами кривизны поверхности, т. е.

$$R_2 \leqslant R \leqslant R_1. \tag{5}$$

Для радиуса кривизны R имеем известное выражение (см. § 1)

$$R=p+p_{ss},$$

где p — значения опорной функции H на единичной окружности $y=\text{const}$, а дифференцирование выполняется по дуге этой окружности. Обозначим радиус кривизны R как функцию координат x, y через $w(x, y)$. Замечая, что

$$p=\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,h(x, y),$$

находим для функции $w(x, y)$ следующее выражение:

$$w=r\,\frac{(1+x^2+y^2)^{3/2}}{1+y^2}.$$

Так как направление $y=0$ в точке $(0, 0)$ соответствует главному направлению R_1, то $w(0, 0)=R_1$ и, следовательно, ввиду неравенства (5) функция $w(x, y)$ в точке $(0, 0)$ достигает максимума. Поэтому в точке $(0, 0)$

$$w_x = r_x = 0, \qquad w_y = r_y = 0,$$
$$w_{xx} = r_{xx} + 3r \leqslant 0, \qquad w_{yy} = r_{yy} + r \leqslant 0.$$

Дифференцируя равенство (3) по x в точке $(0, 0)$, последовательно получаем

$$g_1(r_x t + r t_x) + g_2(r_x + t_x) = \varphi_x.$$
$$g_1(r_{xx} + 2r_x t_x + r t_{xx} + 4rt) + g_2(r_{xx} + t_{xx} + 3r + t) +$$
$$+ g_{11}(r_x t + r t_x)^2 + 2g_{12}(r_x t + r t_x)(r_x + t_x) + g_{22}(r_x + t_x)^2 = \varphi_{xx}.$$

Из первого равенства, замечая, что в точке $(0,0)$ имеем $r_x=0$, $r=R_1$, $t=R_2$, находим

$$t_x = \frac{\varphi_x}{g_1 R_1 + g_2} = \varphi_x \Big/ \frac{\partial f}{\partial R_2}.$$

Соответственно второе равенство преобразуется к виду

$$w_{xx}\frac{\partial f}{\partial R_1} + w_{yy}\frac{\partial f}{\partial R_2} + (R_2 - R_1)\frac{\partial f}{\partial R_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial R_2^2}\frac{\varphi_x^2}{(\partial f/\partial R_2)^2} = \varphi_{xx}.$$

Отсюда, так как $w_{xx} \leqslant 0$, $w_{yy} \leqslant 0$, получаем неравенство

$$(R_2 - R_1)\frac{\partial f}{\partial R_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial R_2^2}\frac{\varphi_x^2}{(\partial f/\partial R_2)^2} \geqslant \varphi_{xx}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\partial x/\partial s = \frac{1 + x^2 + y^2}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

Поэтому в точке $(0, 0)$ имеем $\varphi_x = \varphi_s$, $\varphi_{xx} = \varphi_{ss}$, и мы получаем неравенство, утверждаемое теоремой.

В начале доказательства мы исключили равенство $R_1 = R_2$, потребовав в точке P_1 условия $R_1 > R_2$. Но полученное нами неравенство, очевидно, верно и при $R_1 = R_2$. В этом случае оно выражает тривиальный факт — функция φ достигает в точке P_1 максимума. Доказательство второго утверждения теоремы о минимуме R_2 проводится аналогично, и поэтому мы его опускаем.

Рассмотрим два примера. Пусть $f(R_1, R_2) = R_1 R_2$. Тогда наше неравенство принимает вид

$$(R_2 - R_1) R_1 \geqslant \varphi_{ss}.$$

Отсюда, замечая, что $R_1R_2=\varphi$, получаем

$$R_1^2 \leqslant \varphi - \varphi_{ss}.$$

Эта оценка играет важную роль в некоторых решениях проблемы Минковского (Миранда [50], Ниренберг [52]).

Пусть $f(R_1, R_2)=R_1+R_2$. Тогда в точке P_2, где достигается минимум R_2, будем иметь

$$R_1 - R_2 \leqslant \varphi_{ss}.$$

Отсюда получается оценка для R_2 снизу

$$2R_2 \geqslant \varphi - \varphi_{ss}.$$

Этой оценкой мы воспользовались, рассматривая проблему Христоффеля в § 1.

Из теоремы 1 как следствие получается теорема § 4 о том, что если на замкнутой выпуклой поверхности $f(R_1, R_2)=\mathrm{const}$, то она есть сфера. Действительно, если эта поверхность не является сферой, то в точке P_1 будет $R_1>R_2$. С другой стороны, по теореме 1 в этой точке $(R_2-R_1)\, \partial f/\partial R_2 \geqslant 0$, т. е. $R_2 \geqslant R_1$, что невозможно. Следует, однако, заметить, что это доказательство не может заменить доказательства, приведенного в § 4, так как оно предполагает четырехкратную дифференцируемость поверхности и двукратную дифференцируемость функции f.

Из теоремы 1 мы получим общие условия существования априорных оценок для радиусов кривизны замкнутой выпуклой поверхности, удовлетворяющей уравнению (1). Условимся говорить, что для функций f и φ выполняется условие (*), если

$$\varlimsup_{\substack{R_2=R_2(R_1,\, n)\\ R_1\to\infty}} \left\{(R_2-R_1)\frac{\partial f}{\partial R_2}+\frac{\partial^2 f}{\partial R_2^2}\,\frac{\varphi_s^2}{(\partial f/\partial R_2)^2}\right\} < \varphi_{ss} \tag{*}$$

для любой точки n на единичной сфере и для любого направления дифференцирования (по s) из этой точки. Будем говорить, что для этих функций выполняется условие (**), если

$$\varliminf_{\substack{R_1=R_1(R_2,\, n)\\ R_2\to 0}} \left\{(R_1-R_2)\frac{\partial f}{\partial R_1}+\frac{\partial^2 f}{\partial R_1^2}\,\frac{\varphi_s^2}{(\partial f/\partial R_1)^2}\right\} > \varphi_{ss}. \tag{**}$$

В этих условиях $R_1(R_2, n)$ и $R_2(R_1, n)$ суть решения уравнения (1) относительно R_1 и R_2 соответственно.

Теорема 2. *Если для функций f и φ выполнено условие (*), то для радиусов нормальной кривизны замкнутой выпуклой поверхности F, удовлетворяющей уравнению (1), существует априорная оценка сверху. Если же для функций f и φ выполнено условие (**), то для радиусов нормальной кривизны*

существует положительная оценка снизу. Эти оценки зависят только от функций f и φ.

Теорема 2 непосредственно следует из теоремы 1.

Замечание. Изложенный метод доказательства существования априорных оценок применим и к более общему случаю, когда функция f зависит также от n и уравнение (1) имеет вид

$$f(R_1, R_2, n)=\varphi(n).$$

Рассмотрим вопрос о существовании замкнутой выпуклой поверхности F, удовлетворяющей уравнению (1). Формулировка окончательного результата (теорема 3) несколько сложна, поэтому мы отнесем ее в конец параграфа и начнем с доказательства существования поверхности F, удовлетворяющей уравнению (1), подчиняя функции f и φ соответствующим ограничениям в ходе доказательства. Прежде всего мы будем предполагать, что функция f определена для всех положительных значений R_1, R_2, симметрична ($f(R_1, R_2)=f(R_2, R_1)$) и строго возрастающая, т. е.

$$\partial f/\partial R_1>0, \quad \partial f/\partial R_2>0.$$

Относительно функции φ предполагаем ее четность ($\varphi(n)=\varphi(-n)$). Обе функции f и φ в начале считаем аналитическими. В конце это требование будет ослаблено до двукратной дифференцируемости.

Согласно теореме § 4 условием (1) поверхность F определяется однозначно с точностью до параллельного переноса. Пусть F^* — поверхность, симметричная F относительно точки O. Так как функция $\varphi(n)$ четная, то F^* также удовлетворяет уравнению (1). По указанной теореме поверхности F и F^* равны и параллельно расположены, т. е. совмещаются параллельным переносом. А это значит, что поверхность F имеет центр симметрии.

Пусть поверхность F испытывает бесконечно малую центрально-симметрическую деформацию в поверхность F_t с опорной функцией $H_t=H+tZ$, где H — опорная функция F. Тогда, если функция f для поверхности F_t стационарна при $t=0$, т. е. $\partial f(R_1(t), R_2(t))/dt=0$, то $Z\equiv 0$. Доказательство этого утверждения может быть построено на тех же соображениях, что и в теореме § 4. Но мы не будем приводить этого доказательства. Дело в том, что этот результат нам понадобится для случая, когда поверхность F и ее деформация аналитические, а в таком виде он по существу содержится в работе А. Д. Александрова [13].

Пусть $H(n)$ — опорная функция поверхности F, удовлетворяющей уравнению (1), на единичной сфере ω. Если принять центр поверхности F за начало координат O, то $H(n)$ будет

четной функцией $(H(n)=H(-n))$. Она удовлетворяет уравнению эллиптического типа

$$\Phi(H_{11},\ H_{12},\ \ldots,\ H,\ n)=0,$$

которое получается из уравнения (1). Соответствующее уравнение в вариациях имеет вид

$$\frac{\partial\Phi}{\partial H_{11}} p_{11}+\frac{\partial\Phi}{\partial H_{12}} p_{12}+\ \ldots\ +\frac{\partial\Phi}{\partial H} p\equiv L(p)=0. \tag{6}$$

Как указано выше, уравнение $L(p)=0$ в классе четных функций p $(p(n)=p(-n))$ не имеет других решений, кроме тривиального.

Линейный оператор L индуцирует на единичной сфере ω риманову метрику с линейным элементом

$$ds^2=\frac{\partial\Phi}{\partial H_{11}} du_1^2+\frac{\partial\Phi}{\partial H_{12}} du_1 du_2+\frac{\partial\Phi}{\partial H_{22}} du_2^2;$$

где u_1, u_2 — криволинейные координаты на сфере ω. Ввиду симметрии поверхности F, следовательно, четности H, отображение сферы ω на себя по симметрии относительно ее центра является изометрическим в метрике ds^2.

Задача о приведении уравнения (6) на сфере ω к каноническому виду

$$\Delta p+Ap_1+Bp_2+Cp=0, \tag{7}$$

где Δ — второй дифференциальный параметр Бельтрами, как известно, связана с конформным отображением многообразия M с метрикой ds^2 на сферу. Ввиду отмеченной выше симметрии метрики многообразия M можно считать, что конформное отображение сохраняет эту симметрию.

Задачу о построении поверхности, удовлетворяющей уравнению (1), мы будем решать методом непрерывного продолжения по параметру. Для этого функцию $\varphi(n)$ включим в непрерывное семейство $\varphi_\lambda(n)$, полагая

$$\varphi_\lambda(n)=\lambda\varphi+(1-\lambda)f(1,\ 1),\qquad 0\leqslant\lambda\leqslant 1.$$

Рассматриваемая задача тривиально разрешима при $\lambda=0$. Соответствующая поверхность есть сфера единичного радиуса. Допустим, что задача разрешима для функции φ_{λ_0}. Покажем, что она тогда разрешима для любой функции φ_λ при достаточной близости λ к λ_0.

Уравнение для опорной функции $P_\lambda(n)$ поверхности F_λ можно представить в виде

$$L(\overline{P})+R(\overline{P})+(\lambda-\lambda_0)(\varphi(n)-f(1,\ 1))=0, \tag{8}$$

где $\bar{P}=P_\lambda-P_{\lambda_0}$, L — линейный эллиптический оператор (6), отвечающий поверхности F_{λ_0}, а R представляет собой квадратичное выражение относительно функции $\bar{P}$ и ее производных до второго порядка.

Перейдем от уравнения (8) к интегральному уравнению с помощью четного фундаментального решения уравнения $\Delta\bar{P}=0$ с логарифмической особенностью в двух диаметрально противоположных точках сферы. Тогда получим

$$\bar{P}+\Omega\bar{P}=A, \tag{9}$$

где

$$\Omega\bar{P}=\int\limits_\omega K(n, n')\,\bar{P}\,d\omega, \qquad A=\int\limits_\omega K_1(n, n')\,R'\,d\omega.$$

Ядра K и K' — четные по обеим переменным. При $|n-n'|\to 0$ имеем

$$K\sim\frac{1}{|n-n'|}, \qquad K_1\sim\ln|n-n'|.$$

Для решения уравнения (9) мы применим метод последовательных приближений. В связи с этим обозначим $C'_{2,\alpha}$ пространство дважды дифференцируемых четных (по n) функций на единичной сфере, вторые производные которых удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $\alpha>0$. Оператор Ω, действующий в этом пространстве, вполне непрерывен. Так как однородное уравнение $\bar{P}+\Omega\bar{P}=0$ не имеет решения в $C'_{2,\alpha}$, кроме тривиального, то уравнение (9) однозначно разрешимо в $C'_{2,\alpha}$ для любой правой части A, также принадлежащей $C'_{2,\alpha}$.

Определим теперь последовательные приближения с помощью рекуррентной системы

$$\bar{P}_k+\Omega\bar{P}_k=A(\bar{P}_{k-1}).$$

В качестве исходного приближения возьмем $\bar{P}_0(n)\equiv 0$. Процесс последовательных приближений сходится при достаточной близости λ к λ_0 и дает решение нашей задачи для таких λ. Это решение в силу аналитичности и эллиптичности исходного уравнения будет аналитическим.

Покажем теперь, что при известных условиях относительно функций f и φ рассматриваемая задача разрешима при любом λ. Для этого, очевидно, достаточно гарантировать существование априорных оценок для функции $P_\lambda(n)$ и ее производных до второго порядка. Ввиду замкнутости и выпуклости поверхности F_λ это равносильно существованию положительных априорных оценок для главных радиусов кривизны. Условия существования таких оценок дает нам теорема 2.

Пусть при дифференцировании фуикции φ по дуге большого круга

$$a \leqslant \varphi'^2 \leqslant b, \qquad A \leqslant \varphi'' \leqslant B.$$

Тогда, согласио теореме 2, для существоваиия положительиых априориых оценок главиых радиусов кривизны поверхности F_λ достаточно, чтобы при любых постояиных α, β, λ таких, что $a \leqslant \alpha \leqslant b$, $A \leqslant \beta \leqslant B$ и $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, выполиялись иеравенства

$$\begin{gathered}\varlimsup_{\substack{R_2 = R_2(R_1;\, n) \\ R_1 \to \infty}} \left\{ (R_2 - R_1)\frac{\partial f}{\partial R_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial R_2^2}\,\frac{\lambda^2\alpha}{(\partial f/\partial R_2)^2} \right\} < \beta\lambda, \\ \varliminf_{\substack{R_1 = R_1(R_2,\, n) \\ R_2 \to 0}} \left\{ (R_1 - R_2)\frac{\partial f}{\partial R_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial R_1^2}\,\frac{\lambda^2\alpha}{(\partial f/\partial R_1)^2} \right\} > \beta\lambda. \end{gathered} \tag{***}$$

После того как задача решеиа для случая аиалитических функций f и φ, условие аиалитичности можно ослабить до требования двукратиой диффереицируемости. Для этого достаточно даииые фуикции f и φ приблизить аналитическими и, решив задачу, сделать предельиый переход в решении. Регуляриость предельиой поверхиости обеспечивается возможиостью получения априориых оцеиок ее радиусов кривизны и регуляриостью уравиеиия, которому оиа удовлетворяет. В итоге получается следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $f(R_1, R_2)$ — дважды дифференцируемая строго возрастающая по обеим переменным функция. Тогда для любой четной дважды дифференцируемой функции φ при выполнении условий (***) существует замкнутая выпуклая поверхность, удовлетворяющая уравнению*

$$f(R_1,\ R_2) = \varphi(n),$$

где R_1, R_2 — главные радиусы кривизны поверхности, а n — единичный вектор внешней нормали.

В заключеиие отметим, что аиалогичиый результат можно получить и в более общем случае, когда функция f зависит также от n, являясь четиой функцией этого перемеииого. Соответствующее уравиеиие имеет вид

$$f(R_1,\ R_2,\ n) = \varphi(n).$$

§ 6. Выпуклые многогранники с заданными значениями монотонной функции на гранях

Мы будем говорить, что иа выпуклых многоугольниках пространства задаиа фуикция σ, если каждому миогоугольнику Q сопоставлеио иекоторое число. Примерами таких фуикций являются площадь и периметр миогоугольиика. Пусть P — выпуклый многограииик с виешиими нормалями граией n_k. Тогда

каждому вектору n_k сопоставлено число σ_k, равное значению функции σ для грани с нормалью n_k. Естественно рассматривать следующую проблему. При каких условиях существует выпуклый многогранник с заданными внешними нормалями граней n_k и значениями функции σ на его гранях σ_k? Решению этой проблемы будет посвящен настоящий параграф. Она является аналогом соответствующей проблемы для выпуклых поверхностей, рассмотренной в § 5.

Пусть P_1 и P_2 — два бесконечных выпуклых многогранника. Мы будем говорить, что многогранники P_1 и P_2 совпадают на бесконечности, если плоскости их бесконечных граней совпадают, или, что то же самое, если многогранники совпадают вне шара достаточно большого радиуса. Если многогранники P_1 и P_2 совпадают на бесконечности, то они имеют одно и то же сферическое изображение.

Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — любая конечная система внутренних точек сферического изображения $\omega(P)$ бесконечного выпуклого многогранника P. Легко видеть, что можно построить, и притом с большим произволом, многогранник P', совпадающий с P на бесконечности, для которого сферическими изображениями конечных граней будут точки A_k.

Пусть на некотором множестве конечных выпуклых многоугольников в пространстве определена функция σ, удовлетворяющая условиям:

1. Функция σ — непрерывна, неотрицательна и равна нулю тогда и только тогда, когда многоугольник вырождается (в отрезок или точку);

2. Если многоугольник Q_1 является частью многоугольника Q_2, то $\sigma(Q_1) < \sigma(Q_2)$;

3. Если многоугольник Q_2 получается из многоугольника Q_1 сдвигом в направлении $z > 0$, то $\sigma(Q_1) \leqslant \sigma(Q_2)$.

Примером такой функции является площадь многоугольника. В дальнейшем для краткости всякую функцию σ, удовлетворяющую условиям 1, 2, 3, мы будем называть просто монотонной функцией.

Теорема 1. *Пусть P — бесконечный выпуклый многогранник, однозначно проектирующийся на плоскость xy, обращенный выпуклостью в сторону $z < 0$; $n_1, \ldots, n_m$ — любые единичные векторы, направленные внутрь сферического изображения $\omega(P)$ многогранника P; $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ — любые положительные числа.*

Пусть σ — монотонная функция, определенная для выпуклых многоугольников с плоскостями направлений n_k.

Пусть, наконец, Ω_P — совокупность всех бесконечных выпуклых многогранников, совпадающих с P на бесконечности, с конечными гранями α_k заданных направлений n_k.

Тогда, если среди многогранников Ω_P найдется такой многогранник P_0, что

$$\sigma(\alpha_i) \leqslant \sigma_i \qquad i=1, \ldots, m,$$

и для каждого многогранника из Ω_P, расположенного над плоскостью $z=ax+by+c$,

$$\sum_i \sigma(\alpha_i) \geqslant \sum_i \sigma_i, \tag{*}$$

то существует выпуклый многогранник в Ω_P, у которого значения функции σ на его конечных гранях равны заданным числам σ_i.

Доказательство. Пусть Q — произвольный многогранник из Ω_P, для конечных граней которого выполняется условие

$$\sigma(\alpha_i) \leqslant \sigma_i \qquad i=1, \ldots, m. \tag{**}$$

Множество Ω_Q многогранников Q не пусто (ему принадлежит многогранник P_0) и замкнуто. Последнее обеспечено непрерывностью функции σ.

Пусть c_i — координата z точки пересечения грани α_i многогранника Q с осью z. Положим

$$\varphi(Q) = c_1 + c_2 + \ldots + c_m.$$

В силу условия $(*)$ теоремы функция φ на множестве Ω_Q ограничена и, следовательно, достигает абсолютного максимума (множество Ω_Q замкнуто, а функция φ непрерывна).

Пусть $\bar{Q}$ — многогранник, для которого φ достигает максимума. Покажем, что для этого многогранника

$$\sigma(\alpha_i) = \sigma_i \qquad i=1, \ldots, m.$$

Действительно, если для какого-то $i=j$ имеем $\sigma(\alpha_j) < \sigma_j$, то малым смещением плоскости грани α_j в направлении $z>0$ мы этого неравенства не нарушим. Что же касается остальных граней, то они при этом могут только уменьшиться и, следовательно, для них неравенство $\sigma(\alpha_k) \leqslant \sigma_k$ сохранится независимо от величины смещения плоскости грани α_j.

Указанное преобразование многогранника $\bar{Q}$, таким образом, не выводит его из Ω_Q и вместе с тем позволяет увеличить значение $\varphi(\bar{Q})$, что невозможно по определению $\bar{Q}$. (На $\bar{Q}$ функция φ достигает абсолютного максимума.) Теорема доказана.

Замечание. Практически многогранник, существование которого утверждается теоремой 1, можно искать следующим образом. Смещая плоскость грани α_1 многогранника P_0 в направлении $z>0$, получим многогранник, в котором $\sigma(\alpha_1) = \sigma_1$. При этом значения функции σ на остальных гранях не возрастают. Затем смещаем плоскость грани α_2 и так до грани α_m,

после чего снова смещаем грань α_1 и т. д. В результате получается монотонная последовательность многогранников, имеющая своим пределом многогранник с требуемыми свойствами.

Рассмотрим вопрос об единственности выпуклого многогранника, существование которого устанавливается теоремой I.

Допустим, существует два многогранника P' и P'', совпадающие на бесконечности, у которых значения монотонной функции σ на конечных, одинаково направленных гранях совпадают.

Будем обозначать α_i' и α_i'' соответствующие (одинаково направленные) конечные грани многогранников P' и P''. Плоскости этих граней пересекают ось z в точках с координатами c_i' и c_i'' соответственно. Так как многогранники P' и P'' различны, то среди разностей $c_i' - c_i''$ есть отличные от нуля. Не ограничивая общности, можно считать, что

$$\max_i (c_i' - c_i'') = \delta > 0.$$

В противном случае можно было бы поменять ролями P' и P''.

Обозначим S' и S'' совокупность тех граней многогранников P' и P'' соответственно, для которых $c' - c'' = \delta$. Сдвинем многогранник P'' в направлении $z > 0$ на расстояние δ. При этом многогранник P'' окажется внутри многогранника P' и плоскости соответствующих граней из S' и S'' совместятся. Таким образом, после сдвига для соответствующих граней из S' и S'' будет $c' - c'' = 0$, а для остальных соответствующих граней, в том числе и бесконечных, $c' - c'' < 0$.

Покажем, что смежными для каждой грани α' из S' могут быть только грани из S'. В самом деле, пусть $\bar{\alpha}_i'$ — грани, смежные α', на многограннике P' и $\bar{\alpha}_i''$ — соответствующие им грани многогранника P''. Если утверждение неверно, то по крайней мере для одной пары соответствующих граней $\bar{\alpha}_i'$ и $\bar{\alpha}_i''$ имеет место неравенство $\bar{c}_i' - \bar{c}_i'' < 0$. Так как плоскости граней α' и α'' совпадают, а для каждой пары граней $\bar{\alpha}_i'$ и $\bar{\alpha}_i''$ имеет место неравенство $\bar{c}_i' - \bar{c}_i'' \leqslant 0$, причем по крайней мере в одном случае — строгое неравенство, то грань α'' содержится строго внутри грани α'. А это исключается свойством монотонности функции σ, которая по условию на соответствующих конечных гранях многогранников P' и P'' принимает одинаковые значения.

Так как смежными для каждой грани α' из S' являются также грани из S', то все грани многогранника P' должны принадлежать S'. Вместе с тем бесконечные грани заведомо не принадлежат S', и мы приходим к противоречию. Итак, многогранники P' и P'' совпадают. Тем самым доказана

Теорема 2. *Если у двух бесконечных выпуклых многогранников, однозначно проектирующихся на плоскость xy, обращенных выпуклостью в сторону $z<0$, плоскости бесконечных граней совпадают, а значения монотонной функции на конечных, одинаково направленных гранях равны, то многогранники совпадают.*

Рассмотрим теперь аналогичную проблему для замкнутых выпуклых многогранников.

Пусть α — произвольная плоскость и ω_α — функция, определенная на замкнутых выпуклых многоугольниках, лежащих в плоскостях, параллельных плоскости α, и удовлетворяющая условиям:

1′. Функция ω_α положительна и непрерывна.

2′. Функция ω_α инвариантна относительно параллельных переносов. Это значит, что если многоугольники P и Q совмещаются параллельным переносом, то значения функции ω_α на этих многоугольниках равны.

3′. Функция ω_α строго монотонна в том смысле, что если многоугольник Q является частью многоугольника P, то $\omega_\alpha(Q)<\omega_\alpha(P)$.

4′. Если многоугольник P изменяется так, что его площадь $S(P)\to\infty$, то $\omega_\alpha(P)\to\infty$. Если многоугольник P вырождается (в отрезок), то $\omega_\alpha(P)\to 0$.

Теорема 3. *Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ $(n\geqslant 3)$ — система плоскостей, не параллельных одной прямой, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ — система функций, определенных на многоугольниках, параллельных плоскостям $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ соответственно и удовлетворяющих условиям 1′—4′.*

Тогда, каковы бы ни были положительные числа $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, существует замкнутый выпуклый многогранник с $2n$ гранями, параллельными плоскостям $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, и значениями функций ω_k на этих гранях, равными $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

Этот многогранник имеет центр симметрии и определен однозначно с точностью до параллельного переноса.

Начнем с доказательства существования центра симметрии и единственности многогранника. Пусть P — многогранник, существование которого утверждается теоремой. Так как он имеет $2n$ граней, а у многогранника не может быть более чем две грани заданного направления, то у многогранника P для каждого направления α_k будет ровно две грани. Построим многогранник P^*, симметричный многограннику P относительно произвольной точки O. Поставим грани многогранников P и P^* в соответствие, считая соответствующими параллельные грани с одинаково направленными внешними нормалями. Значения функций ω на соответствующих гранях многогранников P и P^* равны, а следовательно, эти грани взаимно не помещаемы

друг в друга параллельным переносом. По известной теореме А. Д. Александрова [3] многогранники P и P^* равны и параллельно расположены, т. е. совмещаются параллельным переносом. Отсюда заключаем о существовании центра симметрии у многогранника P. Единственность многогранника P доказывается аналогично.

Докажем теперь существование многогранника. Назовем произвольную систему n положительных чисел $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ абстрактным многогранником. Если существует замкнутый выпуклый многогранник с $2n$ гранями, параллельными плоскостям $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, и со значениями функций ω_k на гранях, параллельных плоскостям α_k, равными φ_k, то этот многогранник мы будем называть реализацией абстрактного многогранника $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$. Определим два многообразия. Элементами первого многообразия, будем обозначать его M_1, являются замкнутые выпуклые симметричные многогранники с $2n$ гранями, параллельными плоскостям $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Каждый такой многогранник задается положительными числами — значениями опорной функции в направлениях, перпендикулярных плоскостям α_k. Его можно изображать точкой n-мерного евклидова пространства с координатами, равными указанным значениям опорной функции. Второе многообразие, будем обозначать его M_2, состоит из абстрактных многогранников, и его можно интерпретировать как внутренность первого координатного угла n-мерного евклидова пространства с декартовыми координатами $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

Каждому многограннику из M_1 естественным образом соответствует некоторый абстрактный многогранник из M_2. Мы утверждаем, что это соответствие есть гомеоморфизм, а следовательно, каждый абстрактный многогранник допускает геометрическую реализацию. Доказательство этого гомеоморфизма будет основано на «лемме об отображении *)» А. Д. Александрова [3] в применении к многообразиям M_1 и M_2. Условия этой леммы выполнены. Действительно, многообразия M_1 и M_2 имеют одинаковую размерность (n). Многообразие M_2 связно, как выпуклое множество. Существуют заведомо реализуемые многогранники. Образы различных точек из M_1 в M_2 различны в силу доказанной единственности (многогранники, совмещаемые параллельным переносом, отождествляются). Остается доказать, что если некоторый абстрактный многогранник является пределом реализуемых, то он сам реализуем.

Пусть $P_1, P_2, \ldots$ — бесконечная последовательность многогранников из M_1, $P_1', P_2', \ldots$ — последовательность соответствующих абстрактных многогранников, сходящаяся к абстрактному

*) Формулировку леммы см. на стр. 506.

многограннику P. Покажем, что многогранник P реализуем. Обозначим $h_1^k, h_2^k, \ldots, h_n^k$ опорные числа многогранника P_k в направлениях, перпендикулярных плоскостям $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Не ограничивая общности, можно считать, что каждая последовательность $H_s(h_s', h_s^2, \ldots)$, $s=1, \ldots n$, сходится к конечному или бесконечному пределу.

Мы утверждаем, что каждая последовательность H_s сходится к конечному, отличному от нуля пределу. Действительно, площади поверхностей многогранников P_k ограничены в совокупности. Поэтому если какая-нибудь последовательность H_s сходится к бесконечному пределу, то многогранник P_k при достаточно большом k заключается в цилиндр сколь угодно малого радиуса. При этом среди граней многогранника найдется такая, которая имеет диаметр порядка диаметра цилиндра и, значит, функция ω для этой грани стремится к нулю при $k \to \infty$, что невозможно.

Если теперь допустить, что некоторая последовательность H_s сходится к нулю, то многогранник P_k при достаточно больших k располагается между двумя сколь угодно близкими параллельными плоскостями. При этом найдется грань, которая при $k \to \infty$ вырождается в отрезок, т. е. снова функция ω стремится к нулю, что невозможно.

Итак, все последовательности H_s имеют положительные предельные значения. А отсюда следует сходимость многогранников P_k к реализации предельного многогранника последовательности P_k'. Теперь на основании упомянутой леммы А. Д. Александрова заключаем о гомеоморфизме многообразий M_1 и M_2, а следовательно, о реализуемости всех абстрактных многогранников. Теорема доказана.

Как следствие теоремы 3 получается следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ $(n \geqslant 3)$ — система плоскостей, не параллельных одной прямой; $f(s, p, \nu_k)$ — функция положительных переменных s, p и единичных векторов ν_k, перпендикулярных плоскостям α_k, удовлетворяющая условиям:*

1) *функция f положительна, непрерывна, строго возрастает по переменным s, p и четная по ν, т. е. $f(s, p, \nu) = f(s, p, -\nu)$;*

2) *при $s \to \infty$ функция $f(s, p, \nu) \to \infty$, а при $s \to 0$ функция $f(s, p, \nu) \to 0$.*

Тогда, какова бы ни была четная функция $\varphi(\nu_k)$, существует замкнутый выпуклый многогранник с $2n$ гранями, параллельными плоскостям α_k, такой, что площади s_k, периметры p_k и внешние нормали ν_k его граней удовлетворяют условиям $f(s_k, p_k, \nu_k) = \varphi(\nu_k)$.

Этот многогранник имеет центр симметрии и определяется однозначно с точностью до параллельного переноса.

§ 7. Выпуклые многогранники с вершинами на данных лучах и заданными значениями монотонной функции на многогранных углах в вершинах

В предыдущем параграфе мы рассматривали выпуклые многогранники, грани которых были сопоставлены таким образом, что они соответствовали друг другу по параллельности. Если пространство пополнить несобственными (бесконечно удаленными) элементами, то речь идет о сопоставлении, при котором плоскости соответствующих граней пересекаются по прямым, лежащим в одной плоскости. В настоящем параграфе мы будем рассматривать проблему, в некотором смысле двойственную той, которая рассматривалась в § 6. Теперь вершины рассматриваемых многогранников будут поставлены в соответствие, при котором прямые, соединяющие соответствующие вершины, проходят через одну точку, в частности параллельны. Вместо функции на гранях многогранника рассматривается функция на многогранных углах в вершинах.

Пусть V — выпуклый многогранный угол и A — его вершина. Если из точки A можно провести полупрямую внутрь угла V, параллельную оси z в направлении $z>0$, то будем говорить, что угол V обращен выпуклостью в сторону $z<0$.

На выпуклых многогранных углах, обращенных выпуклостью в сторону $z<0$, мы будем рассматривать функции ϑ, удовлетворяющие условиям:

1. Функция ϑ непрерывна, неотрицательна и равна нулю тогда и только тогда, когда угол вырождается (в двугранный угол или плоскость);

2. Если углы V_1 и V_2 имеют общую вершину и угол V_1 содержится в V_2, то $\vartheta(V_1) \geqslant \vartheta(V_2)$, причем равенство имеет место только тогда, когда углы совпадают.

3. Если угол V_2 получается из V_1 сдвигом в направлении $z<0$, то $\vartheta(V_1) \leqslant \vartheta(V_2)$.

Примером функции ϑ является кривизна угла — площадь сферического изображения. В дальнейшем всякая функция ϑ, удовлетворяющая условиям 1, 2, 3, называется просто монотонной функцией угла.

Теорема 1. *Пусть γ — замкнутая ломаная в пространстве, которая прямыми, параллельными оси z, однозначно проектируется на плоскость xy в выпуклую ломаную $\bar{\gamma}$, ограничивающую многоугольник G, причем вершинам ломаной γ соответствуют вершины $\bar{\gamma}$. Пусть $g_1, g_2, \ldots, g_n$ — любая конечная система прямых, параллельных оси z и пересекающих многоугольник G; $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ — любые положительные числа; ϑ — мо-*

нотонная функция, заданная на многогранных углах, обращенных выпуклостью в сторону $z<0$ и с вершинами на прямых g_k.

Обозначим Ω_P совокупность многогранников P с краем γ, однозначно проектирующихся на плоскость xy, обращенных выпуклостью в сторону $z<0$ и с вершинами на прямых g_k.

Тогда, если в Ω_P найдется многогранник P_0 такой, что для его многогранных углов с вершинами в точках A_k

$$\vartheta(A_k)\leqslant\vartheta_k \qquad k=1,\ \ldots,\ n \tag{$*$}$$

и для каждого многогранника из Ω_P, пересекающего плоскость $z=\mathrm{const}$,

$$\sum_k \vartheta(A_k)\geqslant\sum_k \vartheta_k, \tag{$**$}$$

то в Ω_P существует многогранник, на многогранных углах которого функция ϑ принимает заданные значения ϑ_k, т. е.

$$\vartheta(A_k)=\vartheta_k \qquad k=1,\ \ldots,\ n.$$

Доказательство. Обозначим Ω_Q совокупность тех многогранников Q из Ω_P, для каждого из которых выполняется условие ($*$). Множество Ω_Q не пусто, ограничено и замкнуто. Не пусто оно потому, что ему принадлежит по крайней мере P_0. Ограниченность Ω_Q вытекает из условия ($**$) теоремы, а замкнутость обеспечена непрерывностью функции ϑ.

Пусть c_k — координата z вершины A_k многогранника Q из Ω_Q. Рассмотрим функцию $\varphi(Q)=c_1+\ldots+c_n$.

Так как множество Ω_Q замкнуто и ограничено, а функция φ непрерывна, то она на этом множестве достигает абсолютного минимума для некоторого многогранника $\bar{Q}$. Утверждается, что $\bar{Q}$ и есть тот многогранник, о котором идет речь в теореме.

Допустим, утверждение неверно. Тогда для некоторой вершины A_k многогранника $\bar{Q}$ должно быть $\vartheta(A_k)<\vartheta_k$. Сместим вершину A_k по прямой g_k в направлении $z<0$ на малое расстояние δ и в новом положении обозначим ее A_k'. Построим теперь наименьший многогранник, содержащий ломаную γ и точки $A_1,\ \ldots,\ A_k,\ \ldots,\ A_n$. Его часть, обращенная выпуклостью в направлении $z<0$, представляет собой выпуклый многогранник с краем γ, принадлежащий Ω_P; обозначим его $\bar{Q}'$.

Если δ достаточно мало, то каждая вершина A_i многогранника $\bar{Q}$ при $i\neq k$ совпадает с соответствующей вершиной многогранника $\bar{Q}'$, и многогранный угол $\bar{Q}'$ содержит многогранный угол $\bar{Q}$. Если при вершине A_i $(i\neq k)$ многогранный угол $\bar{Q}$ вырождается в двугранный угол или плоскость, то при соответствующей вершине $\bar{Q}'$ угол также вырождается.

По непрерывности функции ϑ при достаточно малом δ $\vartheta(A_k')<\vartheta_k$. Что касается других вершин многогранника $\bar{Q}'$, то

для них условие $\vartheta(A_l')\leqslant\vartheta_l$ обеспечено характером изменения углов при переходе от $\bar{Q}$ к $\bar{Q}'$.

Таким образом, при достаточно малом смещении δ вершины A_k полученный многогранник $\bar{Q}'$ также принадлежит Ω_Q. Так как при переходе от многогранника $\bar{Q}$ к $\bar{Q}'$ вершины могут смещаться только в направлении $z<0$ и одна из них (A_k) заведомо смещается в этом направлении, то

$$\varphi(\bar{Q}')<\varphi(\bar{Q}),$$

что невозможно по определению $\bar{Q}$ (для $\bar{Q}$ функция φ достигает абсолютного минимума). Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Пусть P — бесконечный многогранник, не являющийся призмой. Проведем из какой-нибудь внутренней точки S многогранника все лучи, не пересекающие многогранник. Они заполняют некоторый многогранный угол, который называется предельным углом многогранника. Предельный угол может вырождаться в плоский угол или даже полупрямую. Из определения предельного угла следует, что он определен с точностью до параллельного переноса, зависящего от выбора точки S.

Сейчас мы докажем теорему, аналогичную теореме 1 для бесконечных выпуклых многогранников, заменив требование для многогранников проходить через заданный контур требованием иметь заданный предельный угол.

Теорема 2. *Пусть V — многогранный угол, однозначно проектирующийся на плоскость xy, обращенный выпуклостью в сторону $z<0$, $g_1, \ldots, g_n$ — конечная система прямых, параллельных оси z, $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ — любые положительные числа, ϑ — монотонная функция, определенная на многогранных углах, обращенных выпуклостью в сторону $z<0$ и с вершинами на прямых g_k.*

Обозначим Ω_P совокупность всех многогранников, имеющих предельные углы, равные и параллельно расположенные V, и вершины A_k на прямых g_k.

Тогда, если среди многогранников Ω_P найдется такой, для которого

$$\vartheta(A_k)\leqslant\vartheta_k \qquad k=1, \ldots, n,$$

и для каждого многогранника из Ω_P, пересекающего плоскость $z=ax+by+c$,

$$\sum_k \vartheta(A_k)>\sum_k \vartheta_k,$$

то в Ω_P существует и такой многогранник, на многогранных углах которого функция ϑ принимает заданные значения ϑ_k.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Обозначим Ω_Q совокупность многогранников из Ω_P, удовлетворяющих условиям

$$\vartheta(A_k) \leqslant \vartheta_k \qquad k=1, \ldots, n.$$

Множество многогранников Ω_Q не пусто, ограничено и замкнуто. (Ограниченность в том смысле, что все многогранники Ω_Q расположены над плоскостью $z=ax+by+c$.) Введенная выше функция φ на множестве Ω_Q достигает абсолютного минимума для некоторого многогранника $\bar{Q}$. Это и есть тот многогранник, существование которого утверждается теоремой. Действительно, допустим, в какой-нибудь вершине A_k многогранника $\bar{Q}$ имеем $\vartheta(A_k)<\vartheta_k$. Сместим эту вершину на малое расстояние δ в направлении $z<0$. Полученную точку обозначим A'_k. Пусть $\bar{V}$ — предельный угол многогранника $\bar{Q}$. Обозначим $\bar{Q}'$ наименьший многогранник, содержащий точки $A_1, \ldots, A'_k, \ldots, A_n$ и угол $\bar{V}$. Этот многогранник принадлежит Ω_P. Если смещение δ вершины A_k достаточно мало, то он принадлежит Ω_Q. Вместе с тем $\varphi(\bar{Q}')$, очевидно, меньше $\varphi(\bar{Q})$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Теперь мы докажем теоремы единственности для многогранников с вершинами на данных прямых с заданными значениями монотонной функции многогранных углов в этих вершинах.

Теорема 3. *Пусть P' и P'' — выпуклые многогранники с общим краем γ, однозначно проектирующиеся на плоскость xy и обращенные выпуклостью в сторону $z<0$. Пусть их внутренние вершины поставлены в соответствие проектированием прямыми, параллельными оси z, и пусть некоторая монотонная функция ϑ принимает на многогранных углах этих многогранников в соответствующих вершинах одинаковые значения. Тогда многогранники P' и P'' совпадают.*

Доказательство. Пусть A'_k и A''_k — соответствующие вершины многогранников, c'_k и c''_k — координаты z этих вершин. Если многогранники не совпадают, то среди разностей $c'_k - c''_k$ будут отличные от нуля. Не ограничивая общности, можно считать, что

$$\max_{(k)} (c'_k - c''_k) = \delta > 0.$$

Сместим многогранник P'' в направлении $z>0$ на расстояние δ. Пусть S' и S'' — совокупности вершин многогранников P' и P'', которые при этом совмещаются. Будем называть две вершины многогранника смежными, если они принадлежат одному ребру. Утверждается, что все вершины многогранника P', смежные вершинам из S', тоже принадлежат S'.

Действительно, пусть A' — вершина многогранника P' из S'. Если среди вершин P', смежных A', есть хотя бы одна, не принадлежащая S', то в силу неравенства $c'_k - c''_k \leqslant 0$, в котором равенство достигается для вершин из S' и только для них, многогранный угол при вершине A'' после смещения многогранника P'' содержится внутри многогранного угла P' при вершине A', а это исключается монотонностью функции ϑ.

Так как все вершины, смежные вершинам из S', принадлежат S', то, очевидно, у многогранника P' нет других вершин. С другой стороны, вершины, принадлежащие краю многогранника P', заведомо не принадлежат S', так как $\delta > 0$. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть P' и P'' — два бесконечных выпуклых многогранника, однозначно проектирующиеся на плоскость xy, обращенные выпуклостью в сторону $z<0$ и имеющие общий предельный угол V. Пусть их вершины поставлены в соответствие проектированием, параллельным оси z, а некоторая монотонная функция на многогранных углах многогранников в соответствующих вершинах принимает одинаковые значения.*

Тогда либо многогранники совпадают, либо один получается из другого сдвигом в направлении оси z. Вторая возможность исключается, если функция углов строго возрастающая при смещении в направлении $z<0$.

Доказательство этой теоремы является буквальным повторением доказательства теоремы 3. Из того, что все вершины P' принадлежат S', заключаем, что многогранник P'' совмещается с P' некоторым сдвигом в направлении оси z. Если функция многогранных углов строго возрастающая при сдвиге угла в направлении $z<0$, то многогранники P' и P'' просто совпадают, так как на равных, параллельно расположенных не совпадающих углах эта функция принимает различные значения.

Рассмотрим теперь случай замкнутых выпуклых многогранников. Пусть ϑ — функция, определенная на многогранных углах V, содержащих начало координат O, и удовлетворяющая следующим условиям:

1. Функция $\vartheta(V)$ непрерывна, неотрицательна и равна нулю тогда и только тогда, если многогранный угол вырождается в двугранный угол или плоскость.

2. Если углы V_1 и V_2 имеют общую вершину и V_1 содержится в V_2, но не совпадает с V_2, то $\vartheta(V_1) > \vartheta(V_2)$.

3. Если A — вершина угла V_1 и угол V_2 получается смещением угла V_1 в направлении OA, то $\vartheta(V_1) \leqslant \vartheta(V_2)$. Для краткости функцию ϑ мы будем называть монотонной функцией. Простейшим примером монотонной функции угла является его кривизна — площадь сферического изображения.

Теорема 5. *Пусть $g_1, g_2, \ldots, g_n$ — система лучей, исходящих из начала координат O, причем не существует полупространства, содержащего все эти лучи, ϑ — монотонная функция, определенная для многогранных углов с вершинами на лучах g_k, и $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ — любые положительные числа.*

Пусть существует замкнутый выпуклый многогранник с вершинами на лучах g_k и многогранными углами V_k в этих вершинах, удовлетворяющими неравенствам

$$\vartheta(V_k) \geqslant \vartheta_k \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Пусть, наконец, существует такое $\varepsilon > 0$, что у всякого замкнутого выпуклого многогранника с вершинами на лучах g_k по крайней мере для одного многогранного угла V_k

$$\vartheta(V_k) < \vartheta_k,$$

при условии, что хотя бы одна вершина этого многогранника отстоит от точки O на расстоянии, меньшем ε.

Тогда существует замкнутый выпуклый многогранник с вершинами на лучах g_k и значениями функции ϑ на его многогранных углах, равными ϑ_k, т. е.

$$\vartheta(V_k) = \vartheta_k, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Этот многогранник либо единственный, либо все такие многогранники получаются из одного преобразованием подобия относительно центра O. Последняя возможность исключается, если функция ϑ строго монотонна относительно смещения вершины угла по лучу, исходящему из точки O.

Доказательство. Обозначим Ω_P совокупность замкнутых выпуклых многогранников с вершинами на лучах g_k и многогранными углами V_k в этих вершинах, удовлетворяющими условиям

$$\vartheta(V_k) \geqslant \vartheta_k, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Это множество не пусто. Согласно условию теоремы ему принадлежит по крайней мере один многогранник.

Определим на многогранниках P множества Ω_P функцию

$$\varphi(P) = \sum_k |OA_k|,$$

где A_k — вершины многогранника P. На множестве Ω_P она достигает абсолютного минимума. Это обеспечивается непрерывностью функции φ и последним условием теоремы, в силу которого вершины многогранников из Ω_P удалены от точки O на расстояние, не меньшее ε.

Покажем, что у многогранника P, для которого функция φ достигает минимума, при всех k

$$\vartheta(V_k) = \vartheta_k.$$

Допустим, утверждение неверно и для какого-нибудь $k=m$ будет $\vartheta(V_m) > \vartheta_m$. Сместим вершину A_m на малое расстояние δ в направлении A_mO и в этом положении обозначим ее A'_m. При малом δ, по непрерывности функции ϑ, неравенство $\vartheta(V_m) > > \vartheta_m$ при переходе к многограннику P' с вершиной A'_m не нарушится. А для остальных вершин неравенство $\vartheta(V_k) \geqslant \vartheta_k$ может только усилиться, так как остальные углы при переходе к P' во всяком случае не увеличиваются. Таким образом, многогранник P' принадлежит Ω_P. Но это невозможно, так как $\varphi(P') < \varphi(P)$. Существование многогранника с вершинами на лучах g_k и значениями функции ϑ в углах при этих вершинах, равными ϑ_k, доказано.

Переходим к вопросу об единственности полученного многогранника. Допустим, существует два многогранника P' и P'' с вершинами на лучах g_k и многогранными углами при этих вершинах, удовлетворяющими условиям

$$\vartheta(V'_k) = \vartheta(V''_k) \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Обозначим

$$\max_k \frac{|OA''_k|}{|OA'_k|} = m.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $m > 1$. Увеличим многогранник P' подобно относительно центра O с коэффициентом подобия m и полученный многогранник обозначим $\bar{P}'$. Многогранник $\bar{P}'$ содержит P'', причем по крайней мере одна вершина у них общая. Если многогранники P' и P'' не подобны, то среди общих вершин многогранников $\bar{P}'$ и P'' найдется такая, в которой многогранный угол V'' многогранника P'' меньше многогранного угла $\bar{V}'$ многогранника $\bar{P}'$, и следовательно, $\vartheta(\bar{V}') < \vartheta(V'')$. А так как по монотонности функции ϑ имеем $\vartheta(V') \leqslant \vartheta(\bar{V}')$, то $\vartheta(V') < \vartheta(V'')$, что противоречит условию. Итак, многогранники P' и P'' подобны с центром подобия O.

Если функция ϑ строго монотонна относительно смещения вершины угла по лучу, исходящему из O, то многогранники P' и P'', будучи подобны, должны совпадать, так как в противном случае функция ϑ принимает на углах этих многогранников с вершинами на одном луче, исходящем из O, различные значения. Теорема доказана полностью.

Теоремы 4 и 5 для случая, когда функция $\vartheta(V)$ есть кривизна угла V, впервые доказаны А. Д. Александровым с помощью леммы об отображении [6].

§ 8. Единственность выпуклой поверхности с данной внутренней метрикой и метрикой ее сферического изображения

Как известно, в теории регулярных поверхностей важную роль играют три квадратичные формы

$$I = dr^2, \quad II = -dr\,dn, \quad III = dn^2,$$

где r — вектор точки поверхности, а n — единичный вектор внешней нормали. Первая квадратичная форма задает метрику поверхности. Зная ее, можно найти расстояние между любыми двумя точками на поверхности. Третья квадратичная форма задает метрику сферического изображения поверхностей. Зная ее, можно найти угол между нормалями поверхности в любых двух точках. В настоящем параграфе мы рассмотрим вопрос единственности выпуклой поверхности с заданной внутренней метрикой и метрикой сферического изображения.

Известна теорема Боннэ о том, что регулярная поверхность определяется однозначно с точностью до движения и зеркального отображения заданием ее первой и второй квадратичных форм. Если средняя кривизна поверхности нигде не обращается в нуль, то первая и третья квадратичные формы поверхности однозначно определяют вторую квадратичную форму. Таким образом, поверхность, средняя кривизна которой нигде не обращается в нуль, однозначно определяется ее первой и третьей квадратичными формами. Этот результат может быть обобщен на произвольные выпуклые поверхности без каких-либо предположений об их регулярности.

Пусть F_1 и F_2 — выпуклые поверхности, между точками и опорными плоскостями которых установлено взаимно однозначное соответствие, удовлетворяющее следующим условиям:

1) Если P_1 и Q_1 — две произвольные точки поверхности F_1, а P_2 и Q_2 — соответствующие им точки поверхности F_2, то расстояние между точками P_1 и Q_1 на поверхности F_1 равно расстоянию между точками P_2 и Q_2 на поверхности F_2.

2) Если π_1 — опорная плоскость поверхности F_1 в точке P_1, π_2 — опорная плоскость поверхности F_2, соответствующая π_1, и P_2 — точка поверхности F_2, соответствующая P_1, то P_2 принадлежит π_2.

3) Если π_1 и σ_1 — любые две опорные плоскости поверхности F_1, а π_2 и σ_2 — соответствующие им опорные плоскости поверхности F_2, то угол между внешними нормалями опорных плоскостей π_1 и σ_1 равен углу между внешними нормалями опорных плоскостей π_2 и σ_2.

Мы предполагаем, что ни одна из поверхностей F_1, F_2 не является плоской областью (случай, когда одна из этих

поверхностей — плоская область, неинтересен). Тогда внешнюю нормаль к опорной плоскости можно определить как полупрямую, перпендикулярную опорной плоскости и идущую в то полупространство, где нет точек поверхности. Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Выпуклая поверхность определяется однозначно, с точностью до движения и зеркального отображения, внутренним расстоянием для каждой пары ее точек и углом между внешними нормалями для каждой пары ее опорных плоскостей. Иначе говоря, две выпуклые поверхности, между точками и опорными плоскостями которых установлено взаимно однозначное соответствие, удовлетворяющее условиям* 1), 2), 3), *либо конгруэнтны, либо одна из них является зеркальным изображением другой.*

Не ограничивая общности, можно считать, что ни одна из поверхностей не является плоской областью. Действительно, в этом случае вторая поверхность тоже была бы плоской областью, и утверждение теоремы тривиальным образом следует из изометрии этих областей.

Рассмотрим несколько вспомогательных предложений.

A) Если между точками и опорными плоскостями выпуклых поверхностей F_1 и F_2 установлено соответствие, удовлетворяющее условиям 1), 2), 3), то движением или движением с зеркальным отображением поверхность F_2 может быть переведена в такое положение относительно F_1, при котором внешние нормали к соответствующим опорным плоскостям будут параллельны и одинаково направлены.

Поверхность F_1 имеет по крайней мере две, а в общем случае три опорные плоскости, внешние нормали которых не параллельны. Согласно условию 3), которому подчинено соответствие опорных плоскостей, поверхность F_2 движением или движением с зеркальным отображением может быть приведена в такое положение относительно F_1, при котором внешние нормали к этим двум, или соответственно трем, опорным плоскостям поверхности F_1 будут параллельны и одинаково направлены с внешними нормалями соответствующих опорных плоскостей поверхности F_2. Так как направление внешней нормали любой опорной плоскости определяется однозначно углами, которые она образует с отмеченными двумя, или соответственно тремя, внешними нормалями, то, согласно условию 3) соответствия опорных плоскостей поверхностей F_1 и F_2, внешние нормали любой пары соответствующих опорных плоскостей параллельны и одинаково направлены.

Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что соответствующие опорные плоскости поверхностей F_1 и F_2 параллельны и внешние нормали к ним одинаково направлены.

Пусть P_1 — точка поверхности F_1, γ_1 — охватывающий ее малый контур, g_1 — направленная прямая, проходящая через точку P_1 и идущая внутрь выпуклого тела, частью границы которого является поверхность F_1. Пусть, далее, P_2, γ_2, g_2 — соответствующие точка, контур и прямая для поверхности F_2. Мы будем говорить, что поверхности F_1 и F_2 ориентированы одинаково или противоположно, смотря по тому, дают ли соответствующие по изометрии движения вдоль контуров γ_1 и γ_2 одинаковое направление обхода около направленных прямых g_1 и g_2 или противоположное.

B) Касательные конусы в соответствующих точках поверхностей F_1 и F_2 конгруэнтны и параллельно расположены.

Утверждение это вытекает из условия параллельности и одинаковой направленности внешних нормалей к соответствующим опорным плоскостям.

C) В ребристой точке P_1 поверхности F_1 направлению τ_1 вдоль ребра g_1 двугранного угла V_1 (касательного конуса в точке P_1) соответствует направление τ_2 вдоль ребра g_2 двугранного угла V_2 (касательного конуса в точке P_2 поверхности F_2). Если поверхности F_1 и F_2 ориентированы одинаково, то $\tau_1=\tau_2$, если они противоположно ориентированы, то $\tau_1=-\tau_2$.

В самом деле, двугранные углы V_1 и V_2 равны и параллельно расположены. Допустим, что утверждение неверно, тогда можно провести геодезические γ_1 и γ_2 из точек P_1 и P_2 на поверхностях F_1 и F_2 так, что полукасательные к ним в точках P_1 и P_2 соответственно будут лежать в непараллельных гранях углов V_1 и V_2. Возьмем на кривых γ_1 и γ_2 последовательности соответствующих одновременно гладких точек P_{1k} и P_{2k} ($k=1, 2 \ldots$), сходящихся к P_1 и P_2 соответственно. Пусть π_{1k} и π_{2k} — соответствующие опорные плоскости в точках P_{1k} и P_{2k}. В силу непрерывности полукасательных к геодезическим γ_1 и γ_2 в точках P_1 и P_2 последовательности π_{1k} и π_{2k} сходятся и притом к непараллельным граням углов V_1 и V_2. Но это невозможно, так как $\pi_{1k} \| \pi_{2k}$ при любом k. Тем самым наше предложение доказано.

В силу утверждения B) отсюда вытекает, при одинаковой ориентации поверхностей F_1 и F_2, совпадение остальных соответствующих направлений в точках P_1 и P_2. Если поверхности F_1 и F_2 противоположно ориентированы, то полупрямые, перпендикулярные ребрам g_1, g_2 двугранных углов V_1, V_2 и лежащие в параллельных гранях этих углов, дают соответствующие направления в точках P_1, P_2.

D) Пусть P_1 — гладкая точка поверхности F_1, π_1 — опорная плоскость в этой точке, причем общая часть поверхности F_1 и плоскости π_1 есть отрезок Δ_1 и точка P_1 — его внутренняя точка. В силу свойств соответствия точек и опорных плоскостей

точка P_2, соответствующая P_1, будет обладать теми же свойствами. Направлению τ_1 вдоль отрезка Δ_1 соответствует направление τ_2 вдоль отрезка Δ_2. Отрезки Δ_1 и Δ_2 параллельны. Если поверхности F_1 и F_2 одинаково ориентированы, то τ_1 и τ_2 совпадают. Если F_1 и F_2 противоположно ориентированы, то τ_1 и τ_2 противоположны.

Очевидно, что на отрезках Δ_1 и Δ_2 лежат соответствующие направления поверхностей F_1 и F_2 в точках P_1 и P_2. Остальная часть утверждения доказывается аналогично предложению C). Именно, допустим, что утверждение неверно. Проведем из точек P_1 и P_2 соответствующие геодезические γ_1 и γ_2, полукасательные к которым в точках P_1 и P_2 не совпадают с отрезками Δ_1 и Δ_2. Построим аналогично тому, как это делалось при доказательстве утверждения C), последовательности опорных плоскостей π_{1k} и π_{2k}. Они пересекают плоскости π_1 и π_2 по параллельным прямым g_{1k} и g_{2k}. Эти прямые при $k\to\infty$ сходятся к прямым g_1 и g_2, на которых лежат отрезки Δ_1 и Δ_2. Итак, $\Delta_1 \| \Delta_2$. Совместим параллельным переносом поверхности F_1 и F_2 точками P_1 и P_2; при этом совмещаются также опорные плоскости π_1, π_2 и прямые g_1, g_2. Полукасательные к геодезическим γ_1 и γ_2 лежат в различных полуплоскостях плоскости $\pi_1\equiv\pi_2$, на которые разбивает ее прямая $g_1\equiv g_2$. Пусть $\bar{P}_{1k}$ и $\bar{P}_{2k}$ — проекции точек P_{1k} и P_{2k} на плоскость $\pi_1\equiv\pi_2$. Соединим их отрезком, он пересечет отрезок $\Delta_1\equiv\Delta_2$ в некоторой точке $\bar{P}$. Плоскость π_{1k} пересекает отрезок $\bar{P}_{1k}\bar{P}$, плоскость π_{2k} пересекает отрезок $\bar{P}_{2k}\bar{P}$. Поэтому точка $\bar{P}$ лежит между параллельными плоскостями π_{1k} и π_{2k}. Если точки P_{1k} и P_{2k} близки соответственно к P_1 и к P_2, то внутренняя нормаль к плоскости $\pi_1\equiv\pi_2$ в точке $\bar{P}$ не пересекает плоскостей π_{1k} и π_{2k}. Но отсюда следует, что плоскости π_{1k} и π_{2k} перпендикулярны к $\pi_1\equiv\pi_2$, а это невозможно, так как точка P_1 гладкая. Итак, мы пришли к противоречию. Предложение доказано.

Если поверхности F_1 и F_2 ориентированы одинаково, то отсюда следует, что любые два соответствующих направления в точках P_1 и P_2 совпадают. Если поверхности F_1 и F_2 противоположно ориентированы, то совпадают соответствующие направления, перпендикулярные отрезкам Δ_1, Δ_2.

E) Пусть поверхности F_1 и F_2 одинаково ориентированы, P_1 — гладкая точка поверхности F_1 и P_{1k}, P_{2k} $(k=1, 2 \ldots)$ — последовательности соответствующих точек поверхностей F_1 и F_2, сходящиеся к P_1 и P_2, причем соответствующие направления в точках P_{1k} и P_{2k} параллельны (могут и не совпадать). Тогда соответствующие направления в точках P_1 и P_2 также параллельны.

В самом деле, соединим точки P_{1k} кратчайшими γ_{1k} с точкой Q_1, близкой P_1; соединим точки P_{2k} соответствующими

кратчайшими γ_{2k} с точкой Q_2, которая соответствует Q_1. Можно так выбрать последовательиость k_j зиачений k, чтобы сходились кривые γ_{1k_j} и полукасательиые к кривым γ_{1k_j} и γ_{2k_j} в точках P_{1k_j} и P_{2k_j}. Тогда предельные полупрямые будут полукасательными к предельиым кратчайшим. Они будут параллельиы как предельные полупрямые попарио параллельных сходящихся последовательиостей полукасательных. Так как точки P_1 и P_2 — гладкие и поверхиости F_1 и F_2 одииаково ориентироваиы, то все соответствующие иаправления в точках P_1 и P_2 параллельиы.

F) Пусть P_1 — гладкая точка поверхиости F_1, π_1 — опорная плоскость в точке P_1, имеющая с поверхиостью F_1 только одиу общую точку P_1. Тогда, если поверхиости F_1 и F_2 одииаково ориеитированы, то соответствующие иаправлеиия в точках P_1 и P_2 (P_2 — точка, соответствующая P_1) параллельиы.

Если есть последовательность ребристых точек иа поверхиости F_1, сходящаяся к P_1, то это утверждеиие следует из предложеиий C) и E). Если в окрестиости точки P_1 нет ребристых точек поверхиости F_1, то проведем плоскость π_2', параллельиую π_2, близкую к ией и пересекающую поверхность F_2 по кривой γ_2', причем кривая γ_2' проходит только через гладкие точки поверхиости (это всегда возможно, так как ребристых точек в окрестиости P_2 нет, а миожество коиических точек не более чем счетно). Кривая γ_1', соответствующая γ_2', будет тоже гладкой. Пусть Q_1 — иаиболее удалениая от плоскости π_1 точка кривой γ_1'. В точках Q_1 и Q_2 соответствующие иаправления параллельиы, так как в них есть пара параллельных соответствующих направлений (направлеиия кривых γ_1' и γ_2'), а поверхиости F_1 и F_2 одииаково ориентироваиы. После этого достаточно примеиить утверждение E).

G) Пусть поверхиости F_1 и F_2 одииаково ориеитированы, P_1 — гладкая точка, ω_1 — плоская область, общая поверхиости F_1 и плоскости π_1. Тогда соответствующие направления в точках P_1 и P_2 (P_2 — точка, соответствующая P_1) параллельиы.

Если точка P_1 лежит иа границе ω_1, то существует последовательиость точек такого типа, как рассмотреииые в C), D) и F), сходящаяся к P_1. Теперь достаточно примеиить предложеиие E). Пусть P_1 — виутреиияя точка области ω_1. На границе ω_1 иайдется гладкая или ребристая точка. Для этих точек утверждеиие доказано. Так как ориеитации F_1 и F_2 одииаковы и ω_1, ω_2 конгруэнтиы и расположены в параллельиых плоскостях, то утверждение верно и в этом случае.

H) Пусть существует иа поверхиости F_1 точка P_1, удовлетворяющая двум условиям: 1) существует опориая плоскость в точке P_1, содержащая только эту точку поверхиости F_1;

2) внутренняя нормаль к плоскости π_1 идет внутрь тела, частью границы которого является поверхность F_1. Тогда поверхности F_1 и F_2 одинаково ориентированы.

В самом деле, совместим параллельным переносом точки P_1 и P_2. Пусть γ_1 — охватывающий точку P_1 малый контур на поверхности F_1. Если бы ориентации поверхностей F_1 и F_2 были противоположны, то на контурах γ_1 и γ_2 (γ_2 — контур, соответствующий γ_1) была бы пара соответствующих точек Q_1 и Q_2, проекции которых $\bar{Q}_1$ и $\bar{Q}_2$ на плоскость $\pi_1 \equiv \pi_2$ лежали бы на одной прямой с точкой $P_1 \equiv P_2$, причем эта точка была бы между ними. Пусть π_1' и π_2' — соответствующие опорные плоскости в точках Q_1 и Q_2. Они пересекают отрезки $\bar{Q}_1P_1$ и $\bar{Q}_2P_1$ соответственно. Если контур γ_1 мал, то внутренняя нормаль к плоскости π_1 в точке P_1 не пересекает плоскостей π_1' и π_2', но точка P_1 лежит между этими плоскостями. Поэтому плоскости π_1' и π_2' перпендикулярны π_1, а это невозможно, если Q_1 и Q_2 близки к P_1 и P_2, т. е. если контур γ_1 достаточно мал.

I) Пусть поверхности F_1 и F_2 одинаково ориентированы. Пусть далее P_1 и Q_1 — произвольные точки поверхности F_1 и γ_1 — соединяющая их геодезическая. Так как правая полукасательная к геодезической непрерывна справа, а левая — слева, то множества точек кривой γ_1 (концы кривой отбрасываются), которым соответствуют точки поверхности F_2 с совпадающими или соответственно противоположными соответствующими направлениями, замкнуты. Но так как γ_1 — связное множество, то это возможно только тогда, когда одно из упомянутых выше множеств пусто.

J) Пусть F_1 и F_2 противоположно ориентированы. Поверхность F_i ($i=1,2$) является частью некоторой замкнутой выпуклой поверхности $\Phi_i = F_i + \bar{F}_i$. Построим минимальное выпуклое тело, содержащее множество $\bar{F}_i$. Обозначим его поверхность через ψ_i. Так как на поверхности F_i нет точек такого типа, как рассмотренные в предложении H), то $F_i = \psi_i - \bar{F}_i$. Поэтому каждая опорная плоскость поверхности F_i имеет с ней либо общую систему отрезков без концов, лежащих на одной прямой опорной плоскости, либо общую систему плоских областей, ограниченных прямолинейными отрезками. В D) было показано, что в первом случае соответствующие отрезки Δ_1 и Δ_2 параллельны и на них лежат соответствующие направления, причем эти направления противоположны. Рассуждением, подобным проведенному в D), можно показать, что граничные отрезки во втором случае обладают этим свойством. Так как плоские области ω_1 и ω_2, общие поверхностям F_1 и F_2 и соответствующим опорным плоскостям, параллельны и одна является зеркальным изображением другой, и так как соответствующие

направления вдоль граничных отрезков областей ω_1 и ω_2 противоположны, то все граничные отрезки области ω_1 параллельны.

К) Дополним семейство прямолинейных образующих поверхностей F_1 и F_2 в точках плоских областей (см. J)) прямыми, параллельными граничным отрезкам этих областей. Теперь через каждую точку поверхности F_1 (соответственно F_2) проходит одна прямолинейная образующая. Прямолинейные образующие, проходящие через соответствующие точки поверхностей F_1 и F_2, параллельны. Направлениям, перпендикулярным образующим поверхности F_1, соответствуют направления, перпендикулярные соответствующим образующим поверхности F_2, причем эти направления совпадают (см. D) и J)).

Покажем, что все прямолинейные образующие поверхности F_1 параллельны. Действительно, ортогональные траектории семейств образующих поверхностей F_1 и F_2 в соответствующих точках имеют параллельные полукасательные в силу предложений D) и J). Поэтому, если обозначить радиусы-векторы точек пересечения соответствующих ортогональных траекторий с двумя образующими g_1 и g_1' (соответственно g_2 и g_2') через r_1 и r_1' (соответственно r_2 и r_2'), то будем иметь: $r_1 - r_1' = r_2 - r_2'$. Далее $dr_1 = -dr_2$, $dr_1' = -dr_2'$ (см. D) и J)). Отсюда $dr_1 = dr_1'$, $dr_2 = dr_2'$, т. е. образующие g_i и g_i' параллельны. Зеркальным отображением поверхности F_2 относительно плоскости, перпендикулярной ее образующим, можно изменить ориентацию поверхности. Поэтому можно считать, что поверхности F_1 и F_2 ориентированы одинаково.

Доказательство теоремы. Согласно предложению I) для единичных касательных векторов правых полукасательных соответствующих геодезических мы будем иметь либо $\tau_1 = \tau_2$, либо $\tau_1 = -\tau_2$, причем одновременно для всех точек геодезических. Интегрируя эти равенства, получим

$$|r_1(P_1) - r_1(Q_1)| = |r_2(P_2) - r_2(Q_2)|,$$

т. е. пространственные расстояния между соответствующими парами точек равны. Следовательно, исходные поверхности были или конгруэнтны, или одна была зеркальным изображением другой.

§ 9. Выпуклые поверхности с почти шаровыми точками

Подобно тому как в теории дифференциальных уравнений, в различных задачах геометрии часто рассматриваются три проблемы: проблема существования, проблема единственности и проблема устойчивости решения. Сущность последней проблемы

состоит в решении вопроса о том, насколько изменится решение, если данные задачи в каком-то смысле изменяются мало. Решение этой проблемы предполагает количественную оценку изменения решения в зависимости от заданного количественного изменения исходных данных. Качественное решение проблемы обычно дает соответствующая теорема единственности.

В настоящем и следующем параграфах мы рассмотрим некоторые вопросы, относящиеся к проблеме устойчивости.

Как известно из дифференциальной геометрии, выпуклая поверхность, у которой все точки шаровые, есть сфера. Иными словами говоря, если в каждой точке поверхности отношение главных радиусов кривизны $R_1/R_2=1$, то поверхность — сфера. При этом постоянство радиусов кривизны по всей поверхности априори не предполагается. Возникает естественный вопрос, можно ли утверждать, что поверхность близка к сфере, если точки поверхности почти шаровые? Ответ на этот вопрос дает

Теорема. *Если отношение главных радиусов кривизны в каждой точке замкнутой выпуклой поверхности близко к единице, то поверхность близка к сфере. Точнее, если главные радиусы кривизны удовлетворяют условию*

$$1-\varepsilon < \frac{R_1}{R_2} < 1+\varepsilon,$$

то при достаточно малом ε поверхность заключена между двумя концентрическими сферами радиусов r_1 и r_2, причем

$$1-c\varepsilon < \frac{r_1}{r_2} < 1+c\varepsilon, \qquad c<32\pi.$$

Доказательству этой теоремы предпошлем три леммы.

Лемма 1. *Для угла ϑ, образованного двумя произвольными сопряженными диаметрами эллипса с полуосями a, b, имеет место оценка*

$$|\operatorname{tg}\vartheta| \geqslant \frac{2\frac{b}{a}}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}. \tag{1}$$

Действительно, для угловых коэффициентов k и k' сопряженных диаметров эллипса с полуосями a, b имеем соотношение

$$kk' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Так как k и k' противоположных знаков, то

$$|k'-k| \geqslant 2\sqrt{-k'k}.$$

Отсюда

$$|\operatorname{tg}\vartheta| = \left|\frac{k'-k}{1+k'k}\right| \geqslant \frac{2\frac{b}{a}}{\left|1-\frac{b^2}{a^2}\right|},$$

что и требовалось доказать.

Пусть γ — замкнутая строго выпуклая кривая, O — точка внутри области, ограниченной кривой. Проведем касательную t в произвольной точке X кривой γ и обозначим через p расстояние от точки O до касательной t, а через q — расстояние между точкой X и точкой Y — основанием перпендикуляра, опущенного из точки O на касательную t. Как известно (см. § 1), p и q связаны соотношением

$$|p'| = q,$$

где дифференцирование p ведется по углу поворота касательной при движении точки X вдоль кривой.

Лемма 2. *Если отношение $\frac{q}{p}$ для всех касательных кривой мало, то кривая близка к некоторой окружности. Именно, если*

$$\frac{q}{p} < \varepsilon,$$

то при достаточно малом ε кривая заключена между двумя концентрическими окружностями с центром O и радиусами ρ_1, ρ_2, удовлетворяющими неравенству

$$1 - 2\pi\varepsilon < \frac{\rho_1}{\rho_2} < 1 + 2\pi\varepsilon.$$

Действительно, по условию леммы

$$-\varepsilon < \frac{p'}{p} < \varepsilon. \tag{2}$$

Пусть ρ_1 и ρ_2 — максимум и минимум расстояний точек кривой от центра O. Очевидно, кривая заключена между концентрическими кругами с центром O и радиусами ρ_1, ρ_2. Пусть X_1 и X_2 — точки кривой, в которых достигаются значения ρ_1 и ρ_2. Поворот кривой на одной из дуг $X_1 \frown X_2$ не превосходит π. Интегрируя неравенство (2) вдоль этой дуги, получим

$$-\pi\varepsilon < \ln\frac{\rho_1}{\rho_2} < \pi\varepsilon.$$

Отсюда

$$e^{-\pi\varepsilon} < \frac{\rho_1}{\rho_2} < e^{\pi\varepsilon}.$$

При достаточно малом ε получаем

$$1 - 2\pi\varepsilon < \frac{\rho_1}{\rho_2} < 1 + 2\pi\varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Пусть F — замкнутая выпуклая поверхность и α — касательная плоскость к F в некоторой точке P. Обозначим через $\alpha(h)$ плоскость, параллельную α и пересекающую поверхность F на расстоянии h от α. Пусть $l(h)$ — длина кривой $\gamma(h)$, получаемой в сечении.

Лемма 3. *Если $l(h) \leqslant l(h_0)$ для всех $h \leqslant h_0$, то функция $l(h)$ на отрезке $0 \leqslant h \leqslant h_0$ является монотонно возрастающей.*

Действительно, пусть $p(h, \vartheta)$ — опорное расстояние кривой $\gamma(h)$ в плоскости $\alpha(h)$. Функция $p(h, \vartheta)$ при фиксированном ϑ выпуклая. Так как

$$l(h) = \int_0^{2\pi} p(h, \vartheta)\, d\vartheta,$$

то $l(h)$ тоже выпуклая функция. Ее максимум достигается при $h = h_0$, а при $h = 0$ она равна нулю. Отсюда следует, что $l(h)$ является монотонной функцией от h. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть α и α' — две ближайшие параллельные касательные плоскости поверхности F, P и P' — их точки касания с поверхностью. Очевидно, прямая PP' является нормалью поверхности в точках P и P'. Обозначим через H расстояние между плоскостями α и α', т. е. длину отрезка PP'. Мы будем рассматривать плоские сечения поверхности F плоскостями, параллельными α и α'. Секущую плоскость, отстоящую от плоскости α на расстоянии h, будем по-прежнему обозначать $\alpha(h)$, кривую пересечения плоскости с поверхностью — $\gamma(h)$, а ее длину — $l(h)$.

Мы утверждаем, что каждая кривая $\gamma(h)$ заключена между двумя концентрическими окружностями с центром на прямой PP' и радиусами ρ_1, ρ_2, удовлетворяющими условию

$$1 - c\varepsilon < \frac{\rho_1}{\rho_2} < 1 + c\varepsilon, \tag{*}$$

где для краткости обозначено $c = 16\pi$.

Прежде всего мы покажем, что условие (*) выполняется для сечений $\alpha(h)$, близких к α, т. е. при достаточно малом h. Для этого возьмем произвольную плоскость β, проходящую через прямую PP', и спроектируем поверхность F на эту плоскость. При этом мы получим выпуклую область $\bar{F}$, ограничен-

ную кривой $\bar{\gamma}_\beta$. Обозначим $\bar{l}$ длину дуги PQ кривой $\bar{\gamma}_\beta$ (рис. 33). При достаточной близости $\alpha(h)$ к α будем иметь

$$\bar{l}<2OQ$$

независимо от выбора плоскости β. Это есть простое следствие гладкости поверхности F в точке P.

Обратимся теперь к сечению $\gamma(h)$ поверхности F плоскостью $\alpha(h)$. В этом сечении отрезок OQ есть опорное расстояние p для касательной, перпендикулярной плоскости β. Оценим величину соответствующего отрезка q (см. рис. 32).

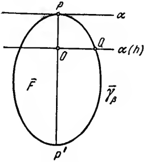

Рис. 33.

Пусть γ_β — линия на поверхности F, которая проектируется на плоскость β в кривую $\bar{\gamma}_\beta$. Направление кривой γ_β в каждой точке сопряжено направлению кривой $\gamma(h)$, проходящей через эту точку, относительно индикатрисы Дюпена поверхности F. Индикатриса Дюпена представляет собой эллипс с полуосями $\sqrt{R_1}$, $\sqrt{R_2}$, где R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны. По лемме 1 кривая γ_β пересекает кривые $\gamma(h)$ под углом ϑ, для которого имеет место оценка

$$|\operatorname{tg}\vartheta|\geqslant\frac{2\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}}{1-\frac{R_1}{R_2}},\qquad R_1\leqslant R_2.$$

Так как $\left|1-\frac{R_1}{R_2}\right|<\varepsilon$, то при достаточно малом ε

$$|\operatorname{tg}\vartheta|>\frac{1}{\varepsilon}.$$

Теперь легко оценить величину q в зависимости от $p=OQ$. Именно,

$$q\leqslant\frac{\bar{l}}{\min|\operatorname{tg}\vartheta|}<2p\varepsilon.$$

По лемме 2 отсюда заключаем, что кривая $\gamma(h)$ при малом ε заключена между концентрическими окружностями с центром на прямой PP' и радиусами ρ_1, ρ_2, удовлетворяющими условию (*).

Пусть при $h=h_0$ достигается максимум $l(h)$. Обозначим h_2 наибольшее число, не превосходящее h_0, обладающее тем

свойством, что, каково бы ни было $h<h_2$, для сечения $\alpha(h)$ выполняется условие (*). Мы утверждаем, что $h_2=h_0$. Допустим, утверждение неверно, и, следовательно, $h_2<h_0$. Тогда, ввиду строгого неравенства в условии (*) оно не может выполняться в сечении $\alpha(h_2)$, ибо по непрерывности оно должно было бы выполняться и для всех достаточно близких к h_2 больших значений h, что невозможно по определению h_2. Однако мы сейчас покажем, что условие (*) выполняется и в сечении $\alpha(h_2)$. Тем самым будет доказано, что $h_2=h_0$.

Итак, пока в сечении $\alpha(h_2)$ выполняется ослабленное условие (*). Именно:

$$1-c\varepsilon\leqslant\frac{\rho_1}{\rho_2}\leqslant 1+c\varepsilon.$$

Так как кривая $\gamma(h_2)$ содержит круг радиуса ρ_1 и содержится в круге радиуса ρ_2 с центром на прямой PP', то для опорных расстояний кривой p и ее длины $l(h_2)$ выполняются неравенства

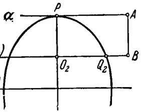

Рис. 34.

$$\rho_1\leqslant p\leqslant\rho_2,$$
$$2\pi\rho_1\leqslant l(h_2)\leqslant 2\pi\rho_2.$$

Оценим отрезок q для кривой $\gamma(h_2)$ в случае произвольной плоскости β. Имеем

$$q\leqslant\frac{\bar{l}_2}{\min\operatorname{tg}\vartheta}\leqslant\varepsilon\bar{l}_2,$$

где $\bar{l}_2$ — длина отрезка PQ_2 кривой $\bar{\gamma}$ (см. рис. 34). Каждая точка кривой $\bar{\gamma}$ на дуге PQ_2 удалена от прямой PP' на расстояние, не превосходящее $l(h_2)/2$. Действительно, каждая кривая $\gamma(h)$ при $h\leqslant h_2$ охватывает прямую PP' и имеет длину, не большую $l(h_2)$ в силу монотонности $l(h)$. Следовательно, каждая точка дуги PQ_2 кривой $\bar{\gamma}$ удалена от прямой PP' на расстояние, не большее $l(h_2)/2$. Ломаная $PABO_2$ с отрезками $AB=BO_2=$ $=l(h_2)/2$ объемлет дугу PQ_2 кривой $\bar{\gamma}$ и поэтому имеет длину, не меньшую чем дуга PQ_2. Отсюда получается оценка для $\bar{l}_2$:

$$\bar{l}_2\leqslant l(h_2)+h_2.$$

Соответственно

$$q\leqslant(l(h_2)+h_2)\,\varepsilon.$$

Покажем теперь, что $h_2<l(h_2)$. Для этого сначала покажем, что $H\leqslant l(h_0)$. Действительно, допустим, что $l(h_0)<H-\delta$, $\delta>0$. Тогда каждая точка поверхности удалена от прямой PP' на расстояние, меньшее $(H-\delta)/2$. Отсюда следует, что поверхность можно заключить между двумя параллельными плоскостями, па-

раллельными прямой PP' и отстоящими друг от друга на расстоянии, меньшем $H-\delta<H$. А это противоречит определению H. Итак, $H\leqslant l(h_0)$. Так как функция $l(h)$ выпуклая и монотонно возрастающая (лемма 3), то

$$\frac{l(h_2)}{h_2}\geqslant\frac{l(h_0)}{h_0}>\frac{l(h_0)}{H}\geqslant 1.$$

Отсюда $h_2<l(h_2)$ и, следовательно,

$$q<2l(h_2).$$

Так как

$$\rho_1\leqslant p,\quad l(h_2)\leqslant 2\pi\rho_2,\quad \rho_2/\rho_1\leqslant 1+4\pi\varepsilon,$$

то

$$l(h_2)<2\pi p(1+4\pi\varepsilon).$$

Следовательно,

$$q<4\pi p(1+4\pi\varepsilon).$$

По лемме 2 отсюда заключаем, что кривая $l(h_2)$ заключена между концентрическими окружностями с радиусами ρ_1 и ρ_2, для которых выполняется неравенство

$$1-8\pi\varepsilon(1+4\pi\varepsilon)<\frac{\rho_1}{\rho_2}<1+8\pi\varepsilon(1+4\pi\varepsilon).$$

Очевидно, при малом ε

$$8\pi\varepsilon(1+4\pi\varepsilon)<16\pi\varepsilon$$

и, следовательно, в сечении $\alpha(h_2)$ выполняется условие (*), вопреки предположению.

Таким образом, условие (*) выполняется для всех $h\leqslant h_0$. Поменяв ролями касательные плоскости α и α', заключаем, что условие (*) выполняется для остальных сечений $\alpha(h)$ поверхности F.

Проведем теперь две параллельные друг другу и прямой PP' касательные плоскости $\bar{\alpha}$ и $\bar{\alpha}'$ поверхности F. Пусть $\bar{\alpha}_0$ — параллельная им плоскость, пересекающая поверхность F по кривой максимальной длины. Не ограничивая общности, можно считать, что прямая PP' расположена между плоскостями $\bar{\alpha}$ и $\bar{\alpha}_0$ или лежит в плоскости α_0.

Повторяя дословно приведенное выше рассмотрение плоских сечений, беря в качестве плоскости α плоскость $\bar{\alpha}$, в качестве прямой PP' — нормаль к F в точке касания с плоскостью $\bar{\alpha}$ и в качестве плоскости $\alpha(h_0)$ — плоскость α_0, приходим к выводу, что сечение поверхности F плоскостью, параллельной $\bar{\alpha}$ и

проходящей через прямую PP', заключено между двумя концентрическими окружностями с радиусами ρ_1 и ρ_2, удовлетворяющими условию

$$1 - 16\pi\varepsilon < \frac{\rho_1}{\rho_2} < 1 + 16\pi\varepsilon.$$

Соединяя полученные два результата о плоских сечениях, перпендикулярных прямой PP', и плоских сечениях, проходящих через эту прямую, приходим к выводу о том, что сама поверхность F оказывается заключенной между двумя концентрическими сферами с радиусами r_1 и r_2, удовлетворяющими условию

$$1 - 32\pi\varepsilon < \frac{r_1}{r_2} < 1 + 32\pi\varepsilon.$$

Замечание. В данном доказательстве замкнутость поверхности не используется по существу. Мы сделали это предположение только для того, чтобы упростить изложение.

§ 10. Об устойчивости решений проблем Минковского и Христоффеля

В § 2 была рассмотрена проблема Минковского о существовании замкнутой выпуклой поверхности с данной гауссовой кривизной. Было доказано, что если заданная на сфере положительная непрерывная функция $K(n)$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_{\Omega} \frac{n}{K(n)}\, d\omega = 0,$$

то существует замкнутая выпуклая поверхность, которая в точке с нормалью n имеет гауссову кривизну $K(n)$. Эта поверхность определяется однозначно с точностью до параллельного переноса.

Проблема устойчивости в задаче Минковского состоит в оценке близости поверхностей, у которых гауссовы кривизны в точках с параллельными и одинаково направленными внешними нормалями близки. Эта проблема решена Ю. А. Волковым [29]. Решение Ю. А. Волкова относится к проблеме Минковского в более общей постановке, чем та, которую мы рассматривали до сих пор.

Дело в том, что задание гауссовой кривизны $K(n)$ регулярной выпуклой поверхности эквивалентно заданию для каждого множества E на сфере Ω площади $S(E)$ той части поверхности, которая имеет своим сферическим изображением E. Функция множеств $S(E)$ называется поверхностной функцией. Она сохраняет смысл для общих выпуклых поверхностей и является вполне аддитивной на кольце борелевских множеств. Общая проблема Минковского состоит в решении вопроса о существо-

вании и единственности замкнутой выпуклой поверхности, для которой заданная на сфере Ω вполне аддитивная функция множеств $S(E)$ является поверхностной функцией для этой поверхности. В такой общей постановке проблема решена А. Д. Александровым в работе [16]. Ю. А. Волков рассмотрел вопрос об устойчивости решения проблемы. Полученный им результат состоит в следующем.

Теорема 1. *Если поверхностные функции замкнутых выпуклых поверхностей Φ_0 и Φ_1 удовлетворяют условию*

$$\left| \frac{S(E)}{S_0(E)} - 1 \right| \leqslant \varepsilon,$$

то поверхность Φ_1 можно параллельным переносом поместить в $\delta(\varepsilon)$-окрестность поверхности Φ_0, а поверхность Φ_0 в $\delta(\varepsilon)$-окрестность поверхности Φ_1. Иначе говоря, в некотором расположении поверхностей их опорные функции на единичной сфере удовлетворяют неравенству

$$| H_1(n) - H_0(n) | \leqslant \delta(\varepsilon).$$

Число

$$\delta(\varepsilon) \leqslant c_0 \varepsilon^{1/5} (1 + c_1(\varepsilon)),$$

где c_0 и c_1 — постоянные, допускающие оценку в зависимости от максимума и положительного минимума площадей проекций поверхностей Φ_0 и Φ_1 на плоскости всевозможных направлений. При $\varepsilon \to 0$ постоянная $c_1(\varepsilon) \to 0$.

Доказательство этой теоремы, данное Ю. А. Волковым, несколько сложно. Поэтому мы ограничимся изложением только идейной стороны доказательства, опуская детали.

Прежде всего показывается, что для радиусов описанного и вписанного шаров поверхностей Φ_i можно указать оценку сверху и снизу соответственно в зависимости от максимума b и положительного минимума a площадей проекций поверхностей на плоскости всевозможных направлений. Действительно, пусть d — диаметр поверхности. Тогда на поверхности найдутся точки C и D, которые удалены на расстояние d. Проекция поверхности на плоскость, перпендикулярную отрезку CD, имеет площадь, не меньшую a. Следовательно, внутри поверхности найдутся точки A и B, проекции которых на указанную плоскость отстоят на расстоянии, не меньшем $\sqrt{a/\pi}$. Площадь проекции поверхности на плоскость, параллельную отрезкам AB и CD, не меньше $\frac{1}{2} d \sqrt{a/\pi} \leqslant b$. Отсюда получается оценка для d и, следовательно, для радиуса описанного шара.

Покажем, что для радиуса вписанного шара существует положительная оценка снизу. Возьмем внутри поверхности две

точки A_1 и A_2 на расстоянии, не меньшем $\sqrt{a/\pi}$. Так как площадь проекции поверхности на любую плоскость не меньше a, а диаметр поверхности уже ограничен, то внутри поверхности найдется точка A_3 такая, что углы A_i треугольника $A_1A_2A_3$ заключены в пределах $\varepsilon' \leqslant A_i \leqslant \pi - \varepsilon'$, где ε' оценивается снизу через a и b. Чтобы найти такую точку, достаточно рассмотреть проекцию поверхности на плоскость, параллельную отрезку A_1A_2. Далее можно указать внутри поверхности точку A_4 такую, что все ребра тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$, исходящие из вершины A_4, образуют с плоскостью основания $A_1A_2A_3$ углы, заключенные в пределах ε'', $\pi - \varepsilon''$, где $\varepsilon'' > 0$ и зависит только от a и b. Чтобы найти точку A_4, достаточно рассмотреть проекцию поверхности на плоскость, перпендикулярную плоскости треугольника $A_1A_2A_3$. Ввиду указанных оценок для стороны A_1A_2 и углов тетраэдра для радиуса вписанного в тетраэдр шара может быть указана оценка в зависимости от указанных величин, следовательно, от a и b.

Будем обозначать T_0 и T_1 — выпуклые тела, ограниченные поверхностями Φ_0 и Φ_1; $\tilde{T}_0$ и $\tilde{T}_1$ — тела, подобные T_0 и T_1, единичного объема; $\tilde{\Phi}_0$ и $\tilde{\Phi}_1$ — поверхности тел $\tilde{T}_0$ и $\tilde{T}_1$. Отклонение $\delta(\varepsilon)$ сначала оценивается для поверхностей $\tilde{\Phi}_0$ и $\tilde{\Phi}_1$. Именно, доказывается существование оценки вида

$$\tilde{\delta} \leqslant c\,(\tilde{V}_{12} - 1)^{1/6}, \tag{1}$$

где $\tilde{V}_{12}$ — смешанный объем для тел T_0 и T_1. Напомним его определение.

Пусть r_0 и r_1 — векторы точек P_0 и P_1 выпуклых тел T_0 и T_1. Рассмотрим вектор

$$r = \lambda r_0 + \mu r_1.$$

Когда точки P_0 и P_1 независимо зачерчивают тела T_0 и T_1, конец вектора r зачерчивает некоторое выпуклое тело $T = \lambda T_0 + \mu T_1$. Объем этого тела представляет собой однородный многочлен третьей степени относительно λ и μ. (см. Боннезен Т. и Фенхель В., [23]):

$$V = \sum C_3^k \lambda^k \mu^{k-1} V_{k,\,k-1}$$

(C_3^k — биномиальные коэффициенты). Коэффициенты $V_{k,\,k-1}$ называются смешанными объемами, причем $V_{0,3} = V_0$, $V_{3,0} = V_1$.

Получение оценки (1) является центральным пунктом доказательства теоремы 1. Покажем, как она получается. Совместим центры тяжести тел $\tilde{T}_0$ и $\tilde{T}_1$ с началом координат O. Проведем опорную плоскость α_i тела $\tilde{T}_i$ с внешней нормалью n. Пусть $\alpha_i(v)$ — плоскость, параллельная α_i и отсекающая от

тела T_i объем v, $F_i(v)$ — площадь сечения тела T_i плоскостью $\alpha_i(v)$. Легко показывается, что расстояние от точки O (центра тяжести) до плоскости α_i, т. е. опорное расстояние, равно

$$\tilde{H}_i(n) = \int_0^1 (1-v)\frac{dv}{F_i(v)}.$$

Отсюда

$$|\tilde{H}_1(n) - \tilde{H}_0(n)| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{1}{F_1} - \frac{1}{F_0}\right| dv = \psi(n). \tag{2}$$

Таким образом, для оценки величины $\tilde{\delta}$ отклонения поверхностей $\tilde{\Phi}_0$ и $\tilde{\Phi}_1$ достаточно оценить величину ψ.

В доказательстве Брунна неравенства Минковского для смешанных объемов получается следующее неравенство:

$$f(t) = V((1-t)\tilde{T}_0 + t\tilde{T}_1) \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^1 \left((1-t)F_0^{1/2} + tF_1^{1/2}\right)\left(\frac{1-t}{F_0} + \frac{t}{F_1}\right) dv \equiv \varphi(t).$$

Так как $f(0) = \varphi(0)$, то $f'(0) \geqslant \varphi'(0)$. Отсюда

$$3(\tilde{V}_{12} - 1) \geqslant \int_0^1 \left[\frac{F_0}{F_1} + 2\left(\frac{F_1}{F_0}\right)^{1/2} - 3\right] dv = I. \tag{3}$$

Теперь для получения оценки (1) достаточно оценить величину ψ через I. Положим $\alpha = \left(\frac{F_0}{F_1}\right)^{1/2}$. Тогда

$$I = \int_0^1 \left(\alpha^2 + \frac{2}{\alpha} - 3\right) dv.$$

Возьмем число δ, удовлетворяющее условиям $0 < \delta < \frac{1}{2}$, и разобьем промежуток интегрирования $(0, 1)$ на три множества E_0, E_1, E_2. В E_0 отнесем те точки, где $|\alpha - 1| < \delta$, в E_1 — точки, где $\alpha > 1 + \delta$ и в E_2 — точки, где $\alpha < 1 - \delta$. Для интегралов по множествам E_0, E_1 и E_2 в выражении ψ получаются следующие оценки:

$$\psi_0 \leqslant c'\delta, \quad \psi_1 \leqslant c''(mE_1)^{1/3}, \quad \psi_2 \leqslant c'''(mE_2)^{1/3},$$

где mE_1 и mE_2 — мера множеств E_1 и E_2. С другой стороны,

$$I > \bar{c}'\delta^2(mE_1), \qquad I > \bar{c}''\delta^2(mE_2).$$

Отсюда

$$\psi \leqslant c_1 \left(\frac{1}{\delta^2}\right)^{1/8} + c_0\delta.$$

Минимизируя правую часть неравенства по δ, находим

$$\psi \leqslant \tilde{c} I^{1/8}. \tag{4}$$

Теперь с помощью неравенств (2), (3), (4) без труда получается оценка (1).

Для того чтобы от неравенства (1) перейти к оценке $\tilde{\delta}$ в зависимости от ε, доказывается, что

$$\tilde{V}_{12} - \tilde{V}_i \leqslant c_i \varepsilon.$$

Эта оценка получается из интегрального представления для разностей $\tilde{V}_{12} - V_i$ через опорную и поверхностные функции.

Для оценки отклонения исходных поверхностей Φ_0 и Φ_1 поверхность Φ_0 подвергается преобразованию подобия с коэффициентом λ так, чтобы поверхности $\lambda\Phi_0$ и Φ_1 ограничивали равные объемы. Доказывается, что λ отличается от единицы на величину порядка ε. После этого отклонение $\delta(\varepsilon)$ поверхности Φ_0 от Φ_1 оценивается суммой отклонения Φ_0 от $\lambda\Phi_0$ и $\lambda\Phi_0$ от Φ_1. Такова в общих чертах схема доказательства теоремы 1.

Рассмотрим вопрос об устойчивости решения проблемы Кристоффеля. Этот вопрос решается довольно просто благодаря наличию явного выражения для опорной функции H поверхности через сумму главных радиусов кривизны $S = R_1 + R_2$. Такое выражение получено нами в § 1. Существуют и другие аналитические представления H через S. Например, имеет место следующее представление, найденное Вейнгартеном [22, стр. 251]:

$$H(n) = \frac{1}{4\pi} \int_\Omega S(\nu)(1 - n\nu)\ln(1 - n\nu)\, d\omega_\nu,$$

где n и ν — единичные векторы, а интегрирование выполняется по площади единичной сферы Ω.

Пусть $S(\nu)$ и $S'(\nu)$ — суммы главных радиусов кривизны замкнутых выпуклых поверхностей F и F' в точках с внешней нормалью ν. Тогда, согласно формуле Вейнгартена,

$$H(n) = \frac{1}{4\pi} \int_\Omega S(\nu)(1 - n\nu)\ln(1 - n\nu)\, d\omega_\nu,$$

$$H'(n) = \frac{1}{4\pi} \int_\Omega S'(\nu)(1 - n\nu)\ln(1 - n\nu)\, d\omega_\nu.$$

Пусть для каждого ν функции S и S' отличаются не более чем на $\varepsilon>0$. Тогда

$$|H(n)-H'(n)|\leqslant\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega}|S(\nu)-S'(\nu)|(1-n\nu)\ln(1-n\nu)\,d\omega_\nu\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{4\pi}\int\limits_{\Omega}(1-n\nu)|\ln(1-n\nu)|\,d\omega_\nu=\left(\ln 2-\frac{1}{4}\right)\varepsilon.$$

Теорема 2. *Если суммы $S(\nu)$ и $S'(\nu)$ главных радиусов кривизны замкнутых выпуклых поверхностей в точках с параллельными и одинаково направленными внешними нормалями отличаются не более чем на* ε, *т. е.*

$$|S(\nu)-S'(\nu)|\leqslant\varepsilon,$$

то в некотором расположении поверхностей их опорные функции $H(n)$ и $H'(n)$, рассматриваемые на единичной сфере, отличаются не более чем на $\left(\ln 2-\frac{1}{4}\right)\varepsilon$, т. е.

$$|H(n)-H'(n)|\leqslant\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)\varepsilon.$$

Глава VIII

Геометрическая теория уравнений Монжа — Ампера эллиптического типа

Многие вопросы геометрии в целом в их аналитическом истолковании приводят к вопросам существования и единственности решений дифференциальных уравнений. Примером может служить проблема изометрического погружения, которая сводится к рассмотрению уравнения Дарбу, проблема бесконечно малых изгибаний поверхности, где рассматривается некоторая линейная система уравнений, проблема существования и единственности выпуклой поверхности с заданной функцией главных радиусов кривизны и др. Многие геометрические вопросы в их аналитической трактовке приводят к уравнениям Монжа — Ампера. При этом геометрические результаты о существовании и единственности решения соответствующих задач можно толковать как теоремы о разрешимости этого уравнения и единственности решения.

В §§ 6 и 7 гл. VII были доказаны весьма общего содержания теоремы о существовании и единственности выпуклого многогранника с заданной монотонной функцией на гранях или заданной монотонной функцией углов в вершинах. Из этих теорем при специальном выборе монотонных функций и переходе к пределу получаются теоремы о существовании решения уравнения Монжа — Ампера общего вида. Эти решения возникают сначала как обобщенные, а затем доказывается их регулярность при условии достаточной регулярности коэффициентов уравнения. В итоге получаются общие теоремы о разрешимости краевых задач для уравнений Монжа — Ампера эллиптического типа в обычной (классической) постановке. Систематическому изложению результатов, которые получаются на указанном пути, и посвящается настоящая глава.

§ 1. Выпуклые многогранники с данной условной площадью граней и данной условной кривизной в вершинах

В §§ 6 и 7 гл. VII были доказаны общие теоремы существования выпуклых многогранников с заданной монотонной функцией на гранях и заданной монотонной функцией многогранных углов в вершинах. Простейшими такими функциями являются

площадь грани и кривизна в вершине. В настоящем параграфе эти две функции естественным образом обобщаются и теоремы существования для многогранников конкретизируются применительно к этим функциям.

Пусть $\sigma'(x, y, \zeta, p, q)$ — любая положительная, не убывающая по ζ непрерывная функция и α — любой многоугольник, плоскость которого задается уравнением

$$z = px + qy + \zeta.$$

Положим

$$\sigma(\alpha) = \iint\limits_{(\alpha)} \sigma'(x, y, \zeta, p, q)\, dx\, dy.$$

Определяемую таким образом функцию σ на многоугольниках будем называть условной площадью. Она совпадает с обычной площадью при

$$\sigma' = \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Положительность функции σ' и неубывание ее по ζ, очевидно, гарантируют монотонность условной площади σ в смысле определения, данного в § 6 гл. VII.

Нашей ближайшей задачей является доказательство теорем существования для случая, когда заданная на гранях многогранника функция является условной площадью. Мы хотим придать условиям этой теоремы форму некоторых требований, относящихся только к функции σ', задающей условную площадь. В связи с этим сделаем несколько замечаний.

Пусть в плоскости переменных p, q задан произвольный выпуклый многоугольник G. Поставим в соответствие каждой точке (p, q) многоугольника единичный вектор n с координатами

$$p/\sqrt{1 + p^2 + q^2}, \quad q/\sqrt{1 + p^2 + q^2}, \quad -1/\sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Концы векторов n заполнят на единичной сфере также выпуклый многоугольник, вершины которого соответствуют вершинам G. Геометрически это отображение плоскости pq на единичную сферу получается простым проектированием плоскости $\zeta = -1$ пространства $pq\zeta$ на единичную сферу $p^2 + q^2 + \zeta^2 = 1$ из центра сферы.

До сих пор положение плоскости грани многогранника

$$z = px + qy + \zeta$$

мы характеризовали внешней нормалью n и опорным числом h. Теперь мы будем ее характеризовать угловыми коэффициентами p, q, задающими направление плоскости, и свободным

членом ζ, который будем называть *возвышением* (или *снижением*) плоскости.

В терминах новых величин, определяющих положение плоскости, вопрос о существовании многогранника с бесконечными гранями, лежащими в заданных плоскостях, решается следующим образом. Если точки (p_k, q_k) плоскости pq являются вершинами выпуклого многоугольника, то всегда существует многогранник, бесконечные грани которого имеют угловые коэффициенты p_k, q_k, а возвышения — ζ_k, каковы бы ни были числа ζ_k. Этот многогранник представляет собой границу тела, определяемого пересечением полупространств

$$z \geqslant p_k x + q_k y + \zeta_k.$$

Обратимся теперь к теореме 1 § 6 гл. VII.

Пусть G — выпуклый многоугольник в плоскости pq, $\bar{A}_k(\bar{p}_k, \bar{q}_k)$ — его вершины, $A_k(p_k, q_k)$ — точки внутри многоугольника G и σ_k — положительные числа. Спрашивается, каким условиям должна удовлетворять функция σ', определяющая условную площадь σ, для того чтобы существовал выпуклый многогранник, обращенный выпуклостью в сторону $z<0$, бесконечные грани которого лежат в плоскостях $\bar{\alpha}_k$: $z=\bar{p}_k x+$ $+\bar{q}_k y+\bar{\zeta}_k$, конечные грани α_k имеют угловые коэффициенты p_k, q_k и условные площади σ_k. Очевидно, для этого достаточно гарантировать выполнение условий теоремы 1 § 6 гл. VII.

Пересечение полупространств

$$z \geqslant \bar{p}_k x+\bar{q}_k y+\bar{\zeta}_k$$

есть бесконечный выпуклый многогранник $\bar{P}$. Он не имеет конечных граней, а его бесконечные грани лежат в плоскостях $\bar{\alpha}_k$, причем каждая такая плоскость содержит одну из граней. Можно считать, что у многогранника $\bar{P}$ есть и конечные грани α_k (направлений p_k, q_k), только они вырождены. А так как при вырождении грани условная площадь обращается в нуль, то для многогранника $\bar{P}$ выполняется условие

$$\sigma(\alpha_k) < \sigma_k \qquad k=1, \ldots, n.$$

Пусть теперь многогранник P совпадает с $\bar{P}$ на бесконечности, т. е. имеет те же плоскости бесконечных граней, что и $\bar{P}$, и пусть он расположен над плоскостью $z=p_0 x+q_0 y+c$, где (p_0, q_0) — точка внутри многоугольника G. Тогда условная площадь его конечных граней α_k равна

$$\sigma_P = \sum_k \iint\limits_{(\alpha_k)} \sigma'(x, y, \zeta_k, p_k, q_k)\, dx\, dy.$$

Задача состоит в том, чтобы наложить на функцию σ' такие требования, при выполнении которых σ_P была бы больше $\sum \sigma_k$, если достаточно велико c.

Положим

$$\bar{\sigma}'(x, y) = \varliminf_{\substack{(p, q) \in G \\ \zeta \to \infty}} \sigma'(x, y, \zeta, p, q).$$

Тогда

$$\sigma_P \geqslant \int\limits_{(\Sigma \alpha_k)}\int \bar{\sigma}'(x, y)\, dx\, dy.$$

Если $c \to \infty$, то все $\zeta_k \to \infty$, а область интегрирования (по x, y) переходит во всю плоскость xy. Поэтому

$$\varliminf_{c \to \infty} \sigma_P \geqslant \int\limits_{(xy)}\int \bar{\sigma}'(x, y)\, dx\, dy,$$

где интегрирование в правой части неравенства распространяется на всю плоскость xy.

Отсюда мы заключаем, что для выполнения второго условия теоремы 1 § 6 гл. VII достаточно, чтобы

$$\int\limits_{(xy)}\int \bar{\sigma}'(x, y)\, dx\, dy > \sum_k \sigma_k.$$

И мы приходим к следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть G — выпуклый многоугольник в плоскости pq, $\bar{p}_k$, $\bar{q}_k$ — координаты его вершин, $\bar{\zeta}_k$ — любые числа, (p_k, q_k) — любые точки внутри многоугольника G, σ_k — любые положительные числа, σ — условная площадь, определяемая функцией σ', удовлетворяющей условию*

$$\int\limits_{(xy)}\int \bar{\sigma}'(x, y)\, dx\, dy > \sum_k \sigma_k,$$

где

$$\bar{\sigma}'(x, y) = \varliminf_{\substack{(p, q) \in G \\ \zeta \to \infty}} \sigma'(x, y, \zeta, p, q).$$

Тогда существует и притом единственный выпуклый многогранник, обращенный выпуклостью в сторону $z<0$, бесконечные грани которого лежат в плоскостях $z = \bar{p}_k x + \bar{q}_k y + \bar{\zeta}_k$, конечные грани имеют направления p_k, q_k и условные площади σ_k.

Пусть $\vartheta'(x, y, z, p, q)$ — любая положительная, не возрастающая по z непрерывная функция, V — произвольный многогранный угол, обращенный выпуклостью в сторону $z<0$, с вершиной (x, y, z), и α — его произвольная опорная плоскость

с угловыми коэффициентами p, q. Положим

$$\vartheta(V)=\iint\limits_{(V)}\vartheta'(x,\ y,\ z,\ p,\ q)\,dp\,dq,$$

где интегрирование выполняется по всем опорным плоскостям угла α. Положительность функции ϑ' и ее невозрастание по z обеспечивают монотонность функции ϑ угла V в смысле определения § 7 гл. VII. Эту функцию мы будем называть условной кривизной. Обычная кривизна получается, если положить

$$\vartheta'=1/\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Рассмотрим вопрос существования многогранника с данным краем, вершинами на данных прямых и заданными условными кривизнами в вершинах, т. е. сформулируем условия теоремы 1 § 7 гл. VII в форме эффективно проверяемых требований, относящихся к функции ϑ', задающей условную кривизну.

Итак, пусть замкнутая ломаная γ однозначно проектируется на плоскость xy в выпуклую ломаную, ограничивающую многоугольник G; $g_1,\ \ldots,\ g_n$ — прямые, параллельные оси z, пересекающие многоугольник G; $\vartheta_1,\ \ldots,\ \vartheta_n$ — положительные числа. Спрашивается, какова должна быть функция ϑ' для того, чтобы существовал многогранник с краем γ, однозначно проектирующийся на плоскость xy, обращенный выпуклостью в сторону $z<0$, с вершинами на прямых g_k и условными кривизнами ϑ_k в этих вершинах.

Возьмем выпуклую оболочку ломаной γ (наименьший выпуклый многогранник, содержащий γ). Та ее часть, которая обращена выпуклостью в сторону $z<0$, представляет собой многогранник с краем γ, не содержащий внутренних вершин. Можно считать, однако, что этот многогранник имеет вершины A_k на прямых g_k, но вырожденные. Для этого многогранника, следовательно,

$$\vartheta(A_k)\leqslant\vartheta_k,\qquad k=1,\ \ldots,\ n,$$

и первое условие теоремы 1 § 7 гл. VII всегда выполнено, какова бы ни была функция ϑ'.

Обратимся теперь ко второму условию. Сумма условных кривизн во всех вершинах многогранника P с краем γ и вершинами на прямых g_k равна

$$\vartheta_P=\sum_k\iint\limits_{(A_k)}\vartheta'(x_k,\ y_k,\ z_k,\ p,\ q)\,dp\,dq.$$

Положим

$$\bar\vartheta'(p,\ q)=\lim_{\substack{(x,\ y)\in G\\ z\to-\infty}}\vartheta'(x,\ y,\ z,\ p,\ q).$$

Тогда

$$\vartheta_P \geqslant \iint\limits_{(\Sigma A_k)} \overline{\vartheta}'(p, q)\, dp\, dq.$$

Пусть многогранник P пересекает плоскость $z = -c$. Тогда при $c \to \infty$ область интегрирования по p, q в неравенстве для ϑ_P неограниченно растет и переходит во всю плоскость pq. Отсюда мы и заключаем, что

$$\lim_{c \to \infty} \vartheta_P \geqslant \iint\limits_{(pq)} \overline{\vartheta}'(p, q)\, dp\, dq,$$

где интегрирование в правой части неравенства распространяется на всю плоскость pq.

Следовательно, для того чтобы удовлетворить второму условию теоремы 1 § 7 гл. VII, достаточно потребовать, чтобы

$$\iint\limits_{(pq)} \overline{\vartheta}(p, q)\, dp\, dq > \sum_k \vartheta_k,$$

и мы приходим к следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть замкнутая ломаная γ однозначно проектируется на плоскость xy в выпуклую ломаную, ограничивающую многоугольник G, $g_1, g_2, \ldots, g_n$ — прямые, параллельные оси z, пересекающие многоугольник G, $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ — любые положительные числа, ϑ — условная кривизна, определяемая функцией ϑ', удовлетворяющей условию*

$$\iint\limits_{(pq)} \overline{\vartheta}'(p, q)\, dp\, dq > \sum_k \vartheta_k,$$

где

$$\overline{\vartheta}'(p, q) = \lim_{\substack{(x,\, y) \in G \\ z \to -\infty}} \vartheta'(x, y, z, p, q).$$

Тогда существует и притом единственный выпуклый многогранник с краем γ, однозначно проектирующийся на плоскость xy, обращенный выпуклостью в сторону $z<0$, с вершинами на прямых g_k и условными кривизнами ϑ_k в этих вершинах.

Выясним теперь, каким условиям надо подчинить функцию ϑ', для того чтобы существовал бесконечный многогранник с данным предельным углом V, проектирующимся на всю плоскость xy и обращенным выпуклостью в сторону $z<0$, с вершинами на прямых g_k, параллельных оси z, и условными кривизнами в этих вершинах, равными ϑ_k.

Для выполнимости второго условия теоремы 4 § 7 гл. VII достаточно, чтобы

$$\iint\limits_{(V)} \tilde{\vartheta}'(p,\ q)\,dp\,dq > \sum_k \vartheta_k,$$

где интегрирование выполняется по области условного сферического изображения угла V, т. е. по множеству тех значений p, q, которые являются угловыми коэффициентами в уравнениях его опорных плоскостей.

Рассмотрим первое условие теоремы 4 § 7 гл. VII. Оно требует существования такого выпуклого многогранника с предельным углом V и вершинами A_k на прямых g_k, для которого

$$\vartheta(A_k) \leqslant \vartheta_k \qquad k = 1,\ \ldots,\ n.$$

Введем функцию

$$\tilde{\vartheta}'(p,\ q) = \varlimsup_{\substack{(x,\ y) \in g_k \\ z \to \infty}} \vartheta'(x,\ y,\ z,\ p,\ q).$$

Пусть

$$\iint\limits_{(V)} \tilde{\vartheta}'(p,\ q)\,dp\,dq < \sum_k \vartheta_k. \tag{*}$$

Покажем, что тогда может быть построен многогранник с предельным углом V, вершинами A_k на прямых g_k, удовлетворяющий условиям

$$\vartheta(A_k) \leqslant \vartheta_k \qquad k = 1,\ \ldots,\ n.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что вершина угла V находится в начале координат и ось z является одной из прямых g_k; обозначим ее g_0.

Сколь угодно малым увеличением функции $\tilde{\vartheta}'$ можно сделать ее положительной и продолжить на всю плоскость p, q положительной функцией, удовлетворяющей условию (*). Эту функцию мы будем обозначать по прежнему $\tilde{\vartheta}'$. Пусть число $\mu < 1$ определяется условием

$$\iint\limits_{(pq)} \tilde{\vartheta}'\,dp\,dq = \mu \sum \vartheta_k.$$

Пересечем угол V какой-нибудь плоскостью α так, чтобы в сечении получился многоугольник γ, охватывающий все прямые g_k. По теореме 2 существует многогранник P_ε с краем γ, вершинами на прямых g_k и условными кривизнами в них, определяемыми функцией ϑ', равными $(1-\varepsilon)\mu\vartheta_k$.

Допустим, при некотором ε вершина A_0 (на оси z) не выше точки O. Построим многогранник P, представляющий собой выпуклую оболочку вершин A_k многогранника P_ε и угла V. Этот многогранник имеет своими вершинами только точки A_k, причем многогранный угол P с вершиной A_k содержит многогранный угол P_ε с той же вершиной. Отсюда, принимая во внимание монотонность функции ϑ', заключаем, что для многогранника P

$$\vartheta(A_k) \leqslant (1-\varepsilon)\mu\vartheta_k < \vartheta_k.$$

Итак, если при каком-нибудь $\varepsilon>0$ существует многогранник P_ε с вершиной A_0 на отрицательной полуоси z, то может быть построен и многогранник P с предельным углом V, вершинами A_k на прямых g_k, удовлетворяющий условию $\vartheta(A_k) \leqslant \vartheta_k$.

Допустим теперь, что при $\varepsilon \to 0$ вершина A_0 многогранника P_ε остается на положительной полуоси z. Тогда в пределе при $\varepsilon \to 0$ мы получим многогранник P_0 с краем γ, вершинами на прямых g_k и условными кривизнами в этих вершинах, определяемыми функцией $\bar{\vartheta}'$ и равными $\mu\vartheta_k$. Отсюда

$$\iint\limits_{(P_0)} \tilde{\vartheta}'\, dp\, dq = \mu \sum_k \vartheta_k,$$

что невозможно, так как

$$\iint\limits_{(P_0)} \tilde{\vartheta}'\, dp\, dq < \iint\limits_{(pq)} \tilde{\vartheta}'\, dp\, dq = \mu \sum_k \vartheta_k.$$

(Интегрирование в левой части неравенства выполняется по условному сферическому изображению многогранника P_0.)

Теорема 3. *Пусть V — многогранный угол, проектирующийся на всю плоскость xy и обращенный выпуклостью в сторону $z<0$; $g_1, \ldots, g_n$ — прямые, параллельные оси z, $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ — положительные числа, ϑ — условная кривизна, определяемая функцией ϑ', удовлетворяющей условиям*:

1. $$\iint\limits_{(V)} \bar{\vartheta}'(p, q)\, dp\, dq > \sum_k \vartheta_k,$$

$$\bar{\vartheta}'(p, q) = \varlimsup_{\substack{(x, y) \in g_k \\ z \to -\infty}} \vartheta'(x, y, z, p, q).$$

2. $$\iint\limits_{(V)} \tilde{\vartheta}'(p, q)\, dp\, dq < \sum_k \vartheta_k,$$

$$\tilde{\vartheta}'(p, q) = \varlimsup_{\substack{(x, y) \in g_k \\ z \to \infty}} \vartheta'(x, y, z, p, q).$$

Тогда существует бесконечный выпуклый многогранник, однозначно проектирующийся на плоскость xy, обращенный выпуклостью в сторону $z<0$, с предельным углом V, вершинами на прямых g_k и условными кривизнами ϑ_k в этих вершинах.

Этот многогранник либо единственный, либо все они получаются сдвигом одного из них в направлении оси z. Единственность во всяком случае имеет место, если функция ϑ' строго монотонна по z.

Теорема 3а. *Если функция ϑ', определяющая условную кривизну ϑ, зависит только от p и q, то условия 1 и 2 теоремы 3 надо заменить условием*

$$\iint\limits_{(V)} \vartheta'(p, q)\,dp\,dq = \sum_k \vartheta_k.$$

Для доказательства этой теоремы возьмем в качестве функции ϑ' функцию

$$\vartheta'^* = (1 + \varepsilon f(z+c))\,\vartheta'(p, q),$$

где $f(z)$ — убывающая по z функция, равная 1 при $z=-\infty$ и -1 при $z=\infty$. По теореме 3 существует многогранник P^* с условными кривизнами ϑ^* в вершинах, равными ϑ_k и предельным углом V. Выбором параметра c можно распорядиться так, чтобы P^* проходил через начало координат. После этого достаточно сделать предельный переход при $\varepsilon \to 0$.

Рассмотрим вопрос о существовании замкнутого выпуклого многогранника с вершинами на данных лучах и заданными условными кривизнами в вершинах.

Пусть в пространстве определена положительная непрерывная функция ϑ' точки A и единичного вектора n, монотонная относительно смещения точки A в направлении OA, т. е. $\vartheta'(A, n) \leqslant \vartheta'(A', n)$, если $|OA| < |OA'|$.

Пусть теперь V — угол с вершиной A, содержащий точку O. Определим функцию ϑ угла V равенством

$$\vartheta(V) = \iint\limits_{\omega(V)} \vartheta'(A, n)\,dn,$$

где dn — элемент площади сферического изображения угла V, а интегрирование распространяется на сферическое изображение $\omega(V)$ угла V. Функция $\vartheta(V)$ является монотонной в смысле определения, данного в § 7 гл. VII. Мы будем называть ее условной кривизной. Она совпадает с обычной кривизной, если $\vartheta' \equiv 1$.

Теорема 4. *Пусть из точки O исходят лучи $g_1, \ldots, g_m$, причем не существует полупространства, содержащего все эти*

лучи, ϑ — условная кривизна, определяемая функцией ϑ', удовлетворяющей условию

$$\vartheta'(A,\ n) \to \infty \ \text{при}\ |OA| \to \infty,$$

$\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m$ — положительные числа, причем

$$\sum_k \vartheta_k > \int\limits_{\omega_0}\int \vartheta'(O,\ n)\, dn,$$

где интегрирование выполняется по единичной сфере с центром в точке O.

Пусть для всякого выпуклого многогранного угла V с вершиной O

$$\vartheta(V) < \sum{}' \vartheta_k,$$

где суммирование выполняется по всем лучам, расположенным вне угла V.

Тогда существует замкнутый выпуклый многогранник с вершинами на лучах g_k и условными кривизнами ϑ в этих вершинах, равными ϑ_k.

Этот многогранник либо единственный, либо все они подобны с центром подобия O. Вторая возможность исключается, если функция $\vartheta'(A,\ n)$ строго монотонна относительно смещения точки A по лучу OA.

Доказательство. Покажем, что для условной кривизны ϑ как функции угла выполняются условия теоремы 5 § 7 гл. VII.

Опишем около точки O сферу достаточно большого радиуса R. Она пересечет лучи g_k в точках A_k. Так как при $|OA| \to \infty$

$$\vartheta'(A_k n) \to \infty,$$

то при достаточно большом R выпуклый многогранник с вершинами A_k имеет условные кривизны в вершинах, большие ϑ_k.

Пусть теперь у многогранника P хотя бы одна вершина находится на расстоянии меньшем ε от точки O. Покажем, что если ε достаточно мало, то у многогранника P найдется такая вершина, в которой

$$\vartheta(V_k) < \vartheta_k.$$

Допустим, это неверно, тогда можно построить последовательность многогранников P, удовлетворяющих условиям

$$\vartheta(V_k) \geqslant \vartheta_k, \qquad k = 1,\ \ldots,\ m,$$

с вершинами, сколь угодно близкими к точке O. Не ограничивая общности, можно считать, что вершины многогранников P

сходятся, причем по крайней мере одна из них сходится к точке O. Все они сходиться к точке O не могут, так как

$$\iint_{\omega_0} \vartheta'(O, n)\, dn < \sum_k \vartheta_k.$$

Обозначим V выпуклую оболочку тех лучей g_k, вдоль которых вершины многогранников P не сходятся к O. Очевидно, среди многогранников P найдутся такие, у которых суммарная условная кривизна в вершинах на лучах g_k, проходящих вне угла V, сколь угодно близка к $\vartheta(V)$. А это противоречит условию теоремы

$$\vartheta(V) < \sum{}' \vartheta_k.$$

Итак, для функции ϑ выполнены условия теоремы 5 § 7 гл. VII, и, следовательно, теорема 4 вытекает из теоремы 5 § 7 гл. VII.

Теорема 2а. *Пусть из точки O исходят лучи $g_1, \ldots, g_m$, не принадлежащие одному полупространству, ϑ — условная кривизна, определяемая функцией ϑ', не зависящей от точки A (а только от единичного вектора n), $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m$ — положительные числа, удовлетворяющие условию*

$$\sum_k \vartheta_k = \iint_{\omega_0} \vartheta'(n)\, dn.$$

Пусть для всякого выпуклого многогранного угла V с вершиной O

$$\vartheta(V) < \sum{}' \vartheta_k,$$

где суммирование выполняется по всем лучам, расположенным вне угла V.

Тогда существует и притом единственный, с точностью до преобразования подобия относительно точки O, замкнутый выпуклый многогранник с вершинами на лучах g_k и условными кривизнами в вершинах, равными ϑ_k.

Доказательство. Пусть ε — малое положительное число. Определим функцию $\vartheta'_\varepsilon(A, n)$ следующим образом:

$$\vartheta'_\varepsilon(A, n) = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{2}|OA| - \frac{\varepsilon}{2}\right)\vartheta'(n) & \text{при} \quad |OA| < \varepsilon, \\ \vartheta'(n) & \text{при} \quad \varepsilon \leqslant |OA| \leqslant 1, \\ |OA|\,\vartheta'(n) & \text{при} \quad |OA| > 1. \end{cases}$$

Условную кривизну, определяемую этой функцией, будем обозначать ϑ_ε.

По теореме 2 существует многогранник P_ε с вершинами на лучах g_k и условными кривизнами ϑ_ε в этих вершинах, рав-

ными ϑ_k. Многогранник P_ε не может пересекать только одну из областей $|OA|<\varepsilon$ или $|OA|>1$, так как это противоречило бы условию теоремы

$$\sum \vartheta_k = \int\limits_{\omega_0}\int \vartheta'(n)\,dn.$$

Если допустить, что он пересекает каждую из указанных областей при сколь угодно малых ε, то мы приходим к противоречию с условием теоремы:

$$\vartheta(V) < \Sigma'\vartheta_k,$$

так же как и в доказательстве теоремы 2.

Остается предположить, что при достаточно малом ε многогранник P_ε располагается в области $\varepsilon \leqslant |OA| \leqslant 1$. А так как в этой области $\vartheta'_\varepsilon = \vartheta'$, то многогранник P_ε и есть тот, существование которого утверждается теоремой.

Утверждение единственности очевидно. Теорема доказана.

Теорема 2а для случая $\vartheta' \equiv 1$ (ϑ — обычная кривизна) была доказана А. Д. Александровым в цитированной выше работе [6].

§ 2. Выпуклые поверхности с заданной условной площадью и заданной условной кривизной

Понятие условной площади и условной кривизны легко распространяется на любые выпуклые поверхности. Подобно тому как для многогранников в § 1, здесь тоже можно ставить вопрос о существовании выпуклой поверхности с заданной условной площадью или заданной условной кривизной. При этом получаются теоремы, аналогичные теоремам существования для многогранников в § 1.

Пусть F — выпуклая поверхность, однозначно проектирующаяся на плоскость xy. Обозначим H произвольное множество точек плоскости xy, принадлежащее проекции поверхности F, $H(F)$ — множество точек поверхности, которое проектируется в H, и $\omega(H)$ — множество точек плоскости pq, координаты которых являются угловыми коэффициентами в уравнениях опорных плоскостей

$$z = px + qy + \zeta$$

поверхности F на множестве $F(H)$. Сопоставление множеству H плоскости xy множества $\omega(H)$ плоскости pq мы будем называть условным сферическим отображением.

Наряду с отображением ω мы будем рассматривать отображение $\bar{\omega}$ плоскости pq на плоскость xy. Именно, если $\bar{H}$ — произвольное множество, принадлежащее условному сферическому изображению поверхности F, то под $\bar{\omega}(\bar{H})$ мы будем понимать множество H плоскости xy, условное сферическое изображение каждой точки которого пересекается с $\bar{H}$.

Если поверхность F гладкая и строго выпуклая, т. е. с каждой опорной плоскостью имеет только одну общую точку, то отображения ω и $\bar{\omega}$ являются взаимно обратными гомеоморфизмами. В общем случае отображения ω и $\bar{\omega}$ переводят замкнутые множества в замкнутые, борелевские в борелевские.

Пусть, как и в § 1, $\sigma'(x, y, \zeta, p, q)$ — положительная, не убывающая по ζ непрерывная функция. Возьмем на условном сферическом изображении поверхности F (в плоскости pq) любое борелевское множество H и определим функцию множеств $\sigma(H)$ условием

$$\sigma(H) = \iint\limits_{\bar{\omega}(H)} \sigma'(x, y, \zeta(x, y), p(x, y), q(x, y))\, dx\, dy,$$

где $p(x, y)$, $q(x, y)$, $\zeta(x, y)$ — коэффициенты уравнения опорной плоскости поверхности F в точке, которая проектируется в точку (x, y) плоскости xy. Подынтегральная функция определена неоднозначно в тех случаях, когда опорная плоскость не единственная. Однако множество таких точек (x, y) имеет меру нуль, и следовательно, это не сказывается на функции σ. Функцию σ мы будем называть условной площадью.

Так как для любых двух попарно не пересекающихся борелевских множеств H_1 и H_2 множества $\bar{\omega}(H_1)$ и $\bar{\omega}(H_2)$ могут пересекаться только по множеству меры нуль, то из свойства аддитивности интеграла следует полная аддитивность условной площади на кольце борелевских множеств.

Пусть F_n — последовательность выпуклых поверхностей, сходящаяся к выпуклой поверхности F, σ_n и σ — условные площади поверхностей F_n и F, определяемые некоторой непрерывной положительной функцией $\sigma'(x, y, \zeta, p, q)$. Тогда, если H — замкнутое множество, то при $n \to \infty$

$$\overline{\lim}\, \sigma_n(H) \leqslant \sigma(H);$$

если H — открытое множество, то при $n \to \infty$

$$\underline{\lim}\, \sigma_n(H) \geqslant \sigma(H).$$

Оба эти свойства устанавливаются аналогично; мы докажем первое из них. Итак, пусть H — замкнутое множество.

Имеем

$$\sigma(H)=\iint\limits_{\bar{\omega}_F(H)} \sigma'(x,\ y,\ \zeta,\ p,\ q)\,dx\,dy,$$

$$\sigma_n(H)=\iint\limits_{\bar{\omega}_{F_n}(H)} \sigma'(x,\ y,\ \zeta_n,\ p_n,\ q_n)\,dx\,dy.$$

Так как H — замкиутое миожество, то при достаточио большом n множество $\bar{\omega}_{F_n}(H)$ содержится в сколь угодио малой окрестиости миожества $\bar{\omega}_F(H)$. Отсюда, прннимая во вннмаине ограничеииость фуикцни σ', нмеем

$$\sigma_n(H)-\sigma(H)=$$
$$=\iint\limits_{\bar{\omega}_F(H)} (\sigma'(x,\ y,\ \zeta_n,\ p_n,\ q_n)-\sigma'(x,\ y,\ \zeta,\ p,\ q))\,dx\,dy+\varepsilon_n,$$

где $\lim \varepsilon_n \leqslant 0$. Далее, так как множество тех точек плоскостн xy, условиое сферическое изображеиие которых ω_F иеоднозначно, нмеет меру нуль, то подыитегральная функция выраження $\sigma_n-\sigma$ прн $n\to\infty$ сходится к нулю по мере. Отсюда

$$\overline{\lim}\,\sigma_n(H)\leqslant\sigma(H).$$

Из отмечеиных свойств сходимостн условиых площадей для замкиутых и открытых миожеств H следует, что условные площадн поверхиостей F_n слабо сходятся к условиой площади F, т. е. для любой непрерывиой фуикции f, заданиой на плоскостн pq и равной нулю в окрестиости границы сферического изображеиня F,

$$\lim_{n\to\infty}\int f\,d\sigma_n=\int f\,d\sigma.$$

Пусть в строго выпуклой области G плоскостн pq задаиа вполне аддитивиая неотрицательиая фуикция миожеств λ. Мы хотнм построить бесконечиую выпуклую поверхиость F, нмеющую условное сферическое изображеиие G н условную площадь σ, равную λ, т. е. для любого борелевского миожества H из G должно быть

$$\sigma(H)=\lambda(H).$$

Для решения этой задачн впишем в G миогоугольник $\bar{G}$. Пусть $\bar{A}_k(\bar{p}_k,\ \bar{q}_k)$ — его вершнны и ζ_k — значения какой-нибудь непрерывной функции ζ, заданной на граннце G, в вершииах

многоугольника $\overline{G}$. Разобьем многоугольник $\overline{G}$ на малые области $\overline{G}_k$ и в каждой из них возьмем точку (p_k, q_k). Положим

$$\lambda(\overline{G}_k) = \sigma_k.$$

Построим теперь бесконечный многогранник P с бесконечными гранями направлений $\bar{p}_k$, $\bar{q}_k$, их возвышениями $\bar{\zeta}_k$, с конечными гранями направлений p_k, q_k и условными площадями этих граней σ_k. Это построение возможно, если функция σ', определяющая условную площадь σ, удовлетворяет условию теоремы 1 § 1, т. е. если

$$\int\limits_{(x,\, y)}\int \bar{\sigma}'(x, y)\, dx\, dy > \lambda(G),$$

где

$$\bar{\sigma}'(x, y) = \lim_{\substack{(p,\, q) \in G \\ \zeta \to \infty}} \sigma'(x, y, \zeta, p, q).$$

Пусть теперь стороны многоугольника $\overline{G}$, вписанного в G, и диаметры областей $\overline{G}_k$ неограниченно убывают. При этом многогранники P остаются ограниченными (в смысле ограниченности возвышения ζ опорных плоскостей), и из них можно выделить сходящуюся последовательность P_n.

Так как условные площади многогранников P_n, очевидно, слабо сходятся к функции множеств λ, а предел в смысле слабой сходимости, если он существует, определяется однозначно, то предельная выпуклая поверхность для последовательности многогранников P_n имеет условную площадь, равную λ. Таким образом, получается следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть в строго выпуклой области G плоскости pq задана вполне аддитивная неотрицательная функция множеств λ. Пусть σ — условная площадь, определяемая функцией σ', удовлетворяющей условию*

$$\int\limits_{(xy)}\int \bar{\sigma}'(x, y)\, dx\, dy > \lambda(G),$$

где

$$\bar{\sigma}'(x, y) = \lim_{\substack{\overline{(p,\, q)} \in G \\ \zeta \to \infty}} \sigma'(x, y, \zeta, p, q).$$

Тогда существует бесконечная выпуклая поверхность F с условным сферическим изображением G и условной площадью λ, т. е. для любого борелевского множества H из G

$$\sigma(H) = \lambda(H).$$

Пусть F — выпуклая поверхность, однозначно проектирующаяся в область G на плоскость xy, и $\vartheta'(x, y, z, p, q)$ — поло-

жительная, не возрастающая по z непрерывная функция. Возьмем на плоскости xy произвольное измеримое множество H, принадлежащее G, и определим функцию множеств $\vartheta(H)$ равенством

$$\vartheta(H)=\iint\limits_{\omega(H)} \vartheta'(x(p, q), y(p, q), z(p, q), p, q)\,dp\,dq,$$

где $x(p, q)$, $y(p, q)$, $z(p, q)$ — координаты точки поверхности F, которая имеет опорную плоскость с угловыми коэффициентами p, q. Подынтегральная функция выражения $\vartheta(H)$ определена неоднозначно в тех случаях, когда опорная плоскость имеет с поверхностью более одной общей точки. Но мера множества таких опорных плоскостей равна нулю, и, следовательно, указанная неоднозначность не влияет на функцию ϑ. Функцию ϑ будем называть условной кривизной поверхности.

Подобно тому как для условной площади поверхности, устанавливаются следующие свойства условной кривизны:

1. Условная кривизна является вполне аддитивной неотрицательной функцией на кольце борелевских множеств.

2. Если последовательность выпуклых поверхностей F_n сходится к выпуклой поверхности F, то условные кривизны F_n слабо сходятся к условной кривизне F.

Пусть G — любая строго выпуклая область плоскости xy и $\mu(H)$ — вполне аддитивная, неотрицательная функция множеств, определенная в G. Мы хотим построить выпуклую поверхность F, которая однозначно проектировалась бы на область G и имела бы условную кривизну ϑ, равную μ.

Для решения этой задачи возьмем произвольный замкнутый контур γ, однозначно проектирующийся в край области G, и впишем в него ломаную $\bar{\gamma}$ с малыми звеньями. Эта ломаная проектируется на плоскость xy в выпуклую ломаную, ограничивающую многоугольник $\bar{G}$. Многоугольник $\bar{G}$ разобьем на малые области $\bar{G}_k$ и возьмем в каждой из них точку A_k. Обозначим $\vartheta_k=\mu(\bar{G}_k)$.

Построим теперь многогранник P с краем $\bar{\gamma}$, вершинами на прямых g_k, проходящих через точки A_k параллельно оси z, и условными кривизнами в этих вершинах, равными ϑ_k. Это возможно, если функция ϑ', определяющая условную кривизну, удовлетворяет условию

$$\iint\limits_{(pq)} \bar{\vartheta}'(p, q)\,dp\,dq > \mu(G),$$

где

$$\bar{\vartheta}'(p, q)=\lim_{\substack{(x,\, y)\in G \\ z\to-\infty}} \vartheta'(x, y, z, p, q).$$

Пусть звенья ломаной $\bar{\gamma}$ и размеры областей $\bar{G}_k$ неограниченно убывают. Так как многогранники P равномерно ограничены, то, не ограничивая общности, можно считать, что они сходятся к некоторой выпуклой поверхности F, которая проектируется в область G плоскости xy.

Так как условные кривизны многогранников P слабо сходятся к функции множеств μ, то предельная поверхность F имеет условную кривизну ϑ, равную μ. И мы приходим к следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть G — строго выпуклая область плоскости xy, μ — вполне аддитивная, неотрицательная функция множеств в области G, ϑ — условная кривизна, определяемая функцией ϑ', удовлетворяющей условию*

$$\iint\limits_{(pq)} \bar{\vartheta}'(p, q)\, dp\, dq > \mu(G),$$

где

$$\bar{\vartheta}'(p, q) = \varlimsup_{\substack{(x,\, y) \in G \\ z \to -\infty}} \vartheta'(x, y, z, p, q).$$

Тогда существует выпуклая поверхность F, которая прямыми, параллельными оси z, проектируется в область G, обращена выпуклостью в сторону $z<0$ и имеет условную кривизну ϑ, равную μ, т. е. для любого борелевского множества H из G

$$\vartheta(H) = \mu(H).$$

Эта теорема для случая обычной кривизны впервые доказана А. Д. Александровым [6], а также автором [65], для случая $\vartheta' = \vartheta'(p, q)$ — И. Я. Бакельманом [19], а в общем случае $(\vartheta' = \vartheta'(x, y, z, p, q))$ — также А. Д. Александровым [8].

Замечание. Хотя поверхность F и получена как предел многогранников, ограниченных ломаными, сходящимися к кривой γ, но эта кривая может не быть краем поверхности F. Однако имеет место следующая теорема, доказанная И. Я. Бакельманом [19].

Теорема 2а. *Если $\vartheta' = \vartheta'(p, q)$, то среди выпуклых поверхностей с условной кривизной ϑ, равной μ, и краем, расположенным не выше кривой γ, есть поверхность, расположенная над всеми остальными.*

Доказательство этой теоремы в общих чертах состоит в следующем. Заменяем функцию μ функцией μ_ε, которая совпадает с μ всюду в G, кроме ε-окрестности границы G, где она равна нулю. С помощью конструкции, примененной в доказательстве теоремы 2, строим поверхность F_ε с условной кривизной ϑ, равной μ_ε. Эта поверхность имеет краем кривую γ. Можно по-

казать, что поверхность F_ε находнтся над поверхностью F. Переходя к пределу прн $\varepsilon \to 0$, получаем поверхность F_0 с указаннымн в теореме свойствамн.

Пусть F — бесконечная выпуклая поверхность, не являющаяся цилнндром, н S — точка внутри тела, ограннченного поверхностью F. Совокупность лучей, нсходящнх нз S н не пересекающнх поверхность F, заполняет некоторый конус V (он может вырождаться). Конус V, а также любой равный н параллельно расположенный ему конус называется предельным конусом поверхностн F.

Пусть в плоскостн xy задана вполне аддитнвная функцня множеств μ, неотрнцательная в выпуклой области G н равная нулю вне этой областн. Пусть V — выпуклый конус, однозначно проектнрующнйся на плоскость xy н обращенный выпуклостью в сторону $z<0$.

Постронм бесконечную выпуклую поверхность с предельным конусом V и условной крнвнзной ϑ, равной μ. Для этого впишем в конус V многогранный угол $\bar{V}$ с малымн плоскими угламн, разобьем область G на малые областн G_k н в каждой нз ннх возьмем точку A_k. Постронм теперь выпуклый многограннnк P с предельным углом $\bar{V}$, вершннами на прямых g_k, проходящих через точки A_k параллельно осн z, н условнымн крнвизнамн в этнх вершнпах $\vartheta_k = \mu(G_k)$.

Такой многогранннк существует, еслн для функцнн ϑ', определяющей условную крнвизну ϑ, выполняются условия

$$\iint\limits_{\omega(V)} \bar{\vartheta}'(p, q)\, dp\, dq > \mu(G), \qquad \iint\limits_{\omega(V)} \tilde{\vartheta}'(p, q)\, dp\, dq < \mu(G),$$

где

$$\bar{\vartheta}'(p, q) = \lim_{\substack{(x, y) \in G \\ z \to -\infty}} \vartheta'(x, y, z, p, q),$$

$$\tilde{\vartheta}'(p, q) = \overline{\lim_{\substack{(x, y) \in G \\ z \to \infty}}} \vartheta'(x, y, z, p, q).$$

Ввнду условнй, наложенных на функцню ϑ', многогранннкн P ограннчены в совокупностн в том смысле, что прн достаточно большом N все онн пересекают отрезок $-N \leqslant r \leqslant N$ осн z.

Пусть теперь плоские углы $\bar{V}$ н диаметры областей G_k неограннченно убывают. Тогда нз многогранннков P можно постронть последовательность, сходящуюся к некоторой выпуклой поверхностн F. Эта поверхность нмеет предельный конус V н условную крнвнзну ϑ, равную μ. Итак, доказана

Т е о р е м а 3. *Пусть в плоскости xy задана вполне аддитивная функция множеств μ, неотрицательная в выпуклой области*

G и равная нулю вне этой области. Пусть V — выпуклый конус, проектирующийся на всю плоскость xy и обращенный выпуклостью в сторону $z<0$.

Тогда, если функция ϑ', определяющая условную кривизну ϑ, удовлетворяет условиям

$$\iint\limits_{\omega(V)} \overline{\vartheta}'(p, q)\,dp\,dq > \mu(G), \quad \iint\limits_{\omega(V)} \tilde{\vartheta}'(p, q)\,dp\,dq < \mu(G), \qquad (*)$$

то существует бесконечная выпуклая поверхность F с предельным конусом V и условной кривизной ϑ, равной μ.

Теорема 3а. *В случае, когда функция ϑ', определяющая условную кривизну ϑ, зависит только от p и q, теорема 3 имеет место, если в ней условие $(*)$ заменить следующим:*

$$\iint\limits_{\omega(V)} \vartheta'(p, q)\,dp\,dq = \mu(G).$$

Эта теорема доказывается с помощью теоремы 3 так же, как и в случае многогранников (§ 1).

Теорема 3б. *Теорема* 3а *имеет место и в том случае, когда областью G является вся плоскость* [19].

Теорема 3б получается предельным переходом из теоремы 3а.

Пусть F — замкнутая выпуклая поверхность, содержащая внутри точку O — начало координат, а H — любое измеримое множество точек на поверхности. Назовем условной кривизной поверхности F на множестве H величину

$$\vartheta(H) = \iint\limits_{\omega(H)} \vartheta'(A, n)\,dn,$$

где A — точка множества H, n — внешняя нормаль к опорной плоскости в этой точке, а интегрирование производится по площади сферического изображения множества H.

Подобно тому как для условной площади поверхности в § 2, для определенной сейчас условной кривизны тоже устанавливаются следующие свойства:

1. Условная кривизна ϑ является неотрицательной, вполне аддитивной функцией на кольце борелевских множеств поверхности F.

2. Если последовательность выпуклых поверхностей F_n сходится к выпуклой поверхности F, то их условные кривизны, определяемые одной и той же функцией ϑ', слабо сходятся к условной кривизне поверхности F.

Теорема 4. *Пусть на единичной сфере ω_0 с центром O задана неотрицательная, вполне аддитивная функция множеств*

μ и пусть ϑ — условная кривизна, определяемая функцией ϑ', удовлетворяющей условиям

$$\vartheta'(A, n) \to \infty \quad \text{при} \quad |OA| \to \infty,$$

$$\mu(\omega_0) > \int_{\omega_0}\int \vartheta'(A, n)\, dn.$$

Тогда, если для любого конуса V (в том числе и вырождающегося) с вершиной в точке O

$$\vartheta(V) < \mu(\omega_0 - V),$$

где $(\omega_0 - V)$ — множество тех точек шара ω_0, которые лежат вне конуса V, то существует замкнутая выпуклая поверхность F, которая на произвольном борелевском множестве H имеет условную кривизну $\vartheta(H)$, равную $\mu(\overline{H})$, где $\overline{H}$ — проекция множества H на сферу ω_0 из ее центра (точки O).

Доказательство. Разобьем сферу ω_0 на малые области G_k и из центра сферы (точки O) проведем лучи g_k, пересекающие области G_k. Положим

$$\vartheta_k = \mu(G_k).$$

Если диаметры областей G_k достаточно малы, то для лучей g_k, условной кривизны ϑ и чисел ϑ_k выполнены условия теоремы 2а § 1. И следовательно, существует замкнутый выпуклый многогранник P с вершинами на лучах g_k и условными кривизнами в этих вершинах ϑ_k.

При неограниченном уменьшении максимального диаметра δ областей G_k построенный таким образом многогранник P не может бесконечно расти, так как в противном случае будет неограниченно расти его полная условная кривизна $\Sigma\vartheta_k$, а она равна $\mu(\omega_0)$.

Так как при $\delta \to 0$ многогранники P ограничены в совокупности, то из них можно выделить сходящуюся последовательность. Предельная поверхность F для этой последовательности многогранников содержит внутри точку O и имеет условную кривизну ϑ, равную μ.

Действительно, допустим, точка O находится на поверхности F (вне поверхности F она быть не может, так как ее содержит внутри каждый многогранник P). Пусть $\overline{V}$ — конус с вершиной O, расположенный вне поверхности F. Так как общая условная кривизна в тех вершинах многогранника P, которые расположены внутри конуса $\overline{V}$, при достаточно малом δ больше некоторого $c_0 > 0$, то обычная общая кривизна в этих вершинах больше некоторого $c_0' > 0$. Отсюда следует, что точка O на поверхности F является конической точкой.

Пусть V — касательный конус поверхности F в точке O. При достаточной близости многогранника P к поверхности F общая условная кривизна в тех вершинах, которые расположены вне конуса V, сколь угодно близка к $\vartheta(V)$ и $\mu(\omega_0 - V)$, а это невозможно, ибо по условию теоремы

$$\vartheta(V) < \mu(\omega_0 - V).$$

Мы пришли к противоречию. Итак, точка O расположена внутри поверхности F.

То, что условная кривизна ϑ поверхности F совпадает с заданной функцией множеств μ, следует из свойства слабой сходимости условных кривизн многогранников P к условной кривизне поверхности F. Теорема доказана.

Теорема 4а. *Пусть условная кривизна ϑ определяется функцией ϑ', зависящей только от n; μ — неотрицательная вполне аддитивная функция множеств на единичной сфере ω_0 с центром в начале координат O, удовлетворяющая условиям:*

1. $\displaystyle\iint\limits_{\omega_0} \vartheta'(n)\, dn = \mu(\omega_0).$

2. *Для каждого конуса V с вершиной в начале координат O*

$$\vartheta(V) < \mu(\omega_0 - V),$$

где $(\omega_0 - V)$ — множество тех точек шара ω_0, которые лежат вне конуса V.

Тогда существует замкнутая выпуклая поверхность F, которая на произвольном борелевском множестве H имеет условную кривизну $\vartheta(H)$, равную $\mu(\overline{H})$, где $\overline{H}$ — проекция множества H на сферу ω_0 из ее центра O.

Эта теорема доказывается с помощью теоремы 4 так же, как теорема 2а с помощью теоремы 2. Мы опустим это доказательство.

§ 3. Условные решения уравнения Монжа — Ампера $rt - s^2 = \varphi(x, y, z, p, q)$. Краевые задачи для условных решений

Теоремы существования выпуклых поверхностей с данной условной площадью и данной условной кривизной при известной регулярности последних в аналитическом истолковании устанавливают существование решений уравнений Монжа — Ампера вида

$$rt - s^2 = \varphi(x, y, z, p, q).$$

Этим обстоятельством мы воспользуемся при решении различных краевых задач для такого уравнения.

Пусть F — выпуклая поверхность, однозначно проектирующаяся в область G плоскости xy и обращенная выпуклостью в сторону $z<0$, ϑ — условная кривизна поверхности, определяемая положительной непрерывной функцией $\vartheta'(x, y, z, p, q)$, и μ — вполне аддитивная функция множеств, заданная при помощи положительной непрерывной функции $\mu'(x, y)$ равенством

$$\mu(H)=\int_H\int \mu'(x, y)\,dx\,dy.$$

Согласно определению, поверхность F имеет условную кривизну ϑ, равную μ, если для любого борелевского множества H из G

$$\int_{\omega(H)}\int \vartheta'(x, y, z, p, q)\,dp\,dq=\int_{(H)}\int \mu'(x, y)\,dx\,dy. \qquad (*)$$

Аналогнчно поверхность F имеет условную площадь σ, определяемую функцией $\sigma'(x, y, \zeta, p, q)$ и равную

$$\lambda=\int\int \lambda'(p, q)\,dp\,dq,$$

если для любого борелевского множества H точек условного сфернческого изображения поверхности

$$\int_{\bar{\omega}(H)}\int \sigma'(x, y, \zeta, p, q)\,dx\,dy=\int_{(H)}\int \lambda'(p, q)\,dp\,dq.$$

Если F является дважды непрерывно дифференцнруемой поверхностью, то условню $(*)$ можно придать следующую эквнвалентную форму:

$$\vartheta'(x, y, z, p, q)(rt-s^2)=\mu'(x, y), \qquad (**)$$

где r, s, t обозначают вторые производные функцни z. Такнм образом, функцня $z(x, y)$, задающая поверхность F, удовлетворяет уравнению Монжа — Ампера $(**)$.

В связи с этим *условным* (*или обобщенным*) решением уравнення Монжа — Ампера $(**)$ мы будем называть любую выпуклую функцию $z(x, y)$, которая задает выпуклую поверхность с условной кривнзной ϑ, равной μ.

Аналогично в случае поверхности с данной условной площадью мы приходим к уравнению для функции ζ

$$\sigma'(\zeta_p, \zeta_q, \zeta, p, q)(\zeta_{pp}\zeta_{qq}-\zeta_{pq}^2)=\lambda'(p, q)$$

и соответственно получаем возможность определить условное решение этого уравнения через функцию ζ, задающую поверхность с данной условной площадью *).

Поверхность F, задаваемая условным решением $z(x, y)$ уравнения (**), является поверхностью положительной ограниченной удельной кривизны. Действительно, пусть A — произвольная точка области G и H — любая окрестность этой точки. Так как

$$\iint\limits_{\omega(H)} \vartheta' \, dp \, dq = \iint\limits_{(H)} \mu' \, dx \, dy,$$

то из непрерывности и положительности функций ϑ', μ' следует, что при $H \to A$ отношение

$$\iint\limits_{\omega(H)} dp \, dq \Big/ \iint\limits_{H} dx \, dy$$

остается в положительных пределах. А это значит, что поверхность F имеет положительную ограниченную удельную кривизну.

Выпуклая поверхность с ограниченной положительной удельной кривизной является гладкой и строго выпуклой (§ 3 гл. II). Таким образом, условное решение уравнения (**) является гладкой, строго выпуклой функцией.

Выпуклая поверхность F почти всюду дважды дифференцируема. Так как она имеет ограниченную удельную кривизну, то по теореме А. Д. Александрова [5] функция $rt - s^2$ почти всюду ограничена и

$$\iint\limits_{H} (rt - s^2) \, dx \, dy = \iint\limits_{\omega(H)} dp \, dq.$$

Следовательно, без каких-либо априорных предположений о регулярности поверхности F уравнение (**) условным решением удовлетворяется почти везде, и условное решение уравнения (**) можно определить как такую функцию $z(x, y)$, задающую выпуклую поверхность ограниченной удельной кривизны, для которой это уравнение удовлетворяется почти всюду.

Аналогичные выводы можно сделать, рассматривая условное решение уравнения Монжа — Ампера в связи с поверхностями с данной условной площадью.

Сформулируем теоремы существования условных решений, соответствующие теоремам предыдущего параграфа.

*) Здесь речь идет о задании поверхности F уравнением в тангенциальных координатах p, q, ζ.

Теорема 1. *Пусть в выпуклой области G плоскости xy рассматривается уравнение Монжа — Ампера*

$$\vartheta'(x, y, z, p, q)(rt-s^2)=\mu'(x, y)$$

с непрерывными коэффициентами, удовлетворяющими условиям:

1. *Обе функции ϑ' и μ' положительны, причем функция ϑ' не возрастающая по z.*

2. $\displaystyle\iint_{(pq)} \bar{\vartheta}'(p, q)\,dp\,dq > \iint_G \mu'(x, y)\,dx\,dy,$

где

$$\bar{\vartheta}'(p, q)=\lim_{\substack{\overline{(x, y)\in G}\\ z\to-\infty}} \vartheta'(x, y, z, p, q).$$

Тогда в области G существует условное решение рассматриваемого уравнения.

Как следствие отсюда получается следующая теорема.

Теорема 1а. *Уравнение Монжа — Ампера*

$$rt-s^2=\varphi(x, y, z, p, q)>0$$

в выпуклой области G имеет условное решение, если функция φ не убывающая по z и при $p^2+q^2\to\infty$ имеет порядок роста не более чем p^2+q^2.

Пусть в строго выпуклой области G плоскости xy рассматривается уравнение Монжа — Ампера

$$\vartheta'(x, y, z, p, q)(rt-s^2)=\mu'(x, y).$$

Пусть функции μ' и ϑ' непрерывны, положительны и функция ϑ' — не возрастающая по z. Мы хотим построить условное решение $z(x, y)$ этого уравнения в области G, которое на границе области совпадало бы с заданной непрерывной функцией h (задача Дирихле).

Обозначим γ непрерывную кривую, проектирующуюся в границу области G и задаваемую функцией h. Условное решение, существование которого устанавливается теоремой 1, было получено нами как предел многогранников P, края которых сходятся к любой наперед заданной непрерывной кривой, однозначно проектирующейся в границу области G. Не ограничивая общности, будем считать, что этой кривой является наша кривая γ.

Предельная поверхность F для многогранников P может иметь край $\bar{\gamma}$, отличный от γ. И можно утверждать только, что кривая $\bar{\gamma}$ расположена не выше γ. (Как всегда, предполагается, что многогранники P обращены выпуклостью в сторону $z<0$.)

Задача заключается в том, чтобы подчинить функции ϑ', μ' и область G таким условиям, при которых несовпадение кривых $\bar{\gamma}$ и γ исключалось бы.

Пусть кривая $\bar{\gamma}$ не совпадает с γ и $\bar{Q}$, Q — различные точки этих кривых, имеющие одну и ту же проекцию на плоскость xy (точка Q выше точки $\bar{Q}$). Возьмем на отрезке $Q\bar{Q}$ точку Q', а на его продолжении за точкой $\bar{Q}$ — точку Q'', близкую к $\bar{Q}$. Проведем через точку Q'' горизонтальную плоскость β'', а через точку Q' — плоскость β', которая получается из опорной плоскости цилиндра Z, проектирующего область G, в точке Q' путем поворота ее около горизонтальной прямой на малый угол α. (Плоскость xy мы предполагаем горизонтальной.) Цилиндр Z, плоскости β' и β'' ограничивают некоторое выпуклое тело K.

При достаточной близости многогранника P к поверхности F он пересекается с телом K. Обозначим P_K ту часть многогранника, которая содержится внутри тела K. Мы хотим найти такие условия, налагаемые на область G и функции μ', ϑ', при которых равенство

$$\iint\limits_{(P_K)} \vartheta'\, dp\, dq = \iint\limits_{(P_K)} \mu'\, dx\, dy$$

было бы невозможно при достаточно малом α. Эти условия исключают возможность несовпадения кривых γ и $\bar{\gamma}$ и, таким образом, являются условиями разрешимости задачи Дирихле для рассматриваемого уравнения.

Пусть β'_K — общая часть плоскости β' и тела K. Обозначим V конус с вершиной в точке $\bar{Q}$, проектирующий область β'_K. При достаточной близости многогранника P к F условное сферическое изображение его части P_K почти покрывает условное сферическое изображение конуса V, а в пределе при $P \to F$ оно покрывает его полностью.

Пусть β''_K — общая часть тела K и плоскости β''. Очевидно, проекция β''_K на плоскость xy покрывает проекцию P_K.

Предположим теперь, что область G и функции ϑ', μ' таковы, что для любой выпуклой поверхности Φ, а следовательно и для многогранников P, при достаточно малом α

$$\iint\limits_{\omega(V)} \vartheta'\, dp\, dq >> \iint\limits_{\beta''_K} \mu'\, dx\, dy.$$

Тогда точки Q и $\bar{Q}$ не могут быть различными, и мы получаем условие разрешимости задачи Дирихле. Полученное условие

трудно обозримо и трудно проверяемо. Поэтому мы заменим его более простыми условиями, правда, более сильными. Эти условия для области G будут относиться к кривизне ограничивающей ее кривой, а для функции ϑ' — к порядку убывания при $p^2+q^2 \to \infty$.

Пусть кривая, ограничивающая область G, имеет ограниченную снизу положительным числом удельную кривизну. Это значит, что отношение угла между опорными прямыми в любых двух близких точках кривой к расстоянию между этими точками больше некоторого $c_0>0$. Для краткости мы будем говорить, что такая кривая имеет положительную кривизну.

Построим круговой цилиндр $\bar{Z}$, имеющий одной из своих образующих прямую $Q\bar{Q}$ и охватывающий цилиндр Z. Если мы при построении конуса V возьмем не цилиндр Z, а круговой цилиндр $\bar{Z}$, то получим конус $\bar{V}$ с той же вершиной, содержащий V. Следовательно, $\omega(\bar{V}) \subset \omega(V)$ и

$$\iint_{\omega(\bar{V})} \vartheta'\, dp\, dq \leqslant \iint_{\omega(V)} \vartheta'\, dp\, dq.$$

Нетрудно было бы исследовать условное сферическое изображение $\omega(\bar{V})$ конуса $\bar{V}$. При этом для удобства можно, не ограничивая общности, считать, что прямая $Q\bar{Q}$ является осью z, а цилиндр $\bar{Z}$ расположен в полупространстве $y \leqslant 0$. Соответствующие выкладки показывают, что $\omega(\bar{V})$ содержит равнобедренный треугольник Δ в плоскости pq с вершинами

$$\left(\frac{\varepsilon}{\alpha}, 0\right), \quad \left(\frac{c'}{\alpha}, -\frac{c''}{\sqrt{\alpha}}\right), \quad \left(\frac{c'}{\alpha}, \frac{c''}{\sqrt{\alpha}}\right),$$

где ε, c' и c'' имеют положительные пределы при $\alpha \to 0$ а ε/c' сколь угодно мало, если достаточно мало отношение отрезков $Q''\bar{Q}/Q'\bar{Q}$.

Пусть теперь функция $\vartheta'(x, y, z, p, q)$ при $p^2+q^2 \to \infty$ убывает не быстрее чем $(p^2+q^2)^{-k}$, т. е.

$$\vartheta'(x, y, z, p, q) > \frac{c_0}{(p^2+q^2)^k} \quad \text{при} \quad p^2+q^2 \to \infty.$$

Тогда, принимая во внимание, что $\omega(\bar{V})$ содержит треугольник Δ, заключаем, что при $\alpha \to 0$

$$\iint_{\omega(\bar{V})} \vartheta'\, dp\, dq > \frac{a\sqrt{\alpha}}{(2k-1)(2k-2)} \left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)^{2k-2},$$

где a — некоторая постоянная.

Так как удельная кривизна ограничивающей область кривой ограничена снизу положительным числом, то при $\alpha \to 0$

$$\iint\limits_{\beta''_K} \mu' \, dx \, dy < b\alpha^{3/2},$$

где b — некоторая постоянная.

Пусть теперь $k \leqslant 3/2$. Тогда при достаточно малом ε, что достигается выбором точек Q', Q'', и при $\alpha \to 0$ будем иметь

$$\iint\limits_{\omega(\widetilde{V})} \vartheta' \, dp \, dq > \iint\limits_{\beta''_K} \mu' \, dx \, dy.$$

Следовательно, при $\alpha \to 0$

$$\iint\limits_{(P_K)} \vartheta' \, dp \, dq > \iint\limits_{(P_K)} \mu' \, dx \, dy.$$

Таким образом, для того чтобы предельная поверхность F последовательности многогранников P имела краем кривую γ (т. е. чтобы кривые $\overline{\gamma}$ и γ совпадали), достаточно выполнения двух условий:

1. Граница области G должна иметь ограниченную снизу положительным числом удельную кривизну.

2. При $p^2+q^2 \to \infty$ функция ϑ' должна иметь порядок убывания не более $(p^2+q^2)^{-3/2}$, т. е. при $p^2+q^2 \to \infty$

$$\vartheta'(x, y, z, p, q) > \frac{c}{(p^2+q^2)^{3/2}}.$$

Теперь с помощью теоремы 1 получается следующая теорема о разрешимости задачи Дирихле.

Теорема 2. *Пусть в выпуклой области G плоскости xy задано уравнение Монжа — Ампера*

$$\vartheta'(x, y, z, p, q)(rt-s^2) = \mu'(x, y),$$

причем выполняются следующие условия:

1. *Кривая, ограничивающая область G, имеет положительную кривизну.*

2. *Функции μ' и ϑ' непрерывны и положительны. Функция ϑ' не возрастающая по z и*

$$\iint\limits_{(p,\,q)} \overline{\vartheta}(p, q) \, dp \, dq > \iint\limits_{G} \mu'(x, y) \, dx \, dy,$$

где

$$\overline{\vartheta}(p, q) = \lim_{\substack{(x, y) \in G \\ z \to -\infty}} \vartheta'(x, y, z, p, q).$$

3. *В каждой точке границы области G при любом конечном z и $p^2+q^2 \to \infty$*

$$\vartheta'(x,\ y,\ z,\ p,\ q) > \frac{c}{(p^2+q^2)^{3/2}} \qquad (c>0).$$

Тогда задача Дирихле для этого уравнения разрешима для любой непрерывной функции, заданной на границе области G.

Как следствие теоремы 1а и теоремы 2 получается следующая теорема.

Теорема 2а. *Задача Дирихле для уравнения*

$$rt-s^2=\varphi(x,\ y,\ z,\ p,\ q)$$

в выпуклой области G разрешима при любых непрерывных граничных значениях, если выполняются условия:

1. *Кривизна кривой, ограничивающей область G, положительна.*

2. *Функция φ непрерывна, положительна, не убывающая по z и при $p^2+q^2 \to \infty$ имеет порядок роста не более чем p^2+q^2.*

Пусть в плоскости p, q уравнением $\psi(p, q)=0$ задается выпуклая замкнутая кривая. Рассмотрим вопрос о существовании решения уравнения

$$\vartheta'(x,\ y,\ z,\ p,\ q)(rt-s^2)=\mu'(x,\ y)$$

в конечной выпуклой области G при краевом условии $\psi(p, q)=$ $=0$. Построение такого решения составляет содержание *второй краевой задачи.*

Плоскости направлений $p,\ q$, удовлетворяющих уравнению $\psi(p,\ q)=0$, проходящие через начало координат, огибают некоторый выпуклый конус V. При известных условиях, относящихся к функциям ϑ' и μ', существует последовательность многогранников P, сходящихся к выпуклой поверхности F с условной кривизной ϑ, равной μ (§ 2). Что касается предельных углов этих многогранников, то их произволом можно распорядиться так, чтобы они сходились к конусу V.

Обозначим G^* выпуклую область плоскости pq, ограниченную кривой $\psi(p,\ q)=0$. Пусть функции μ' и ϑ' при $(x,\ y)\in G$ и $(p,\ q)\in G^*$ удовлетворяют условию $\mu'/\vartheta'<\infty$. Тогда предельная поверхность F последовательности многогранников P является гладкой.

В самом деле, поверхность F имеет ограниченную удельную кривизну. По теореме А. Д. Александрова нарушение гладкости поверхности ограниченной удельной кривизны может происходить только по прямолинейному отрезку с концами на краю поверхности. Но поверхность F бесконечна. Поэтому нарушение гладкости может происходить только по целой прямой. А выпуклая бесконечная поверхность, содержащая хотя бы

одиу прямую, является цнлнидром. Поверхиость F ие может быть цнлнидром, так как имеет отличиую от иуля крнвизну. Итак, поверхность F гладкая.

Поверхиость F состонт нз двух частей — конечной, проектнрующейся в область G плоскостн xy (мы обозначнм ее F_1), н оставшейся бесконечной частн F_2. Поверхиость F_2 является развертывающейся поверхностью. Через каждую точку поверхности F_2 проходнт прямолннейная образующая со стацноиарной касательной плоскостью. Поэтому направлеиня касательных плоскостей p, q поверхиости F_2 удовлетворяют уравнеиию $\psi(p, q) = 0$. По иепрерывностн этому уравненню удовлетворяют направления p, q касательиых плоскостей вдоль края поверхности F_1. Следовательио, обобщеииое решеиие в областн G, определяемое поверхиостью F_1, удовлетворяет краевому условню $\psi(p, q) = 0$.

Т е о р е м а 3. *Пусть в конечной выпуклой области G плоскости xy задано уравнение Монжа — Ампера*

$$\vartheta'(x, y, z, p, q)(rt - s^2) = \mu'(x, y),$$

и пусть G^* — конечная выпуклая область в плоскости pq, граница которой задается уравнением $\psi(p, q) = 0$.

Пусть коэффициенты ϑ' и μ' уравнения удовлетворяют условиям:

1. *Функции μ' и ϑ' положительны и непрерывны при $(x, y) \in G$, $(p, q) \in G^*$, ϑ' не возрастает по z и $\mu'/\vartheta' < \infty$.*

2. $\displaystyle\iint_{G^*} \overline{\vartheta}'\,dp\,dq > \iint_G \mu'\,dx\,dy,\ \overline{\vartheta}' = \varliminf_{\substack{(x, y) \in G \\ z \to -\infty}} \vartheta'(x, y, z, p, q).$

3. $\displaystyle\iint_{G^*} \tilde{\vartheta}'\,dp\,dq < \iint_G \mu\,dx\,dy,\ \tilde{\vartheta}' = \varlimsup_{\substack{(x, y) \in G \\ z \to \infty}} \vartheta'(x, y, z, p, q).$

Тогда существует условное решение уравнения $\vartheta'(rt - s^2) = \mu'$ в области G, которое удовлетворяет граничному условию $\psi(p, q) = 0$ и обращено выпуклостью в сторону $z < 0$.

Пусть теперь функцня ϑ' зависит только от p н q. Покажем, что в этом случае теорема 3 имеет место, если условня 2 н 3 замеинть условнем

$$\iint_{G^*} \vartheta'(p, q)\,dp\,dq = \iint_G \mu'(x, y)\,dx\,dy.$$

Сместим коиус V на отрезок N в иаправлеиии $z > 0$ н обозначнм его в этом положенин V_N. Пусть $\overline{V}$ н $\overline{V}_N$ — областн простраиства вие конуса V н виутрн коиуса V_N, соответствеиио проектирующиеся в область G плоскостн xy. Возьмем теперь вместо фуикции ϑ' функцню ϑ'', равиую ϑ' вие областей $\overline{V}$ и $\overline{V}_N$,

большую ϑ' в $\overline{V}$ и меньшую ϑ' в $\overline{V}_N$. Для функции ϑ'' условия теоремы 3 выполняются. И мы получаем решение второй краевой задачи для уравнения

$$\vartheta''(rt-s^2)=\mu'.$$

Поверхность $F_{\vartheta''}$, определяющая это решение, при достаточно большом N обязательно пересекает отрезок ON оси z, соединяющий вершины конусов V и V_N. В противном случае она пересекает одну из областей $\overline{V}$ или $\overline{V}_N$, и равенство

$$\iint\limits_{G^*} \vartheta''\,dp\,dq=\iint\limits_{G} \mu'\,dx\,dy$$

противоречит принятому условию

$$\iint\limits_{G^*} \vartheta'\,dp\,dq=\iint\limits_{G} \mu'\,dx\,dy.$$

Так как поверхность $F_{\vartheta''}$ пересекает отрезок ON, то, не ограничивая общности, можно считать, что при $\vartheta''\to\vartheta'$ поверхность $F_{\vartheta''}$ сходится к некоторой поверхности $F_{\vartheta'}$. Эта поверхность определяет решение уравнения

$$\vartheta'(p,\ q)(rt-s^2)=\mu'(x,\ y),$$

удовлетворяющее краевому условию.

Теорема 3а. *В случае, когда функция ϑ' зависит только от p и q, теорема* 3 *о разрешимости второй краевой задачи для уравнения*

$$\vartheta'(p,\ q)(rt-s^2)=\mu'(x,\ y)$$

остается справедливой, если условия 2 *и* 3 *заменить условием*

$$\iint\limits_{G^*} \vartheta'(p,\ q)\,dp\,dq=\iint\limits_{G} \mu'(x,\ y)\,dx\,dy.$$

В заключение заметим, что теорема 3а имеет место и в том случае, когда областью G является вся плоскость xy [21].

Пусть функция множеств $\mu(H)$ задается интегралом от положительной непрерывной функции $\mu'(n)$ на сфере ω_0:

$$\mu(\overline{H})=\iint\limits_{\overline{H}} \mu'(n)\,dn.$$

Тогда поверхности, существование которых устанавливается теоремами 4, 4а § 2, представляют собой гладкие строго выпуклые поверхности с положительной ограниченной гауссовой

кривизной, удовлетворяющие почти везде дифференциальному уравнению

$$K(A)\frac{|OA|^3\vartheta'(A,\,n)}{(\overrightarrow{OA}\cdot n)}=\mu'\left(\frac{\overrightarrow{OA}}{|OA|}\right),$$

где A — произвольная точка поверхности, n — внешняя нормаль и $K(A)$ — гауссова кривизна поверхности в точке A.

В окрестности точки A_0, в которой поверхность пересекается отрицательной осью z, это уравнение имеет вид

$$rt-s^2=\varphi(x,\ y,\ z,\ p,\ q),$$

где

$$\varphi=\frac{\mu'\left(\frac{x}{z},\ \frac{y}{z}\right)(1+p^2+q^2)^{3/2}\,(px+qy-z)}{\vartheta'\left(\frac{x}{z},\ \frac{y}{z},\ z\right)(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

Заметим, что в точке A_0 имеем $\mu_z=0$, так как там $x=0$, $y=0$ и $\vartheta'_z\leqslant 0$ в силу предполагаемой монотонности $\vartheta'(A,\ n)$ по A. Поэтому в окрестности A_0 функция $\varphi_z>0$.

§ 4. Теоремы единственности для решений уравнения $rt-s^2=\varphi(x,\ y,\ z,\ p,\ q)$

Наша основная задача состоит в рассмотрении уравнений Монжа — Ампера с регулярными коэффициентами. Дальше при весьма общих предположениях будет доказано, что условные решения таких уравнений являются регулярными функциями.

В связи с этим теоремы единственности, которые будут доказаны в этом параграфе, относятся к регулярным решениям и соответственно регулярным поверхностям.

Теорема 1. *Пусть в области G плоскости xy задано уравнение Монжа — Ампера*

$$rt-s^2=\varphi(x,\ y,\ z,\ p,\ q),$$

где φ — регулярная функция своих аргументов, удовлетворяющая условиям

$$\varphi>0,\ \varphi_z\geqslant 0,$$

$z_1(x,\ y)$ и $z_2(x,\ y)$ — регулярные решения этого уравнения.

Тогда, если эти решения совпадают на границе области G и обращены выпуклостью в сторону $z<0$, т. е. $d^2z_1\geqslant 0$, $d^2z_2\geqslant 0$, то они совпадают в G тождественно.

Доказательство. Имеем

$$r_1t_1-s_1^2=\varphi(x,\ y,\ z_1,\ p_1,\ q_1),$$

$$r_2t_2-s_2^2=\varphi(x,\ y,\ z_2,\ p_2,\ q_2).$$

Вычитая эти равенства почленно и полагая $z_1 - z_2 = u$,

$$A = \frac{1}{2}(t_1 + t_2), \quad B = \frac{1}{2}(s_1 + s_2), \quad C = \frac{1}{2}(r_1 + r_2),$$

получим

$$Au_{xx} - 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = \varphi_p u_x + \varphi_q u_y + \varphi_z u, \tag{*}$$

где производные функции φ в правой части равенства берутся для значений z, p, q, промежуточных между z_1, p_1, q_1 и z_2, p_2, q_2.

Так как формы

$$r_1\xi^2 - 2s_1\xi\eta + t_1\eta^2, \; r_2\xi^2 - 2s_2\xi\eta + t_2\eta^2$$

положительно определенные, то их полусумма

$$C\xi^2 - 2B\xi\eta + A\eta^2$$

тоже является положительно определенной формой и, следовательно,

$$AC - B^2 > 0.$$

Таким образом, уравнение (*) для функции u является уравнением эллиптического типа. А так как $u=0$ на границе G и $\varphi_z \geqslant 0$, то по известной теореме u не может иметь в G положительного максимума и отрицательного минимума. Следовательно, $u \equiv 0$ в G, т. е. решения z_1 и z_2 совпадают в G тождественно, что и требовалось доказать.

Замечание. Теорема 1 для условных решений может быть доказана в любом из следующих предположений:

1. Функция φ непрерывна, положительна и строго возрастающая по z.
2. Функция φ непрерывна, положительна, не убывающая по z и удовлетворяет по p, q условию Липшица (см. § 12).
3. Функция φ непрерывна, положительна и имеет вид $\varphi = \varphi_1(x, y)\varphi_2(p, q)$.

В последнем случае эта теорема доказана И. Я. Бакельманом [19].

Теорема 2. *Пусть область G плоскости xy ограничена выпуклой кривой с ограниченной удельной кривизной, $\psi(p, q) = 0$ — уравнение замкнутой выпуклой кривой в плоскости pq.*

Тогда, если решения z_1 и z_2 уравнения

$$rt - s^2 = \varphi(x, y, z, p, q), \quad \varphi > 0, \quad \varphi_z \geqslant 0,$$

на границе G удовлетворяют условию $\psi(p, q) = 0$ и оба обращены выпуклостью в сторону $z < 0$, то они либо совпадают, либо отличаются на постоянную. Последняя возможность исключается, если функция φ строго возрастающая по z.

Доказательство. Пусть α — произвольная касательная плоскость поверхиости F_1: $z=z_1(x, y)$. Обозиачим E_α то из полупространств, определяемых плоскостью α, в котором лежит поверхиость F_1. Так как условиое сферическое изображение поверхиости F_1 является выпуклой областью, то бесконечное тело, получаемое в пересечеиии полупростраиств E_α, имеет в качестве граиицы бескоиечную выпуклую поверхность $\bar{F}_1$ с тем же сферическим изображением, что и F_1.

Отсюда следует, что поверхность $\bar{F}_1$ является поверхиостью ограиичеииой удельиой кривизны. И так как оиа заведомо ие является цилиидром (F_1 — область иа ней), то $\bar{F}_1$ — гладкая поверхность. Поэтому поверхность F_1, как часть $\bar{F}_1$, является гладкой вплоть до граиицы. Аналогичным рассуждением устанавливается гладкость вплоть до граиицы поверхиости F_2: $z=z_2(x, y)$.

Рассмотрим разность

$$u=z_1(x, y)-z_2(x, y).$$

В иекоторой точке A области G или иа ее границе функция u достигает максимума. Если точка A является виутренней точкой, то в ией, очевидио, $du=0$.

Пусть точка A — иа границе области G. Так как в точке A $du=0$ в направлении края области G, то касательиые к кривым, ограиичивающим поверхиости F_1 и F_2, в точках, соответствующих A, параллельны. А так как поверхности F_1 и F_2 имеют одно и то же условное сферическое изображеиие — выпуклую область, ограиичеииую кривой $\psi(p, q)=0$, то в этих точках касательные плоскости поверхиостей F_1 и F_2 параллельны и, следовательно, в точке A имеем $p_1=p_2$, $q_1=q_2$, т. е. $du=0$. Таким образом, если точка A прииадлежит граиице области G, то в ией также $du=0$.

Так как край области G имеет ограиичеииую удельиую кривизиу, то независимо от того, будет ли точка A виутренней точкой области G или граиичиой точкой, существует круг, проходящий через точку A и целиком содержащийся в области G. По одной теореме А. Д. Алексаидрова [9] решеиие u уравиения (*), достигающее максимума в точке граиицы круга, в котором определеио решение, и стациоиарное в этой точке, есть константа. Очевидно, если $\varphi_z>0$, эта константа может быть только нулем. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть z_1 и z_2 — два решения уравнения*

$$rt-s^2=\varphi_1(x, y)\varphi_2(p, q), \quad \varphi_1>0, \quad \varphi_2>0,$$

$$\iint\limits_{(xy)} \varphi_1\, dx\, dy<\infty,$$

заданного во всей плоскости xy, причем бесконечные выпуклые поверхности F_1: $z=z_1(x, y)$ и F_2: $z=z_2(x, y)$ обращены выпуклостью в сторону $z<0$ и имеют одно и то же условное сферическое изображение. Тогда решения z_1 и z_2 отличаются на постоянную.

Для доказательства этой теоремы мы воспользуемся приемом А. Д. Александрова, который применен в работе [6].

Не ограничивая общности, можно считать, что поверхности F_1 и F_2 пересекаются, так как вместе с решением $z(x, y)$ любая функция $z(x, y)+\text{const}$ тоже будет решением. Далее, можно считать, что в некоторой общей точке A поверхностей F_1 и F_2 у них различные касательные плоскости, так как в противном случае $dz_1 \equiv dz_2$ и, следовательно, $z_1 - z_2=\text{const}$.

Пусть G — связная компонента множества точек плоскости xy, в которых $z_1(x, y)<z_2(x,y)$, содержащая на границе проекцию точки A. Обозначим $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ области на поверхностях F_1 и F_2 соответственно, которые проектируются на плоскость xy в область G.

Пусть P_2 — произвольная точка поверхности $\overline{F}_2$. Касательная плоскость в ней α_2 отсекает от поверхности $\overline{F}_1$ шапку. Отсюда следует, что на поверхности $\overline{F}_1$ найдется точка P_1 с касательной плоскостью α, параллельной α_2. А это значит, что условное сферическое изображение $\omega(\overline{F}_2)$ поверхности F_2 содержится в условном сферическом изображении $\omega(\overline{F}_1)$ поверхности $\overline{F}_1$.

Проведем через точку A касательную плоскость α поверхности $\overline{F}_2$. Она также отрезает шапку от поверхности $\overline{F}_1$. Отсюда следует, что поверхность $\overline{F}_1$ имеет не только касательную плоскость, параллельную α, но и касательные плоскости любых направлений, близких к α. Следовательно, образ точки A при сферическом отображении поверхности F_2 является граничной точкой $\omega(\overline{F}_2)$ и внутренней точкой $\omega(\overline{F}_1)$. Таким образом, $\omega(\overline{F}_1) - \omega(\overline{F}_2)$ имеет положительную меру.

Имеем

$$\iint\limits_{\omega(\overline{F}_2)} \frac{dp\,dq}{\varphi_2(p, q)} = \iint\limits_{G} \varphi_1(x, y)\,dx\,dy, \qquad \iint\limits_{\omega(\overline{F}_1)} \frac{dp\,dq}{\varphi_2(p, q)} = \iint\limits_{G} \varphi_1(x, y)\,dx\,dy.$$

Вычитая эти равенства почленно, получим

$$\iint\limits_{\omega(\overline{F}_1)-\omega(\overline{F}_2)} \frac{dp\,dq}{\varphi_2(p, q)} = 0,$$

что невозможно, так как $1/\varphi_2>0$, а множество $\omega(\overline{F}_1) - \omega(\overline{F}_2)$ имеет положительную меру. Теорема доказана.

Заметим, что в этом доказательстве регулярность решения по существу не используется и оно проходит для условных решений. Заметим также, что данный метод доказательства применим к теореме 1 для $\varphi=\varphi_1(x, y)\varphi_2(p, q)$ и обобщенных решений [19].

Построение замкнутой выпуклой поверхности с данной условной кривизной дает решение некоторого инвариантно заданного на сфере уравнения Монжа — Ампера (§ 4). Теорему единственности для этого уравнения мы сформулируем в геометрической форме.

Теорема 4. *Замкнутая выпуклая поверхность с заданной условной кривизной ϑ определена однозначно с точностью до подобия относительно центра O, причем, если функция $\vartheta'(A, n)$ строго возрастающая при смещении точки A по лучу OA, то поверхность определяется вполне однозначно.*

Доказательство. Пусть F_1 и F_2 — замкнутые выпуклые поверхности с равными условными кривизнами на соответствующих множествах. (Соответствие точек поверхностей F_1 и F_2 осуществляется проектированием из начала координат O.) Обозначим $A_1(g)$ и $A_2(g)$ точки пересечения поверхностей F_1 и F_2 с произвольной полупрямой g, исходящей из O. Если поверхности F_1 и F_2 не совпадают, то функция (от g), равная $|OA_1(g)|/|OA_2(g)|$, достигает максимума k для некоторой полупрямой g_0. Не ограничивая общности, можно считать, что $k>1$ (в противном случае можно было бы поменять ролями поверхности F_1 и F_2).

Подвергнем поверхность F_2 преобразованию подобия с коэффициентом подобия k и полученную поверхность обозначим $\bar{F}_2$. Поверхность F_1 содержится внутри поверхности $\bar{F}_2$, причем эти поверхности касаются в их общей точке A_0 на луче g_0.

Введем прямоугольные декартовы координаты в пространстве, приняв луч g_0 за отрицательную полуось z. При этом в окрестности точки A_0 поверхность F_1 удовлетворяет уравнению вида

$$rt-s^2=\varphi(x,\ y,\ z,\ p,\ q),\quad \varphi>0,\quad \varphi_z>0,$$

а поверхность $\bar{F}_2$ — неравенству

$$rt-s^2\leqslant\varphi(x,\ y,\ z,\ p,\ q).$$

Отсюда для разности $u=z_1(x,y)-z_2(x,y)$ функций $z_1(x,y)$ и $z_2(x,y)$, задающих поверхности F_1 и $\bar{F}_2$ в окрестности точки A_0, получается неравенство

$$Au_{xx}-2Bu_{xy}+Cu_{yy}\geqslant\varphi_p u_x+\varphi_q u_y+\varphi_z u.$$

Так как в точке $x=y=0$ имеем $u=0$, $du=0$ и u достигает максимума (поверхность F_1 содержится внутри $\bar{F}_2$, причем в точке A_0

касается ее), то по теореме А. Д. Александрова [9] функция $u\equiv 0$ в окрестности $x=y=0$. А отсюда следует, что поверхности F_1 и $\bar{F}_2$ совпадают, т. е. поверхности F_1 и F_2 подобны.

Если функция $\vartheta'(A, n)$ строго монотонна при смещении точки A по лучу OA, то поверхности F_1 и F_2, будучи подобны, должны совпадать, так как в противном случае значения условных кривизн на соответствующих множествах заведомо различны. Теорема доказана полностью.

Замечание. В случае, если функция $\vartheta'(A, n)$, задающая условную кривизну, не зависит от точки A, а зависит только от единичного вектора n, доказательство можно построить на тех же соображениях, что и доказательство теоремы 3, причем оно проходит для любой непрерывной функции $\vartheta'(n)$ без предположения о регулярности поверхностей. В случае $\vartheta'\equiv 1$ такое доказательство дано в работе А. Д. Александрова [6].

§ 5. О регулярном решении одной краевой задачи для уравнения $rt-s^2=\varphi(x, y, z, p, q)$ с регулярной правой частью

В этом параграфе будет доказана следующая лемма.

Лемма. *Пусть в круге G: $x^2+y^2\leqslant R^2$ задано уравнение Монжа — Ампера*

$$rt-s^2=\varphi(x, y, z, p, q)$$

с достаточно регулярной правой частью φ, удовлетворяющей условиям: 1) $\varphi>0$, 2) $\varphi_z\geqslant 0$, 3) $\varphi=\mathrm{const}$ в ε-окрестности окружности γ круга G. Пусть h — достаточно регулярная функция, заданная на окружности γ и регулярно продолжаемая внутрь круга G выпуклой в сторону $z<0$ функцией, удовлетворяющей условию

$$h_{xx}h_{yy}-h_{xy}^2>\varphi(x, y, m, h_x, h_y),$$

где $m=\max h$ на γ.

Тогда существует регулярное решение уравнения $rt-s^2=\varphi$ в круге G, обращенное выпуклостью в сторону $z<0$ и принимающее на окружности γ значения h.

Эта лемма сама по себе мало интересна. Но она существенно используется при доказательстве регулярности условных решений в следующем параграфе.

По теореме С. Н. Бернштейна [21] о разрешимости задачи Дирихле для нелинейных уравнений эллиптического типа и ее распространении на уравнения с регулярными коэффициентами (К. Миранда, [49]) для доказательства леммы достаточно установить апрнорные оценки максимума модуля предполагаемого

решения и его производных первых двух порядков. Получение таких оценок и составляет доказательство леммы.

Так как решение $z(x, y)$ обращено выпуклостью в сторону $z<0$, то максимум z достигается на окружности γ. То же относится и к функции h. Поэтому

$$z \leqslant \max h = m.$$

И оценка для решения z сверху тем самым получена.

Для того чтобы оценить $z(x, y)$ снизу, рассмотрим разность $u=z-h$. Утверждается, что она неотрицательна в круге G. Действительно, для решения z

$$rt - s^2 = \varphi(x, y, z, p, q),$$

а для функции h

$$h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2 > \varphi(x, y, m, h_x, h_y).$$

Отсюда для функции $u=z-h$ получается неравенство

$$Au_{xx} - 2Bu_{xy} + Cu_{yy} < \varphi_p u_x + \varphi_q u_y + \varphi_z(z-m), \qquad (*)$$

где

$$A = \frac{1}{2}(z_{yy} + h_{yy}), \quad B = \frac{1}{2}(z_{xy} + h_{yy}), \quad C = \frac{1}{2}(z_{xx} + h_{xx}).$$

Допустим, функция u принимает отрицательные значения. Тогда она достигает минимума внутри круга G (на окружности γ $u=0$). В точке P, где достигается этот минимум, $du=0$, $d^2u \geqslant 0$. Отсюда, так как форма $A\xi^2 - 2B\xi\eta + C\eta^2$ положительно определенная, в точке P

$$Au_{xx} - 2Bu_{xy} + Cu_{yy} \geqslant 0.$$

Далее, так как $z \leqslant m$ и $\varphi_z > 0$, то в точке P

$$\varphi_p u_x + \varphi_q u_y + \varphi_z(z-m) = \varphi_z(z-m) \leqslant 0.$$

И мы получаем неравенство

$$Au_{xx} - 2Bu_{xy} + Cu_{yy} \geqslant \varphi_p u_x + \varphi_q u_y + \varphi_z(z-m),$$

которое противоречит неравенству $(*)$. Значит, в круге G $z-h \geqslant 0$. Отсюда оценка для решения $z(x, y)$ снизу:

$$z \geqslant \min_G h.$$

Оценим теперь первые производные решения $z(x, y)$. Для этого достаточно оценить выражение p^2+q^2. Так как функция z выпуклая, то $\max(p^2+q^2)$ достигается на окружности γ круга G. Пусть M — произвольная точка окружности γ. Оценим

p^2+q^2 в этой точке. Введем в круге G полярные координаты ρ, ϑ. Тогда на окружности γ круга G

$$p^2+q^2=z_\rho^2+\frac{1}{R^2}z_\vartheta^2.$$

Так как на окружности γ имеем $z=h$, то слагаемое z_ϑ^2/R^2 в точке M оценивается через h:

$$\frac{1}{R^2}z_\vartheta^2\leqslant\frac{1}{R^2}\max_\gamma h_\vartheta^2.$$

И нам остается оценить только $|z_\rho|$ в точке M.

В силу выпуклости функции z в сторону $z<0$

$$-z_\rho\leqslant\frac{1}{2R}(z(\overline{M})-z(M)),$$

где $\overline{M}$ — точка окружности γ, диаметрально противоположная M. Отсюда оценка для z_ρ снизу:

$$z_\rho\geqslant\frac{1}{2R}(\min_\gamma h-\max_\gamma h).$$

Для того чтобы оценить z_ρ сверху в точке M, заметим, что функция u равна нулю на окружности γ (в частности, в точке M), а в круге G всюду $u\geqslant 0$. Отсюда в точке M

$$-u_\rho=-z_\rho+h_\rho\geqslant 0,$$

и мы получим оценку для z_ρ сверху:

$$z_\rho\leqslant\max_\gamma h_\rho.$$

Таким образом, для решения $z(x,y)$ установлено существование априорных оценок максимума модуля решения и его производных первого порядка.

Перейдем в рассматриваемом уравнении к полярным координатам ρ, ϑ. Тогда получим

$$z_{\rho\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}z_{\vartheta\vartheta}+\frac{1}{\rho}z_\rho\right)-\left(\frac{1}{\rho}z_{\rho\vartheta}-\frac{1}{\rho^2}z_\vartheta\right)^2=\varphi.$$

Так как первые производные решения оценены, то для оценки вторых производных r, s, t достаточно оценить $z_{\rho\rho}$, $z_{\rho\vartheta}$, $z_{\vartheta\vartheta}$. Сейчас мы получим такие оценки на окружности γ круга G.

Так как на окружности γ имеем $z=h$, то оценка для $z_{\vartheta\vartheta}$ получается тривиальным образом:

$$|z_{\vartheta\vartheta}|\leqslant\max_\gamma|h_{\vartheta\vartheta}|.$$

Оценим теперь производную $z_{\rho\vartheta}$.

Дифференцируя уравнение для z по ϑ и полагая $z_\vartheta=\zeta$, получим

$$\zeta_{\rho\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}z_{\vartheta\vartheta}+\frac{1}{\rho}z_\rho\right)-2\left(\frac{1}{\rho}\zeta_{\rho\vartheta}-\frac{1}{\rho^2}\zeta_\vartheta\right)\left(\frac{1}{\rho}z_{\rho\vartheta}+\frac{1}{\rho^2}z_\vartheta\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{\rho}\zeta_{\vartheta\vartheta}+\frac{1}{\rho}\zeta_\rho\right)z_{\rho\rho}=\frac{d}{d\vartheta}\varphi.$$

Обозначим F_ϑ поверхность, задаваемую уравнением $z=\zeta(x, y)$ и проектирующуюся в кольцо $(R-\varepsilon)^2\leqslant x^2+y^2\leqslant R^2$. Пусть γ_ϑ и $\bar{\gamma}_\vartheta$ — ограничивающие ее кривые, причем γ_ϑ — та из них, которая проектируется в окружность γ. Так как в кольце $(R-\varepsilon)^2\leqslant x^2+y^2\leqslant R^2$ по условию леммы $\varphi=\mathrm{const}$, то из уравнения для ζ в кольце получается

$$\zeta_{xx}\zeta_{yy}-\zeta_{xy}^2=\zeta_{\rho\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}\zeta_{\vartheta\vartheta}+\frac{1}{\rho}\zeta_\rho\right)-\left(\frac{1}{\rho}\zeta_{\rho\vartheta}-\frac{1}{\rho^2}\zeta_\vartheta\right)^2\leqslant 0.$$

Следовательно, поверхность F_ϑ имеет неположительную кривизну.

Построим конус V с краем γ_ϑ и вершиной в точке $S(0, 0, -N)$ оси z. Число N возьмем настолько большим, чтобы конус V был выпуклым и обращен выпуклостью в сторону $z<0$, а кривая $\bar{\gamma}_\vartheta$ была бы над конусом V. Такой конус строится без особого труда. Чтобы удовлетворить первому условию, надо взять точку S так, чтобы она была ниже любой из соприкасающихся плоскостей кривой γ_ϑ. Возможность удовлетворить второму условию гарантирована полученными выше оценками для первых производных, а следовательно, и для ζ.

Так как поверхность F_ϑ имеет неположительную кривизну и ее край $\gamma_\vartheta+\bar{\gamma}_\vartheta$ расположен над конусом V, то вся поверхность F_ϑ расположена над конусом V. Пусть $z=v(\rho, \vartheta)$ — уравнение конуса V. Так как на окружности γ разность $\zeta-v=0$, а в ее окрестности $\zeta-v\geqslant 0$, то

$$-(\zeta-v)_\rho\geqslant 0.$$

Отсюда

$$z_{\rho\vartheta}=\zeta_\rho\leqslant\max_\gamma v_\rho.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что в точке, где достигается $\max|z_{\rho\vartheta}|$, само $z_{\rho\vartheta}>0$ (этого всегда можно добиться, изменяя направление отсчета углов ϑ). Поэтому полученную выше оценку для $z_{\rho\vartheta}$ сверху можно считать оценкой по модулю.

Переходим к оценке $z_{\rho\rho}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $z_{\rho\rho}$ достигает максимума в точке $M(\vartheta=0)$. Как

видио из уравнеиия для z, для получения оценки $z_{\rho\rho}$ достаточио оценить снизу положительным числом выражеиие $\frac{1}{\rho}z_{\vartheta\vartheta}+\frac{1}{\rho}z_{\rho}$.

В цитированиой выше работе С. Н. Бериштейиа показаио, что существует решение

$$z_0=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+a_1x+a_2y+a_0$$

уравнеиия

$$rt-s^2=k_0=\mathrm{const}>0,$$

обращеииое выпуклостью в сторону $z<0$, удовлетворяющее в точке $M(\vartheta=0)$ окружности γ круга G условиям:

1. $z_0=h$, $(z_0)_\vartheta=h_\vartheta$, $(z_0)_{\vartheta\vartheta}=h_{\vartheta\vartheta}$, $(z_0)_{\vartheta\vartheta\vartheta}=h_{\vartheta\vartheta\vartheta}$.
2. В точках окружности γ, отлнчиых от M, $z_0>h$.
3. В точке M

$$\frac{1}{\rho^2}(z_0)_{\vartheta\vartheta}+\frac{1}{\rho}(z_0)_\rho>\alpha_0>0,$$

где α_0 — постояниая, завнсящая только от k_0 и макснмума модулей прнзводиых h до четвертого порядка.

Возьмем k_0 таким, чтобы для $(x, y)\in G$ н для p, q, z в пределах полученных апрнорных оцеиок было $k_0<\varphi$. Тогда для функции $u=z_0-z$ получаем неравеиство

$$Au_{xx}-2Bu_{xy}+Cu_{yy}=k_0-\varphi<0,$$

где

$$2A=2a_{22}+t,\quad 2B=2a_{12}+s,\quad 2C=2a_{11}+r.$$

Отсюда следует, что в круге G не существует точек, в которых $d^2u\geqslant 0$. Поэтому фуикция u, будучи иеотрицательной иа окружности круга G, должна быть неотрицательной н в самом круге.

Так как в точке M $u=0$, то в этой точке $u_\rho=(z_0-z)_\rho\leqslant 0$, т. е. $(z_0)_\rho\leqslant z_\rho$. А отсюда следует, что в точке M

$$\frac{1}{\rho^2}z_{\vartheta\vartheta}+\frac{1}{\rho}z_\rho\geqslant\frac{1}{\rho^2}(z_0)_{\vartheta\vartheta}+\frac{1}{\rho}(z_0)_\rho>\alpha_0>0,$$

что и позволяет оценнть производиую $z_{\rho\rho}$ в точке M.

Итак, существованне априорных оценок вторых производных решения иа окружности γ круга G доказано.

Предполагая, что оцеики модулей вторых прнзводных r, s, t иа окружности круга G получены, устаиовнм оценкн для этих производиых во всем круге G. Начнем с производной r.

Так как решение обращено выпуклостью в сторону $z<0$, то $r>0$ и, следовательно, достаточно оцеиить макснмум r.

Рассмотрнм вспомогательную фуикцню

$$w=\lambda r,$$

где λ — некоторая ограниченная, положительная в замкнутом круге G функция, которую мы укажем позже. Функция w достигает максимума в замкнутом круге G. Если этот максимум w_0 достигается на окружности круга, то он оценивается с помощью известного максимума r на окружности, после чего получается оценка r во всем круге G:

$$r \leqslant \frac{w_0}{\min \lambda}.$$

Пусть w достигает максимума в некоторой внутренней точке A круга G. Тогда в этой точке будем иметь

$$w_x = 0, \qquad w_y = 0,$$

откуда

$$r_x = w\left(\frac{1}{\lambda}\right)_x = -r\frac{\lambda_x}{\lambda}, \qquad r_y = w\left(\frac{1}{\lambda}\right)_y = -r\frac{\lambda_y}{\lambda}.$$

Соответственно получаем следующие выражения для вторых производных z в точке A:

$$r_{xx} = \frac{w_{xx}}{\lambda} + w\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{xx}, \quad r_{xy} = \frac{w_{xy}}{\lambda} + w\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{xy}, \quad r_{yy} = \frac{w_{yy}}{\lambda} + w\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{yy}.$$

Дифференцируя рассматриваемое уравнение

$$rt - s^2 = \varphi(x, y, z, p, q)$$

по x, получим

$$r_x t - t_x r - 2ss_x = \frac{d\varphi}{dx}.$$

С помощью этого равенства выражение $r_x t_x - s_x^2$ в точке A преобразуется к виду

$$r_x t_x - s_x^2 = -\frac{\lambda_x}{\lambda}\frac{d\varphi}{dx} + 2rs\left(\frac{\lambda_x}{\lambda}\right)\left(\frac{\lambda_y}{\lambda}\right) - rt\left(\frac{\lambda_x}{\lambda}\right)^2 - r^2\left(\frac{\lambda_y}{\lambda}\right)^2.$$

Дифференцируя теперь уравнение $rt - s^2 = \varphi$ дважды по x, получим

$$(r_{xx}t - 2r_{xy}s + r_{yy}r) + 2\left(r_x t_x - s_x^2\right) = \frac{d^2\varphi}{dx^2}.$$

Подставляя сюда найденное выражение для $r_x t_x - s_x^2$ в точке A, будем иметь

$$\frac{1}{\lambda}(tw_{xx} - 2sw_{xy} + rw_{yy}) + \lambda r\left\{t\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{xx} - 2s\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{xy} + r\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{yy}\right\} + \\ + 2\left\{-\frac{\lambda_x}{\lambda}\frac{d\varphi}{dx} + 2rs\left(\frac{\lambda_x}{\lambda}\right)\left(\frac{\lambda_y}{\lambda}\right) - rt\left(\frac{\lambda_x}{\lambda}\right)^2 - r^2\left(\frac{\lambda_y}{\lambda}\right)^2\right\} = \frac{d^2\varphi}{dx^2}.$$

Замечая, что

$$\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{xx}-2\left(\frac{\lambda_x}{\lambda}\right)^2=-\frac{\lambda_{xx}}{\lambda},\quad \lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{xy}-2\left(\frac{\lambda_x}{\lambda}\right)\left(\frac{\lambda_y}{\lambda}\right)=-\frac{\lambda_{xy}}{\lambda},$$

$$\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{yy}-2\left(\frac{\lambda_y}{\lambda}\right)^2=-\frac{\lambda_{yy}}{\lambda},$$

преобразуем последнее равенство к виду

$$\frac{1}{\lambda}(tw_{xx}-2sw_{xy}+rw_{yy})-\frac{\lambda_{xx}}{\lambda}rt+\frac{2\lambda_{xy}}{\lambda}rs-\frac{\lambda_{yy}}{\lambda}r^2-\frac{2\lambda_x}{\lambda}\frac{d\varphi}{dx}=\frac{d^2\varphi}{dx^2}.$$

Заменяя в этом равенстве rt на $\varphi+s^2$ и замечая, что

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+2\frac{\lambda_x}{\lambda}\frac{d\varphi}{dx}+\varphi\frac{\lambda_{xx}}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}\frac{d^2}{dx^2}(\lambda\varphi),$$

получаем

$$(tw_{xx}-2sw_{xy}+rw_{yy})-\lambda_{xx}s^2+2\lambda_{xy}rs-\lambda_{yy}r^2=\frac{d^2}{dx^2}(\lambda\varphi).$$

Так как в точке A функция w достигает максимума, то

$$tw_{xx}-2sw_{xy}+rw_{yy}\leqslant 0$$

и, следовательно,

$$\frac{d^2(\lambda\varphi)}{dx^2}+\lambda_{xx}s^2-2\lambda_{xy}rs+\lambda_{yy}r^2\leqslant 0.$$

Возьмем теперь

$$\lambda=e^{\frac{\alpha}{2}(x^2+y^2)}.$$

Тогда в точке A получим

$$(\alpha+2\alpha^2x^2)s^2+4\alpha^2xyrs+(\alpha+2\alpha^2y^2)r^2+$$
$$+(\varphi_{pp}r^2+2\varphi_{pq}rs+\varphi_{qq}s^2)+\ \ldots\leqslant 0,\qquad (**)$$

где не выписаны члены, содержащие r и s в первой степени. При достаточно большом α квадратичная форма (по r и s)

$$(\varphi_{pp}+\alpha+2\alpha^2x^2)s^2+2(\varphi_{pq}+2\alpha^2xy)rs+(\varphi_{qq}+\alpha+2\alpha^2y^2)r^2$$

положительно определенная и, следовательно, r не может быть больше некоторого r_0, определяемого неравенством (*). Отсюда

$$w_0\leqslant r_0\max_G\lambda$$

и, следовательно, во всем круге G

$$r\leqslant r_0\frac{\max\lambda}{\min\lambda}.$$

Оценка для производной t получается аналогично. После этого очевидным образом оценивается s, так как $s^2=rt-\varphi$.

Получив априорные оценки решения $z(x, y)$ и его производных первого и второго порядка, мы тем самым доказали лемму, сформулированную в начале параграфа.

§ 6. Регулярность условных решений уравнения Монжа — Ампера $rt-s^2=\varphi(x, y, z, p, q)$ с регулярной правой частью

В этом параграфе будет доказано, что если правая часть уравнения $rt-s^2=\varphi(x, y, z, p, q)$ достаточно регулярна, то любое условное решение этого уравнения является регулярным. Это позволяет применить теоремы § 3 при решении краевых задач для этого уравнения в классической постановке.

Пусть ε', ε'', ε''', ε — малые положительные числа, причем

$$0<\varepsilon'<\varepsilon''<\varepsilon'''<\varepsilon;$$

λ и μ — две достаточно регулярные на отрезке $(0, \varepsilon)$ функции переменной ρ, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{array}{rlll} \lambda=1, & \mu=0 & \text{при} & 0\leqslant\rho<\varepsilon' \\ \lambda=1, & 0\leqslant\mu\leqslant1 & \text{при} & \varepsilon'\leqslant\rho\leqslant\varepsilon'', \\ 0\leqslant\lambda\leqslant1, & \mu=1 & \text{при} & \varepsilon''\leqslant\rho\leqslant\varepsilon''', \\ \lambda=0, & \mu=1 & \text{при} & \varepsilon'''\leqslant\rho\leqslant\varepsilon. \end{array}$$

Положим

$$\tilde{\varphi}=\lambda(\rho)\varphi+\mu(\rho), \qquad \rho^2=(x-a)^2+(y-b)^2.$$

Очевидно,

$$0<\tilde{\varphi}\leqslant\varphi+1, \qquad \tilde{\varphi}_z\geqslant0.$$

Условимся говорить, что функция h, заданная на окружности $(x-a)^2+(y-b)^2=\varepsilon^2$ плоскости xy, принадлежит классу Ω_R, если $-R\leqslant h\leqslant R$ и замкнутая кривая γ, задаваемая этой функцией:

$$z=h(x, y), \qquad (x-a)^2+(y-b)^2=\varepsilon^2,$$

является краем некоторой выпуклой поверхности, обращенной выпуклостью в сторону $z<0$, с условным сферическим изображением внутри круга $p^2+q^2\leqslant R^2$ плоскости pq.

Лемма. *Пусть в некоторой области плоскости xy задано уравнение Монжа — Ампера $rt-s^2=\varphi(x, y, z, p, q)$ с достаточно регулярной правой частью, удовлетворяющей условиям $\varphi>0$, $\varphi_z\geqslant0$; (a, b) — произвольная точка этой области. Тогда при достаточно малом ε в круге G_ε: $(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant\varepsilon^2$*

существует регулярное решение уравнения $rt - s^2 = \tilde{\varphi}$, обращенное выпуклостью в сторону $z<0$ и принимающее значения h на окружности круга G_ε, какова бы ни была функция h из Ω_R и каковы бы ни были числа ε', ε'', ε''' и функции λ, μ, определяющие $\tilde{\varphi}$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что точка (a, b) является началом координат. Пусть $z=z_0(x, y)$ — та выпуклая поверхность, которая обращена выпуклостью в сторону $z<0$, имеет краем кривую γ, задаваемую функцией h, и условное сферическое изображение, содержащееся в круге ω_R: $p^2+q^2 \leqslant R^2$. Положим

$$\bar{z} = z_0 + \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}(x^2+y^2-\varepsilon^2) \qquad (x^2+y^2 \leqslant \varepsilon^2).$$

Уравнением $z=\bar{z}(x, y)$ задается некоторая выпуклая поверхность с краем γ; и если ε достаточно мало, то ее условное сферическое изображение содержится в круге ω_{2R}.

Имеем

$$\bar{r}\bar{t} - \bar{s}^2 = (r_0t_0 - s_0^2) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(r_0+t_0) + \frac{1}{\varepsilon}.$$

Так как $r_0t_0 - s_0^2 \geqslant 0$, $r_0+t_0 \geqslant 0$, то

$$\bar{r}\bar{t} - \bar{s}^2 \geqslant \frac{1}{\varepsilon}.$$

Возьмем ε настолько малым, чтобы условное сферическое изображение поверхности $z=\bar{z}(x, y)$ содержалось в круге ω_{2R} и чтобы при $x^2+y^2 \leqslant \varepsilon^2$, $p^2+q^2 \leqslant 4R^2$ было

$$\tilde{\varphi}(x, y, R, p, q) < \frac{1}{\varepsilon}.$$

Такое ε можно выбрать независимо от чисел ε', ε'', ε''' и функций λ и μ, так как

$$\tilde{\varphi} < \varphi + 1.$$

Пусть теперь $z(x, y)$ — решение уравнения $rt - s^2 = \tilde{\varphi}$ в круге G_ε, обращенное выпуклостью в сторону $z<0$, принимающее на окружности круга значения h. Мы утверждаем, что функция $u=z(x, y) - \bar{z}(x, y)$, равная нулю на окружности круга G_ε, неотрицательна в самом круге.

Действительно, допустим, u принимает в круге отрицательные значения. Тогда она достигает в некоторой точке P круга минимума. В этой точке $du=0$ и, следовательно, $p=\bar{p}$, $q=\bar{q}$, откуда, так как $\bar{p}^2+\bar{q}^2<4R^2$, в точке P получаем

$$\tilde{\varphi}(x, y, R, p, q) < \frac{1}{\varepsilon} < \bar{r}\bar{t} - \bar{s}^2.$$

Дальше, как и в доказательстве леммы § 5, для функции u получаем неравенство

$$Au_{xx}-2Bu_{xy}+Cu_{yy}<\tilde{\varphi}_p u_x+\tilde{\varphi}_q u_y+\tilde{\varphi}_z(z-R),$$

которое невозможно, так как в точке P имеем $Au_{xx}-2Bu_{xy}+$ $+Cu_{yy}\geqslant 0$, $u_x=u_y=0$, а $\tilde{\varphi}_z(z-R)\leqslant 0$, и, таким образом, приходим к противоречию. Итак, функция $z-\bar{z}$ неотрицательна в круге G.

Теперь, рассуждая, как и в доказательстве леммы § 5, последовательно заключаем о существовании априорных оценок решения $z(x, y)$ и его производных первого и второго порядков. Получив такие оценки, заключаем о существовании решения на основе теоремы С. Н. Бернштейна. Лемма доказана.

Обозначим $z_{\varepsilon'}(x, y)$ решение $z(x, y)$ в круге $x^2+y^2\leqslant\varepsilon'^2$. Так как в этом круге $\tilde{\varphi}=\varphi$, то $z_{\varepsilon'}$ является решением исходного уравнения $rt-s^2=\varphi$. Априорные оценки для первых производных решения $z(x, y)$ определяются функцией $\bar{z}(x, y)$, не зависящей от ε', ε'', ε''', λ, μ. Поэтому граничные значения h' решения $z_{\varepsilon'}$ при $\varepsilon'\to\varepsilon$ сходятся к h.

Пусть в области G плоскости xy имеем какое-нибудь условное решение $\bar{z}(x, y)$ уравнения

$$rt-s^2=\varphi(x,\ y,\ z,\ p,\ q)$$

с достаточно регулярной правой частью φ, удовлетворяющей условиям: $\varphi>0$, $\varphi_z\geqslant 0$. Пусть это решение обращено выпуклостью в сторону $z<0$.

Построим достаточно регулярную выпуклую функцию $h(x, y)$, близкую $\bar{z}(x, y)$. При достаточно малом ε в круге G_ε: $(x-a)^2+$ $+(y-b)^2\leqslant\varepsilon^2$, содержащемся в G, существует регулярное решение $z(x, y)$ уравнения $rt-s^2=\varphi$, обращенное выпуклостью в сторону $z<0$ и принимающее на границе этого круга значения, сколь угодно близкие к h. При достаточной близости h к $\bar{z}$ можно считать, что ε не зависит от выбора h.

Сейчас мы докажем, что при $h\to\bar{z}$ функция $z(x, y)$ также сходится к $\bar{z}(x, y)$ в круге G_ε. Допустим, это неверно. Тогда, не ограничивая общности, можно считать, что для некоторой функции $h(x, y)$, близкой к $\bar{z}(x, y)$, функция $u(x, y)=z(x, y)-\bar{z}(x, y)$ достигает максимума m внутри круга G_ε, в то время как на границе круга $u<m$.

Введем вспомогательную функцию w равенством $u=\delta w$, где $\delta=1-\sigma e^{\lambda x}-\sigma e^{\lambda y}$. При достаточно малом σ и фиксированном λ она тоже достигает максимума строго внутри круга G_ε. Обозначим M множество тех точек круга G_ε, где этот максимум достигается, и пусть M' обозначает ε'-окрестность множества M.

При достаточно малом ε' величины $p-\bar{p}$ и $q-\bar{q}$ в M' сколь угодно малы.

Пусть M'' — подмножество M', в котором существует $d^2\bar{z}$, а $d^2w \leqslant 0$. В каждой точке $P \in M''$

$$d^2u = w\,d^2\delta + 2d\delta\,dw + \delta\,d^2w < 0,$$

если достаточно мало ε'. Отсюда заключаем, что в M'' будет $d^2z < d^2\bar{z}$ и, следовательно, в силу ограниченности $\bar{r}\bar{t} - \bar{s}^2$ производные $\bar{r}$, $\bar{t}$ и $\bar{s}$ в M'' равномерно ограничены.

Функция $u(x, y)$ почти всюду в G_ε удовлетворяет уравнению

$$Au_{xx} - 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = \varphi_p u_x + \varphi_q u_y + \varphi_z u,$$

где

$$A = \frac{1}{2}(t + \bar{t}), \quad B = \frac{1}{2}(s + \bar{s}), \quad C = \frac{1}{2}(r + \bar{r}),$$

а производные φ_p, φ_q и φ_z взяты для некоторых средних значений аргументов p, q, z и являются ограниченными функциями в M'.

Подставляя в уравнение для u ее выражение через w, получим

$$\begin{aligned} w(A\delta_{xx} - 2B\delta_{xy} + C\delta_{yy}) + 2(A\delta_x w_x - B(\delta_x w_y + w_x\delta_y) + C\delta_y w_y) &+ \\ + \delta(Aw_{xx} - 2Bw_{xy} + Cw_{yy}) &= \\ = w(\varphi_p\delta_x + \varphi_q\delta_y) + \delta(\varphi_p w_x + \varphi_q w_y) &+ \delta w\varphi_z. \end{aligned}$$

Распорядимся теперь выбором параметров λ, σ, ε следующим образом. Число λ возьмем настолько большим, чтобы первый член левой части равенства был в M'' значительно больше по абсолютной величине, чем первый член правой части. Это возможно, так как форма d^2z строго положительная. Далее возьмем σ и ε настолько малыми, чтобы первый член левой части был в M'' значительно больше по абсолютной величине второго члена левой части и второго члена правой части равенства. Это возможно благодаря равномерной ограниченности A, B, C и φ_p, φ_q в M''. При этом можно считать, что первое условие не нарушается.

Возьмем теперь в M'' произвольную точку P, если M'' не пусто. Из-за указанного выбора чисел λ, σ и ε' в точке P левая часть равенства меньше правой. И мы приходим к противоречию. Остается предположить, что множество M'' пусто.

Построим выпуклую оболочку множества тех точек поверхности $z = w(x, y)$, которые проектируются в M'. Пусть Φ' — та ее часть, которая обращена выпуклостью в сторону $z > 0$, и Φ'' — множество тех ее точек, которые принадлежат поверхности $z = w$. Φ'' — замкнутое множество. Оно имеет меру нуль, так

как M'' пусто, но его условное сферическое изображение имеет положительную меру.

Возьмем теперь близкую к $\bar{z}$ регулярную функцию $\tilde{z}$. Построим далее фуикцию $\tilde{w}=\frac{1}{\delta}(z-\tilde{z})$, поверхность $\tilde{\Phi}'$ и множество $\tilde{\Phi}''$ иа ней подобио тому, как в случае фуикции $\bar{z}$. При достаточной близости $\tilde{z}$ к z множество Φ'' попадает в сколь угодио малую окрестиость Φ'', а следовательно, имеет сколь угодно малую меру. Однако при этом

$$\iint\limits_{(\tilde{\Phi}'')} (\tilde{w}_{xx}\tilde{w}_{yy}-\tilde{w}_{xy}^2)\,dx\,dy>\varepsilon_0>0.$$

При малом ε' и достаточной близости $\tilde{z}$ к $\bar{z}$

$$d^2\tilde{w}=\tilde{w}d^2\delta+2d\tilde{w}\,d\delta+\delta d^2\tilde{w}>\delta d^2\tilde{w}.$$

Отсюда

$$\tilde{u}_{xx}\tilde{u}_{yy}-\tilde{u}_{xy}^2>\delta^2(\tilde{w}_{xx}\tilde{w}_{yy}-\tilde{w}_{xy}^2).$$

И, следовательио,

$$\iint\limits_{(\tilde{\Phi}'')} \frac{1}{\delta^2}(\tilde{u}_{xx}\tilde{u}_{yy}-\tilde{u}_{xy}^2)\,dx\,dy>\varepsilon_0>0.$$

Но

$$\tilde{u}_{xx}\tilde{u}_{yy}-\tilde{u}_{xy}^2\leqslant(rt-s^2)+(\tilde{r}\tilde{t}-\tilde{s}^2).$$

Поэтому

$$\iint\limits_{(\tilde{\Phi}'')}(rt-s^2)\,dx\,dy+\iint\limits_{(\tilde{\Phi}'')}(\tilde{r}\tilde{t}-\tilde{s}^2)\,dx\,dy>\varepsilon_0>0.$$

Так как поверхности $z=z(x, y)$ и $z=\bar{z}(x, y)$ суть поверхности ограничеиной удельной кривизны, а множество $\tilde{\Phi}''$ прииадлежит сколь угодно малой окрестиости замкнутого множества Φ'' иулевой меры, то при достаточиой близости z к $\bar{z}$ каждый из иитегралов

$$\iint\limits_{(\tilde{\Phi}'')}(rt-s^2)\,dx\,dy \quad \text{и} \quad \iint\limits_{(\tilde{\Phi}'')}(\tilde{r}\tilde{t}-\tilde{s}^2)\,dx\,dy$$

сколь угодио мал. И мы приходим к противоречию, так как сумма этих интегралов больше $\varepsilon_0>0$. Итак, при $h\to\bar{z}$ регулярное решеиие $z(x, y)$ в круге G_ε сходится к условному решеиию $\bar{z}(x, y)$.

Покажем теперь, что для вторых производных решения z, сходящегося к $\bar{z}$ при $h\to\bar{z}$, на замкнутом множестве H внутреиних точек круга G_ε можно указать оценки, равиомерные отиосительно предельного перехода $z\to\bar{z}$.

Пусть P — произвольная точка множества H и P' — точка поверхности F: $z=z(x, y)$, которая проектируется в P. Сместим касательную плоскость в точке P' поверхности F в направлении $z>0$ на расстояние $\delta_0>0$. Пусть

$$z=z_0(x, y)$$

— уравнение плоскости в этом положении. Так как поверхность $\bar{F}$: $z=\bar{z}(x, y)$ строго выпукла, то при достаточной близости F к $\bar{F}$ и малом δ_0 плоскость $z=z_0(x, y)$ не пересекает края поверхности F, какова бы ни была точка P множества H.

Обозначим G_P множество тех точек круга G_ε, в которых $z_0>z$. Оно расположено строго внутри круга G_ε, и на его границе $z_0=z$.

Рассмотрим в области G_P функцию w точки и направления в ней (t)

$$w_{(t)} = \delta\mu(z_t) z_{tt},$$

где $\delta=z_0-z$, а $\mu(z_t)$ — некоторая положительная ограниченная функция, которая будет указана позже. Очевидно, функция $w_{(t)}$ достигает абсолютного максимума в некоторой точке P_0 области G_P для некоторого направления t_0 в этой точке. Возьмем это направление за направление оси x. Очевидно, функция

$$w = \delta\mu(p) r$$

тоже достигает абсолютного максимума в точке P_0.

Оценим производную s в точке P_0 через производную r. Так как функция от ϑ

$$\delta\mu(p\cos\vartheta + q\sin\vartheta)(r\cos^2\vartheta + 2s\sin\vartheta\cos\vartheta + t\sin^2\vartheta)$$

достигает максимума при $\vartheta=0$, то ее производная по ϑ при $\vartheta=0$ равна нулю. Отсюда получается

$$\mu'(p) qr = 2\mu s$$

И, следовательно, в точке P_0

$$|s| \leqslant \frac{1}{2}\left|\frac{\mu'}{\mu}\right| |q| r.$$

Если обозначить $\delta\mu=\lambda$, то, как показано в § 5, в точке P_0 имеет место неравенство

$$\lambda_{xx}s^2 - 2\lambda_{xy}rs + \lambda_{yy}r^2 + (\lambda\varphi)_{xx} \leqslant 0,$$

где индексами указано полное дифференцирование по соответствующим переменным сложных функций.

Если в это неравенство подставить $\lambda=\delta\mu$, то после упрощений, которые оказываются возможными благодаря тому, что в точке P_0 $w_x=0$, $w_y=0$, оно принимает следующий вид:

$$\delta\mu'' r^2+\delta\mu(\varphi_{pp}r^2+2\varphi_{pq}rs+\varphi_{qq}s^2)+(*)\leqslant 0,$$

где $(*)$ обозначает линейное выражение относительно r и s с ограниченными коэффициентами, зависящими от функций δ, μ, φ и их производных.

Так как в точке P_0 по доказанному $s=\mu' qr/2\mu$, то

$$\delta\mu'' r^2+\delta\mu r^2\left(\varphi_{pp}+2\varphi_{pq}q\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)+\varphi_{qq}q^2\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2\right)+(*)\leqslant 0.$$

Умножая это неравенство на $\delta\mu^2$ и вводя $w=\delta\mu r$, получим

$$\mu'' w^2+\mu w^2\left(\varphi_{pp}+2\varphi_{pq}q\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)+\varphi_{qq}q^2\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2\right)+(*)\leqslant 0,$$

где $(*)$ линейно относительно w.

Так как поверхность $\bar F$ гладкая и строго выпуклая, то при достаточной близости F к $\bar F$ условное сферическое изображение области F_P поверхности F, которая проектируется в G_P, будет иметь сколь угодно малый диаметр при достаточно малом δ_0, причем это свойство равномерно относительно сходимости F к $\bar F$ (т. е. сходимости z к $\bar z$).

Если диаметр условного сферического изображения F_P мал, то можно выбрать такие постоянные $\varkappa$ и $\varkappa_0$, что в G_P будет

$$\frac{1}{e^{n+1}}<\varkappa p+\varkappa_0<\frac{1}{e^n},$$

причем $\varkappa$ и n можно считать сколь угодно большими.

Возьмем теперь функцию $\mu(p)$ вида

$$\mu(p)=-\ln(\varkappa p+\varkappa_0).$$

Тогда

$$\mu''>\varkappa^2 e^{2n},\quad n<\mu<n+1,\quad |\mu'|<\varkappa e^{n+1}.$$

Отсюда следует, что если $\varkappa$ и n достаточно велики, полученное выше неравенство для n невозможно при больших w. Таким образом, в G_P функция w не превосходит некоторого w_P. И мы получаем оценки для r, s, t в точке P:

$$r\leqslant\frac{w_P}{s_0\mu(p)},\quad |s|\leqslant\frac{|\mu' q|\,w_P}{2\delta_0\mu^2(p)},\quad t\leqslant\frac{w_P}{\delta_0\mu(q)}.$$

Итак, при достаточной близости z к $\bar z$ для вторых производных $z(x, y)$ на замкнутом множестве H внутренних точек круга G_ε можно указать оценки модулей, равномерные относительно сходимости z к $\bar z$.

Теперь, когда получены оценки для вторых производных решения $z(x, y)$, то из общей теоремы § 11 гл. II, относящейся к любому уравнению эллиптического типа, можно заключить о существовании априорных оценок для третьих и четвертых производных решения $z(x, y)$. Отсюда следует, что условное решение $\bar{z}$, как предел регулярных решений $z(x, y)$ в круге G_ε, будет по крайней мере трижды дифференцируемым и его третьи производные удовлетворяют условию Липшица. О дальнейшей регулярности решения $\bar{z}$ можно заключить на основании теоремы о регулярности решений уравнений эллиптического типа с регулярными коэффициентами.

Теорема. *Всякое условное решение уравнения*

$$rt-s^2=\varphi(x,\ y,\ z,\ p,\ q),\quad \varphi>0,\quad \varphi_z\geqslant 0,$$

где φ есть k раз дифференцируемая функция ($k\geqslant 3$), является по крайней мере $(k+1)$ раз дифференцируемым.

Если функция φ аналитическая, то решение аналитическое.

Эта теорема была доказана автором [65] для $\varphi=\varphi(x, y)$, и впоследствии И. Я. Бакельманом [19] для $\varphi=\varphi_1(x, y)\varphi_2(p, q)$ при условии $d^2\varphi_2\geqslant c(dp^2+dq^2)$, $c>0$.

Общий случай был рассмотрен автором в работе [66].

§ 7. Сильно эллиптические уравнения Монжа — Ампера

Общее уравнение Монжа — Ампера

$$rt-s^2=ar+2bs+ct+\varphi$$

называется *сильно эллиптическим*, если $\varphi>0$ и форма

$$a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2$$

неотрицательная. В этом параграфе будет доказано существование условных решений такого уравнения.

Пусть F: $z=z(x, y)$ — выпуклая поверхность, однозначно проектирующаяся на плоскость xy, $a(x, y, z, p, q)$ — произвольная непрерывная функция координат точки поверхности x, y, z и угловых коэффициентов p, q ее опорной плоскости в этой точке.

Введем на плоскости xy новую систему декартовых координат $\bar{x}$, $\bar{y}$ и преобразуем функцию a к новым переменным $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, $\bar{p}$, $\bar{q}$. Интеграл Лебега — Стильтьеса

$$h(H)=\iint\limits_{(H)}\bar{a}\,d\bar{p}\,d\bar{y},$$

а также сумму таких интегралов, отвечающих различным функциям a и различным выборам системы координат $\bar{x}$, $\bar{y}$, мы будем называть *условной средней кривизной*.

Определяемая таким образом условная средняя кривизна поверхности представляет собой вполне аддитивную функцию на кольце борелевских множеств.

Пусть последовательность выпуклых поверхностей F_n: $z=z_n(x, y)$ сходится к выпуклой поверхности F. Тогда условные средние кривизны F_n слабо сходятся к условной средней кривизне F, т. е. для любой непрерывной функции f, равной нулю в окрестности края F,

$$\lim_{F_n\to F}\iint\limits_{(F_n)} f\,dh_n=\iint\limits_{(F)} f\,dh.$$

Чтобы доказать это свойство условной средней кривизны, достаточно установить, что для любого замкнутого множества H на плоскости xy

$$\overline{\lim_{F_n\to F}}\, h_n(H)\leqslant h(H),$$

а для любого открытого множества H

$$\underline{\lim_{F_n\to F}}\, h_n(H)\geqslant h(H),$$

где условные кривизны h и h_n поверхностей F и F_n берутся на тех же множествах, которые проектируются в множество H на плоскость xy. Оба эти свойства доказываются аналогично. Мы ограничимся доказательством первого из них.

Не ограничивая общности, можно считать, что система координат xy совпадает с $\bar{x}\bar{y}$, а условная средняя кривизна определяется одним членом —

$$h=\iint a(x, y, z, p, q)\,dp\,dy.$$

Установим соответствие между точками двух плоскостей xy и yp. Именно, точке (x, y) мы сопоставим все точки (y, p), у которых p является угловым коэффициентом опорной плоскости в точке $(x, y, z(x, y))$ поверхности F. Такое отображение мы будем называть условным полусферическим отображением.

Пусть H^* — образ замкнутого множества H при полусферическом отображении поверхности F, а H^*_δ — множество тех точек плоскости yp, каждая из которых имеет по крайней мере два прообраза на плоскости xy, удаленных друг от друга на расстояние, не меньшее δ. Множество H^*_δ состоит из образов тех точек, которые проектируются на прямолинейные отрезки по-

верхности F, параллельные плоскости $y=0$, с длиной проекции на плоскость xy, не меньшей δ. Множество H_δ^* есть замкнутое множество меры нуль, так как на каждой прямой $y=\text{const}$ не более чем счетное множество точек H_δ^*. Заключим множество H_δ^* в некоторое открытое множество меры меньше ε, которое обозначим через $H_{\delta,\varepsilon}^*$.

Условимся писать $A \simeq B$, если величина B при некотором условии сколь угодно близка к A. Тогда при достаточно малом ε

$$h(H) \simeq \iint\limits_{H^*-H_{\delta,\varepsilon}^*} a\,dp\,dy, \qquad (*)$$

$$h_n(H) \simeq \iint\limits_{H_n^*-H_{\delta,\varepsilon}^*} a_n\,dp\,dy,$$

где H_n^* — образ H_n при отображении $(xy)\to(py)$ с помощью поверхности F_n.

Так как множество H замкнутое, то H^* тоже замкнутое множество. При достаточной близости поверхности F_n к F множество H_n^* содержится в сколь угодно малой окрестности множества H^*. Поэтому мера множества $H_n^* - H^*$ сколь угодно мала, если велико n, т. е. если поверхность F_n достаточно близка к F.

Покажем, наконец, что a_n как функции p, y сходятся по мере к функции a при $n\to\infty$. В самом деле, на множестве $H^* - H_{\delta,\varepsilon}^*$ при достаточно большом n, т. е. при достаточной близости F_n к F, $|a_n - a|$ сколь угодно мало вместе с δ в силу непрерывности функции a по переменным x, y, z, p, q, а множество $H_{\delta,\varepsilon}^*$ имеет меру, меньшую ε.

Принимая теперь во внимание соотношение $(*)$, заключаем, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, h_n(H) \leqslant h(H).$$

Соответствующее неравенство в случае открытого множества устанавливается с помощью аналогичного построения. Итак, условная средняя кривизна поверхности F_n слабо сходится к условной средней кривизне поверхности F.

Пусть последовательность выпуклых поверхностей F_n сходится к выпуклой поверхности F, а их условные средние кривизны слабо сходятся к вполне аддитивной функции h. Тогда h есть условная средняя кривизна поверхности F. Это следует из того, что последовательность вполне аддитивных функций множеств не может иметь два различных предела в смысле слабой сходимости.

Для того чтобы отличать условную кривизну поверхности, с которой мы имели дело до настоящего параграфа, от условной средней кривизны, мы будем называть ее в дальнейшем *условной полной кривизной*. Кроме того, условную площадь поверхности мы будем относить не к условному сферическому изображению, как это делали до сих пор, а к проекции поверхности на плоскость xy, и определяем ее по формуле

$$\sigma(H)=\iint_H \varphi(x, y, z, p, q)\,dx\,dy,$$

где φ — любая непрерывная положительная функция.

Условная площадь, очевидно, представляет собой вполне аддитивную функцию на кольце борелевских множеств. Очевидно также, что если выпуклые поверхности F_n сходятся к выпуклой поверхности F, то их условные площади слабо сходятся к условной площади F.

Пусть G — выпуклая область в плоскости xy, $\vartheta'(p, q)$, $\varphi(x, y, z, p, q)$ — непрерывные положительные функции для (x, y) из G и для любых значений переменных z, p, q. Пусть $a_i(x, y, z, p, q)$ — конечная система непрерывных функций, заданных в той же области изменения переменных, и $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$ — соответствующие им декартовы системы координат.

Мы будем рассматривать выпуклые поверхности F, однозначно проектирующиеся на область G (поверхности открытые, без края), обращенные выпуклостью в сторону $z<0$ и расположенные ниже плоскости $z=z_0$. Этот класс поверхностей обозначим Ω.

Для поверхностей класса Ω мы определяем условную площадь σ с помощью функции φ, условную полную кривизну ϑ с помощью функции ϑ' и условную среднюю кривизну h с помощью функций a_i и координатных систем $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$.

Теорема 1. *Пусть для каждой выпуклой поверхности класса Ω условная средняя кривизна h неотрицательна* *) *и выполняется условие*

$$h(G)+\sigma(G)<c<\iint_{(pq)} \vartheta'(p, q)\,dp\,dq. \qquad (**)$$

Тогда в классе Ω существует такая выпуклая поверхность, для которой на любом борелевском множестве H

$$\vartheta(H)=h(H)+\sigma(H).$$

Доказательство. Обозначим $\bar{F}$ класс поверхностей, содержащий поверхность $F\subset\Omega$ и все поверхности, которые полу-

*) $h\geqslant 0$, если все $a_i\geqslant 0$, но не только в этом случае.

чаются из нее сдвигом в направлении оси z. Множество определяемых таким образом классов обозначим $\bar{\Omega}$.

Пусть $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ — классы, определяемые поверхностями $z=z_1(x, y)$ и $z=z_2(x, y)$; тогда класс $\lambda\bar{F}_1+\mu\bar{F}_2$, λ и $\mu>0$, определяется поверхностью $z=\lambda z_1(x, y)+\mu z_2(x, y)$.

Чтобы определить расстояние между классами $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$, мы берем в каждом из них поверхность, упирающуюся краем в плоскость $z=z_0$. Если эти поверхности задаются функциями $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$, то по определению

$$\rho(\bar{F}_1, \bar{F}_2)=\max_G |z_1(x, y)-z_2(x, y)|\delta(x, y),$$

где $\delta(x, y)$ — расстояние точки (x, y) от границы области G. В дальнейшем в обозначении класса $(\bar{F})$ мы будем указывать ту поверхность (F), которая упирается краем в плоскость $z=z_0$.

Определим теперь оператор A на множестве классов $\bar{\Omega}$ следующим образом. Построим выпуклую поверхность Φ, обращенную выпуклостью в сторону $z<0$, с условной полной кривизной ϑ_Φ, равной $h_F+\sigma_F$, с краем не выше плоскости $z=z_0$, расположенную над любой другой такой поверхностью. Существование поверхности Φ обеспечено условием (**) (теорема 2а § 4). Она единственная и упирается краем в плоскость $z=z_0$. Положим теперь

$$A(\bar{F})=\bar{\Phi}.$$

Оператор A непрерывен. В самом деле, при $F_n\to F$ $h_{F_n}+\sigma_{F_n}$ слабо сходится к $h_F+\sigma_F$. Пусть $\bar{\Phi}_n=A(\bar{F}_n)$. Последовательность Φ_n ограничена (это обеспечено условием (**)). Поэтому из Φ_n можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Так как условные полные кривизны Φ_n слабо сходятся к $h_F+\sigma_F$, то предельная поверхность Φ имеет условную полную кривизну, равную $h_F+\sigma_F$. И, следовательно, по теореме единственности $\bar{\Phi}=A(\bar{F})$.

Множество $A(\bar{\Omega})$ ограничено. Возьмем любое замкнутое ограниченное множество $\tilde{\Omega}$ в $\bar{\Omega}$, содержащее $A(\bar{\Omega})$. Покажем, что $A(\tilde{\Omega})$ компактно. Действительно, пусть $A(\bar{F}_k)$ — бесконечная последовательность в $A(\tilde{\Omega})$. Из последовательности поверхностей F_n можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой поверхности F. В силу замкнутости $\tilde{\Omega}$ поверхность $\bar{F}\subset\tilde{\Omega}$. А по доказанному выше $A(\bar{F}_k)\to A(F)$. Отсюда заключаем о компактности $A(\tilde{\Omega})$.

Пусть все поверхности F, задающие классы $A(\tilde{\Omega})$, расположены над плоскостью $z=z_1$. Возьмем в качестве $\tilde{\Omega}$ совокупность всех тех классов $\bar{\Omega}$, которые содержат поверхности,

расположенные между плоскостями $z=z_0$ и $z=z_1$. Множество $\tilde{\Omega}$ выпукло и замкнуто.

По теореме Шаудера о существовании неподвижной точки при отображении выпуклого множества линейного нормированного пространства в свою компактную часть, существует в $\tilde{\Omega}$ такой элемент $\bar{F}$, что $A(\bar{F})=\bar{F}$. Это значит, существует в Ω такая поверхность F, что

$$\vartheta_F = h_F + \sigma_F.$$

Теорема доказана. Эта теорема в другой форме и при других предположениях доказана И. Я. Бакельманом [19].

Пусть в выпуклой области G плоскости xy рассматривается сильно эллиптическое уравнение Монжа — Ампера

$$\vartheta'(rt-s^2) = ar + 2bs + ct + \varphi, \qquad (***)$$

где ϑ' зависит только от p и q, а остальные коэффициенты — от пяти переменных x, y, z, p, q. Все коэффициенты предполагаются непрерывными.

Введем условную среднюю кривизну h, определяемую как сумма четырех функций h_i. Именно:

$$h_1 = \int\int a\,dp\,dy, \qquad h_2 = \int\int c\,dq\,dx,$$

$$h_3 = \int\int b\,d\bar{p}\,d\bar{y}, \qquad h_4 = -\int\int b\,d\bar{q}\,d\bar{x},$$

где $\bar{x}$ и $\bar{y}$ связаны с x и y равенствами

$$\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y), \qquad \bar{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y).$$

Легко проверить, что определяемая таким образом условная средняя кривизна в случае регулярной поверхности равна

$$\int\int (ar + 2bs + ct)\,dx\,dy,$$

и, следовательно, в силу неотрицательности формы

$$a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2$$

неотрицательна для любой выпуклой поверхности $z=z(x, y)$, обращенной выпуклостью в сторону $z<0$. Так как общую выпуклую поверхность можно представить как предел регулярных, то, в силу свойства слабой сходимости условных средних кривизн, и для произвольной выпуклой поверхности $h \geqslant 0$ на любом борелевском множестве H.

Пусть условная полная кривизна ϑ определяется функцией ϑ', а условная площадь σ — функцией φ. Тогда под услов-

ным решением сильно эллиптического уравнения Монжа — Ампера (***) в области G мы будем понимать такую выпуклую функцию, которая задает выпуклую поверхность F, обращенную выпуклостью в сторону $z<0$ и удовлетворяющую условию

$$\vartheta_F = h_F + \sigma_F.$$

Для того чтобы получить теорему существования условного решения, достаточно подчинить коэффициенты уравнения (***) таким требованиям, при которых условия теоремы 1 заведомо выполняются.

Положим

$$\begin{aligned}
\bar{a}(p, y) &= \max_{(q, x, z)} a(x, y, z, p, q),\\
\bar{c}(q, x) &= \max_{(p, y, z)} c(x, y, z, p, q),\\
\bar{b}'(\bar{p}, \bar{y}) &= \max_{(\bar{q}, \bar{x}, z)} |\, b(\bar{x}, \bar{y}, z, \bar{p}, \bar{q})\,|,\\
\bar{b}''(\bar{q}, \bar{x}) &= \max_{(\bar{p}, \bar{y}, z)} |\, b(\bar{x}, \bar{y}, z, \bar{p}, \bar{q})\,|,\\
\bar{\varphi}(x, y) &= \max_{(p, q, z)} \varphi(x, y, z, p, q),
\end{aligned}$$

где максимум берется по x, y, $\bar{x}$, $\bar{y}$ в G, а по p, q, $\bar{p}$, $\bar{q}$ в пределах $-\infty$, $+\infty$ при $z<-N$.

Теорема 2. *Сильно эллиптическое уравнение*

$$\vartheta'(rt - s^2) = ar + 2bs + ct + \varphi$$

в выпуклой области G имеет условное решение, если его коэффициенты удовлетворяют условию

$$\iint\limits_{(pq)} \vartheta'\, dp\, dq > \iint\limits_{(py)} \bar{a}\, dp\, dy + \iint\limits_{(qx)} c\, dq\, dx + \\ + \iint\limits_{(\bar{p}\bar{y})} \bar{b}'\, d\bar{p}\, d\bar{y} + \iint\limits_{(\bar{q}\bar{x})} \bar{b}''\, d\bar{q}\, d\bar{x} + \iint\limits_{G} \bar{\varphi}\, dx\, dy,$$

где интегрирование по p, q, $\bar{p}$, $\bar{q}$ в пределах $-\infty$, $+\infty$, а по x, y, $\bar{x}$, $\bar{y}$ — в пределах, определяемых областью G.

Теорема 2а. *Сильно эллиптическое уравнение*

$$rt - s^2 = ar + 2bs + ct + \varphi$$

в выпуклой области G имеет условное решение, если его коэффициенты удовлетворяют условию

$$a,\ |\, b\,|,\ c,\ \varphi \leqslant \lambda(p, q)\mu(z),$$

где $\mu(z) \to 0$ при $z \to -\infty$,

Для доказательства теоремы 2а достаточно разделить уравнение на $\lambda(1+p^2+q^2)$ и воспользоваться теоремой 2.

Теорема 2б. *Если коэффициенты сильно эллиптического уравнения Монжа — Ампера*

$$rt - s^2 = ar + 2bs + ct + \varphi$$

ограничены, то условное решение существует в любой выпуклой области G.

Теорема 2в. *Если коэффициенты сильно эллиптического уравнения*

$$rt - s^2 = ar + 2bs + ct + \varphi$$

при $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 \leqslant \varepsilon^2$ и $z \leqslant N$ удовлетворяют условию

$$a,\ |b|,\ c,\ \varphi \leqslant f(p,\ q) < \infty,$$

то в каждой достаточно малой выпуклой области G круга $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 \leqslant \varepsilon^2$ существует условное решение уравнения.

Для доказательства теоремы 2в надо разделить уравнение на

$$(1 + f(p,\ q))(1 + p^2 + q^2),$$

а затем воспользоваться теоремой 2.

Теорема 2г. *Если при $p^2+q^2 \to \infty$ и $z<N$ коэффициенты сильно эллиптического уравнения Монжа — Ампера*

$$\vartheta'(rt - s^2) = ar + 2bs + ct + \varphi$$

удовлетворяют условиям

$$\vartheta' > \frac{\varepsilon}{p^2+q^2}, \quad a,\ |b|,\ c < \frac{N}{\sqrt{p^2+q^2}}, \quad \varphi < N,$$

то в выпуклой области G диаметра $D < \frac{\pi\varepsilon}{4N}$ существует условное решение этого уравнения.

Для доказательства надо разделить уравнение на $(1+p^2+q^2)^\alpha$ при достаточно малом α и воспользоваться теоремой 2.

§ 8. Первая краевая задача для условных решений сильно эллиптических уравнений Монжа — Ампера

Так же, как и в случае простейшего уравнения Монжа — Ампера $rt - s^2 = \varphi$ в § 3, для сильно эллиптического уравнения можно рассматривать две краевые задачи.

Первая краевая задача состоит в построении условного решения уравнения в заданной области G, совпадающего с задан-

ной непрерывной функцией на границе G. В этом параграфе мы найдем условия разрешимости этой краевой задачи и рассмотрим вопрос об единственности решения.

Пусть в выпуклой области G плоскости xy задано сильно эллиптическое уравнение Монжа — Ампера

$$\vartheta'(rt-s^2)=ar+2bs+ct+\varphi, \quad \vartheta'=\vartheta'(p,\ q),$$

и ψ — заданная непрерывная функция на границе G. Задача состоит в том, чтобы построить условное решение $z(x,\ y)$ этого уравнения в области G, принимающее на границе области значения ψ.

Решение этой задачи мы также получим с помощью теоремы Шаудера о существовании неподвижной точки. В связи с этим здесь изложение будет менее подробно, чем в предыдущем параграфе.

Обозначим γ кривую, которая проектируется на край области G и задается функцией ψ — граничными значениями решения. Рассмотрим все выпуклые поверхности $z=z(x,\ y)$, которые обращены выпуклостью в сторону $z<0$, проектируются на область G и имеют краем кривую γ. Совокупность таких поверхностей обозначим Ω.

Будем определять условную среднюю и полную кривизны, а также условную площадь с помощью коэффициентов заданного уравнения, как и в предыдущем параграфе.

Возьмем произвольную поверхность F из Ω и с помощью вполне аддитивной функции $h_F+\sigma_F$ построим выпуклую поверхность $A(F)$ из Ω с условной полной кривизной ϑ, равной $h_F+\sigma_F$. Это построение мы себе представляем с помощью конструкции, описанной в § 2. Там такая поверхность получается как предел выпуклых многогранников P, у которых ограничивающие их ломаные γ_P сходятся к γ.

При таком способе построения поверхности $A(F)$ прежде всего надо обеспечить возможность построения многогранников P. А для этого достаточно выполнения неравенства

$$\iint\limits_{(pq)} \vartheta'\,dp\,dq > h_F(G)+\sigma_F(G).$$

Положим

$$\bar{a}(p,\ y)=\max_{(qxz)} a(x,\ y,\ z,\ p,\ q),$$

$$\bar{b}'(\bar{p},\ \bar{y})=\max_{(\bar{q}\bar{x}\bar{z})} |\,b(\bar{x},\ \bar{y},\ z,\ \bar{p},\ \bar{q})\,|,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\bar{\varphi}(x,\ y)=\max_{(pqz)} \varphi(x,\ y,\ z,\ p,\ q),$$

где max берется по x, y, $\bar{x}$, $\bar{y}$ в G, по p, q, $\bar{p}$, $\bar{q}$ в пределах $-\infty$, ∞ и по $z \leqslant \max \psi$. Тогда условие существования многогранников P будет выполнено, если

$$\int\limits_G \int \bar{\varphi}\, dx\, dy + \int\limits_{(py)} \int \bar{a}\, dp\, dy + \ldots + \int\limits_{(\bar{q}\bar{x})} \int \bar{b}''\, d\bar{q}\, d\bar{x} < \infty,$$

$$\int\limits_{(pq)} \int \vartheta'\, dp\, dq = \infty.$$

Но существование многогранников P еще не обеспечивает принадлежности предельной для них поверхности $A(F)$ классу Ω, так как эта поверхность может иметь край, отличный от γ. Для того чтобы найти условия, при которых предельная поверхность имеет краем кривую γ, обратимся к конструкции, приведенной в § 3.

Предположим, что при $p^2+q^2 \to \infty$

$$\vartheta'(p,\ q) > \frac{\varepsilon_0}{p^2+q^2}, \qquad \varepsilon_0 = \text{const} > 0.$$

Тогда указанная конструкция позволяет заключить, что предельная поверхность последовательности многогранников P будет иметь край γ, если кривизна кривой, ограничивающей область G, строго положительна и для любого сегмента $\varkappa$ области G

$$\frac{1}{\sqrt{\delta}} \left(h_F(\varkappa) + \sigma_F(\varkappa) \right) < c < \infty,$$

где δ — хорда сегмента.

Этому условию можно удовлетворить, если потребовать, чтобы каждая из функций

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{a}\, dp, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{b}'\, d\bar{p}, \ \ldots, \ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{c}\, dq \quad \text{и} \quad \bar{\varphi} \tag{$*$}$$

была ограничена некоторой константой.

При выполнении указанных условий все поверхности $A(F)$ ограничены и располагаются над некоторой плоскостью $z=z_0$. Обозначим $\bar{\Omega}$ подмножество всех поверхностей из Ω, которые расположены над плоскостью $z=z_0$. Это подмножество является выпуклым, так как вместе с поверхностями $z=z_1(x,\ y)$ и $z=z_2(x,\ y)$ ему принадлежит поверхность $z=\lambda z_1+\mu z_2$ при $\lambda+\mu=1$, $\lambda>0$, $\mu>0$.

Для того чтобы иметь возможность применить теорему Шаудера, надо установить непрерывность оператора A и компактность множества $A(\bar{\Omega})$.

Непрерывиость оператора A следует из теоремы единствениости для поверхиости с заданным краем и заданной условиой полной кривизной (случай $\vartheta' = \vartheta'(p, q)$), слабой сходимости условиых средиих кривизи и площадей сходящейся последовательиости выпуклых поверхностей. Компактиость множества $A(\overline{\Omega})$ устаиавливается при помощи условий $(*)$.

На основаиии теоремы Шаудера заключаем о существовании такой поверхиости F с краем γ, обращеиной выпуклостью в стороиу $z<0$, для которой

$$\vartheta_F = h_F + \sigma_F.$$

Выпуклая функция $z(x, y)$, задающая эту поверхиость, и есть искомое условиое решение краевой задачи. Получается следующая теорема.

Теорема 1. *Задача Дирихле для сильно эллиптического уравнения Монжа — Ампера*

$$\vartheta'(rt - s^2) = ar + 2bs + ct + \varphi, \quad \vartheta' = \vartheta'(p, q)$$

в области G с краем положительной кривизны разрешима для любой непрерывной функции ψ, заданной в качестве граничных значений, если выполняются следующие условия:

1. *При* $p^2 + q^2 \to \infty$ $\vartheta' > \frac{\varepsilon}{p^2+q^2}$, $\varepsilon = \mathrm{const} > 0$.
2. *Функции*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{a}\, dp, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \overline{b}'\, d\overline{p}, \ \ldots, \ \overline{\varphi}$$

ограничены.

Теорема 1а. *Пусть кривая, ограничивающая выпуклую область G плоскости xy, имеет положительную кривизну. Тогда задача Дирихле для сильно эллиптического уравнения Монжа — Ампера*

$$\vartheta'(rt - s^2) = ar + 2bs + ct + \varphi$$

в области G разрешима при любых непрерывных граничных значениях, если при $p^2 + q^2 \to \infty$ выполняются следующие условия:

$$\vartheta' > \frac{\varepsilon}{p^2+q^2}; \quad a, |b|, c < \frac{N}{(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}+\alpha}}; \quad \varphi < N,$$

где $\varepsilon = \mathrm{const} > 0$, $N = \mathrm{const} < \infty$, $\alpha = \mathrm{const} > 0$.

Теорема 1а следует из теоремы 1.

Теорема 1б. *Для уравнения*

$$rt - s^2 = ar + 2bs + ct + \varphi$$

справедливо утверждение теоремы 1а, *если при* $p^2+q^2\to\infty$

$$a,\ |b|,\ c<N(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}-\alpha},\quad \varphi<N(p^2+q^2),\ N<\infty,\ \alpha>0.$$

Эта теорема следует из теоремы 1а. Достаточно уравнение разделить на $1+p^2+q^2$.

Теорема 1в. *Теоремы* 1а *и* 1б *имеют место и при* $\alpha=0$, *если кривизна ограничивающей область* G *кривой достаточно велика (а следовательно, сама область достаточно мала).*

Теорема 1в следует непосредственно из теоремы 1.

В § 10 будет доказано, что обобщенные решения сильно эллиптических уравнений Монжа — Ампера с регулярными коэффициентами при весьма общих предположениях являются регулярными. В связи с этим теорема единственности, которая здесь будет доказана, относится к регулярным решениям *).

Теорема 2. *Пусть в области* G *плоскости* xy *рассматривается сильно эллиптическое уравнение Монжа — Ампера*

$$rt-s^2=ar+2bs+ct+\varphi$$

с регулярными коэффициентами, удовлетворяющими условиям:

1) $\varphi_z\geqslant 0$,

2) *квадратичная форма*

$$a_z\xi^2+2b_z\xi\eta+c_z d\eta^2$$

неотрицательна.

Тогда если решения $z_1(x,\ y)$ *и* $z_2(x,\ y)$, *обращенные выпуклостью в сторону* $z<0$, *совпадают на границе области* G, *то они совпадают во всей области* G.

Доказательство. Перепишем наше уравнение так:

$$(r-c)(t-a)-(s+b)^2=ac-b^2+\varphi.$$

Утверждается, что для каждого решения $z(x,\ y)$, обращенного выпуклостью в сторону $z<0$,

$$r-c>0,\quad t-a>0.$$

В самом деле, $r-c$ и $t-a$ одного знака, так как $ac-b^2\geqslant 0$ и $\varphi>0$. Далее, при повороте системы координат xy знаки $r-c$ и $t-a$ не изменяются, так как при этом нашлась бы система координат, в которой $(r-c)(t-a)-(s+b)^2\leqslant 0$, что невозможно.

Повернем систему координат так, чтобы в данной точке было $s=0$. Если теперь $r-c<0$ и $t-a<0$, то в силу того, что $r,\ t>0$ и $a,\ c>0$, получим

$$|r-c|<c,\quad |t-a|<a.$$

*) В указанном параграфе по существу доказана теорема единственности для условных решений.

Отсюда

$$(r-c)(t-a)-(s+b)^2 < ac-b^2,$$

что невозможно.

Итак, для каждого решения, обращенного выпуклостью в сторону $z<0$, будет $r-c>0$ и $t-a>0$.

Подставляя решения z_1 и z_2 в наше уравнение и вычитая почленно, получим

$$Au_{xx}-2Bu_{xy}+Cu_{yy}=$$
$$=\frac{1}{2}(r_1+r_2)(a_1-a_2)+(s_1+s_2)(b_1-b_2)+\frac{1}{2}(t_1+t_2)(c_1-c_2)+\varphi_1-\varphi_2,$$

где

$$A=\frac{1}{2}(t_1+t_2-a_1-a_2),\quad B=\frac{1}{2}(s_1+s_2+b_1+b_2),$$
$$C=\frac{1}{2}(r_1+r_2-c_1-c_2),$$

или

$$Au_{xx}-2Bu_{xy}+Cu_{yy}=D_pu_x+D_qu_y+D_zu,$$

где

$$D=\frac{1}{2}(a(r_1+r_2)+2b(s_1+s_2)+c(t_1+t_2))+\varphi,$$

а производные взяты для некоторых средних значений аргументов p, q, z.

Так как форма

$$a_z\xi^2+2b_z\xi\eta+c_z\eta^2$$

неотрицательная, а решения z_1 и z_2 представляют собой выпуклые функции, то

$$a_z(r_1+r_2)+2b_z(s_1+s_2)+c_z(t_1+t_2)\geqslant 0.$$

Следовательно, $D_z\geqslant 0$.

Уравнение для $u(x, y)$ эллиптического типа. И так как $D_z\geqslant 0$, то $u(x, y)$, будучи равным нулю на границе G, равно нулю всюду в G. Теорема доказана.

§ 9. Регулярное решение специальной краевой задачи для сильно эллиптического уравнения Монжа — Ампера

При доказательстве регулярности условных решений сильно эллиптических уравнений Монжа — Ампера возникает необходимость построить последовательность регулярных решений, сходящихся к данному условному решению. В связи с этим в настоящем параграфе будет рассмотрена специальная краевая задача, которая позволит выполнить указанное построение.

Пусть в некоторой окрестности начала координат задано сильно эллиптическое уравнение Монжа — Ампера

$$rt - s^2 = ar + 2bs + ct + \varphi$$

с достаточно регулярными коэффициентами. Возьмем две достаточно регулярные функции $\lambda(\rho)$ и $\mu(\rho)$, определяемые условиями

$$\begin{array}{rcll} \mu = 1, & \lambda = 0 & \text{при} & \varepsilon \geqslant \rho > \varepsilon', \\ \mu = 1, & 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 & \text{при} & \varepsilon' \geqslant \rho > \varepsilon'', \\ 0 \leqslant \mu \leqslant 1, & \lambda = 1 & \text{при} & \varepsilon'' \geqslant \rho > \varepsilon''', \\ \mu = 0, & \lambda = 1 & \text{при} & \varepsilon''' \geqslant \rho > 0, \end{array}$$

и составим уравнение

$$rt - s^2 = \bar{a}r + 2\bar{b}\bar{s} + \bar{c}t + \bar{\varphi}, \tag{$*$}$$

где

$$\bar{a}r + 2\bar{b}s + \bar{c}t = \lambda(\rho)(ar + 2bs + ct),$$
$$\bar{\varphi} = \lambda(\rho)\varphi + \mu(\rho), \quad \rho^2 = x^2 + y^2.$$

Это уравнение будет также сильно эллиптическим; мы будем рассматривать его в круге G_ε: $x^2 + y^2 \leqslant \varepsilon^2$.

Условимся говорить, что регулярная функция h, заданная на окружности круга G_ε, принадлежит классу Ω_R, если $|h| \leqslant R$ и через кривую, задаваемую этой функцией, можно провести выпуклую поверхность, обращенную выпуклостью в сторону $z<0$, с условным сферическим изображением, содержащимся в круге ω_R: $p^2 + q^2 \leqslant R^2$.

Лемма. *Пусть функция*

$$\Phi = a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 + \varphi$$

переменных ξ, η, x, y, z, p, q — неубывающая по z и выпуклая по p, q.

Тогда, каково бы ни было R, при достаточно малом ε в круге G_ε существует регулярное решение уравнения ($*$), обращенное выпуклостью в сторону $z<0$, принимающее на окружности круга G_ε значения произвольной функции h класса Ω_R.

На ε не оказывает влияния ни выбор чисел ε', ε'', ε''', ни функций λ, μ, с помощью которых определяются коэффициенты уравнения ($*$).

При $\varepsilon''' \to \varepsilon$ решение, существование которого утверждается, сходится к условному решению исходного уравнения

$$rt - s^2 = ar + 2bs + ct + \varphi,$$

принимающему те же значения h на окружности круга G_ε.

Для того чтобы доказать существование решения, о котором идет речь в лемме, достаточно установить существование ап-

риорных оценок для максимума модуля решения и его производных первого и второго порядка.

Независимость числа ε от конкретного выбора чисел ε', ε'' и ε''', а также функций λ и μ будет доказана, если указанные оценки могут быть установлены при малом ε и любых ε', ε'', ε''', λ, μ.

Наконец, для того чтобы доказать, что решение уравнения (*) при $\varepsilon''' \to \varepsilon$ сходится к условному решению исходного уравнения с теми же граничными значениями (h), достаточно показать, что априорные оценки для первых производных решения уравнения (*) можно считать не зависящими от чисел ε', ε'', ε''' и функций λ, μ. Покажем это.

Пусть ε'''_k — последовательность чисел ε''', сходящаяся к ε, z_k — соответствующие решения уравнения (*). Так как все решения z_k совпадают на окружности круга G_ε, а их производные равномерно ограничены, то в достаточно малой окрестности этой окружности любые два решения z_k и z_l отличаются сколь угодно мало. Следовательно, предельная функция для последовательности z_k, если она существует, на окружности круга G_ε равна h.

Покажем теперь, что решения z_k сходятся в круге G_ε. Возьмем любое $\bar\varepsilon < \varepsilon$. Тогда при ε'''_k, $\varepsilon'''_l > \varepsilon$ функции z_k и z_l будут решениями исходного уравнения в круге $G_{\bar\varepsilon}$, а следовательно, максимум $|z_k - z_l|$ в круге G_ε достигается на границе круга $G_{\bar\varepsilon}$ (см. доказательство теоремы 2 § 8). Но при достаточно малом $\varepsilon - \bar\varepsilon$ по доказанному $|z_k - z_l|$ на окружности круга $G_{\bar\varepsilon}$ сколь угодно мало. Таким образом, решения z_k образуют сходящуюся последовательность. Очевидно, предельная функция будет условным решением исходного уравнения в круге G_ε. Утверждение доказано полностью.

Начнем с оценки модуля решения z уравнения (*). Так как решение представляет собой выпуклую функцию, обращенную выпуклостью в сторону $z<0$, то ее максимум достигается на границе круга G_ε и, следовательно, $z \leqslant R$. Оценим теперь z снизу.

Введем функцию

$$\psi(p, q) = \max_{(x, y, z)} \{\bar a, |\bar b|, \bar c, \bar\varphi\}\ ^{*}),$$

где максимум берется по $(x, y) \in G_{\varepsilon_0}$, $\varepsilon < \varepsilon$ и $z \leqslant R$. Тогда из уравнения (*) получается следующее неравенство:

$$rt - s^2 \leqslant \psi(p, q)(r + t + 1).$$

*) Так как функция φ и форма $a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2$ неубывающие по z, то функция $\psi(p, q)$ конечна при любых конечных p и q.

Разделим это неравенство на $\psi(1+p^2+q^2)$ и усилим его следующим образом:

$$\frac{rt-s^2}{\psi(1+p^2+q^2)} \leqslant \frac{r}{1+p^2} + \frac{t}{1+q^2} + \frac{1}{1+p^2+q^2}.$$

Интегрируя это неравенство по поверхности F, задаваемой решением, и еще усиливая, получим

$$\iint\limits_{F^*} \frac{dp\,dq}{\psi(1+p^2+q^2)} \leqslant 4\pi\varepsilon + \varepsilon^2,$$

где интегрирование в левой части неравенства выполняется по условному сферическому изображению поверхности F.

Теперь мы утверждаем, что при достаточно малом ε будет $|z| < 2R$. Действительно, в противном случае при $\varepsilon \to 0$ область F^* распространяется на всю плоскость pq и, следовательно, левая часть неравенства ограничена снизу положительным числом, в то время как правая стремится к нулю, что невозможно. Итак, существование априорной оценки для $|z|$ установлено.

Нетрудно проследить и убедиться, что эту оценку можно считать не зависящей от чисел ε', ε'', ε''' и функций λ, μ, с помощью которых осуществляется переход от данного уравнения к уравнению $(*)$.

Оценим теперь первые производные решения $z(x, y)$. Перепишем уравнение $(*)$ в виде

$$(r-\bar{c})(t-\bar{a})-(s+\bar{b})^2=\bar{K},$$

где

$$\bar{K}=\bar{\varphi}+\bar{a}\bar{c}-\bar{b}^2.$$

По предположению, функция h принадлежит классу Ω_R. Это значит, что через контур, задаваемый этой функцией, проходит поверхность $z=h(x, y)$, обращенная выпуклостью в сторону $z<0$, с условным сферическим изображением, содержащимся в круге ω_R: $p^2+q^2 \leqslant R^2$. Рассмотрим функцию

$$\tilde{z}=h(x, y)+\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}(x^2+y^2-\varepsilon^2).$$

Внутри круга G_ε она ограничена вместе с первыми производными, причем равномерно относительно выбора функции h из Ω_R и $\varepsilon<1$. На окружности круга G_ε функция $\tilde{z}=h$. Утверждается, что при достаточно малом ε в круге G_ε будет $\tilde{z} \leqslant z$, какова бы ни была функция h.

Допустим, утверждение неверно. Тогда $\tilde{z}-z$ достигает положительного максимума в некоторой точке P внутри круга G_ε.

Обозначим $\tilde{K}$ результат подстановки $\tilde{z}(x, y)$ в левую часть уравнения, т. е.

$$\tilde{K} = (\tilde{r} - \tilde{c})(\tilde{t} - \tilde{a}) - (\tilde{s} + \tilde{b})^2.$$

Вычитая из этого равенства уравнение для $z(x, y)$ и полагая $u = \tilde{z} - z$, получим

$$Au_{xx} - 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = A(\tilde{c} - \bar{c}) - 2B(\tilde{b} - \bar{b}) + C(\tilde{a} - \bar{a}) + \tilde{K} - K,$$

где

$$A = \frac{1}{2}(t + \tilde{t} - \tilde{a} - \bar{a}), \quad B = \frac{1}{2}(s + \tilde{s} + \tilde{b} + \bar{b}), \quad C = \frac{1}{2}(r + \tilde{r} - \tilde{c} - \bar{c}).$$

Квадратичная форма

$$(r - \bar{c})\xi^2 - 2(s + \bar{b})\xi\eta + (t - \bar{a})\eta^2$$

положительно определенная. При достаточно малом ε (независимо от h) форма

$$(\tilde{r} - \tilde{c})\xi^2 - 2(\tilde{s} + \tilde{b})\xi\eta + (\tilde{t} - \tilde{a})\eta^2$$

тоже положительно определенная. Следовательно, форма

$$A\xi^2 - 2B\xi\eta + C\eta^2$$

положительно определенная, и в точке P

$$Au_{xx} - 2Bu_{xy} + Cu_{yy} \leqslant 0.$$

Так как квадратичная форма

$$\bar{a}\xi^2 + 2\bar{b}\xi\eta + \bar{c}\eta^2$$

не убывает по z, то в P форма

$$(\tilde{a} - \bar{a})\xi^2 + 2(\tilde{b} - \bar{b})\xi\eta + (\tilde{c} - \bar{c})\eta^2$$

является неотрицательной. (В точке P имеем $\tilde{p} = p$, $\tilde{q} = q$, $\tilde{z} > z$.) Следовательно,

$$A(\tilde{c} - \bar{c}) - 2B(\tilde{b} - \bar{b}) + C(\tilde{a} - \bar{a}) \geqslant 0.$$

Так как функция K не убывает по z, то ее значение в точке P не превосходит $K(x, y, \tilde{z}, \tilde{p}, \tilde{q})$ и, следовательно, меньше некоторой константы, не зависящей от конкретной функции h из Ω_H и числа ε. Напротив, $\tilde{K}$ сколь угодно велико при малом ε независимо от h. Отсюда заключаем, что при достаточно малом ε разность $\tilde{K} - K > 0$, и, таким образом, приходим к противоречию, так как левая часть уравнения для u неположительна, а правая — больше нуля.

Итак, при достаточно малом ε в круге G_ε

$$\tilde{z}-z\leqslant 0.$$

Как показано в § 5, это позволяет оценить первые производные z на окружности круга G_ε, а следовательно, и во всем круге, так как $z(x, y)$ — выпуклая функция.

Оценки вторых производных решения $z(x, y)$ уравнения $(*)$ мы получим сначала на окружности круга G_ε. Для этого перейдем к полярным координатам ρ, ϑ.

Так как на окружности круга G_ε имеем $z=h$, то $z_{\vartheta\vartheta}=h_{\vartheta\vartheta}$; и мы получаем оценку для $|z_{\vartheta\vartheta}|$.

Чтобы оценить производную $z_{\rho\vartheta}$, заметим, что поверхность $z=\zeta(x, y)$, где $\zeta=z_\vartheta$, над кольцом $\varepsilon'^2\leqslant x^2+y^2\leqslant\varepsilon^2$ является поверхностью неположительной кривизны, так как $z(x, y)$ в этом кольце удовлетворяет уравнению

$$rt-s^2=1.$$

Отсюда, как и в § 5, получаем оценку для $|z_{\rho\vartheta}|$.

Оценка для $z_{\rho\rho}$ получается буквально так же, как и в § 5 для уравнения $rt-s^2=\varphi$. Наличие в уравнении $(*)$ выражения $\bar{a}r+2\bar{b}s+\bar{c}t$ в этом рассуждении несущественно, так как это выражение неотрицательно.

Итак, существование априорных оценок вторых производных решения на окружности круга G_ε установлено.

Оценим, наконец, вторые производные решения уравнения $(*)$ во всем круге G_ε.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$w=\lambda z'',\qquad \lambda=e^{\alpha(x^2+y^2)},$$

где дифференцирование z выполняется по произвольному направлению. Эта функция в круге G_ε достигает абсолютного максимума w_0 в некоторой точке P для некоторого направления. Если оценка для w_0 получена, то мы получаем оценки для r и t:

$$r\leqslant\frac{w_0}{\min\lambda},\qquad t\leqslant\frac{w_0}{\min\lambda},$$

после чего оценка для s получается из уравнения.

Если максимум w достигается на окружности круга G_ε, то, очевидно,

$$w_0<4e^{\alpha\varepsilon^2}M,$$

где M — максимум модулей вторых производных r, s, t на окружности G_ε.

Оценим w_0 в случае, когда точка P является внутренней точкой круга G_ε. Примем то направление в точке P, для ко-

торого достигается максимум w, за направление оси x. Тогда в точке P функция

$$w=\lambda r, \quad \lambda=e^{\alpha\,(x^2+y^2)}$$

тоже достигает максимума, причем в этой точке $s=0$, а $t\leqslant r$.

Дифференцируя уравнение (*) два раза по x последовательно, получаем

$$r_x(t-a)-2s_x(s+b)+t_x(r-c)-a'_xr-2b'_xs-c'_xt-\varphi'_x=0,$$

$$\begin{aligned} r_{xx}(t-a)-2s_{xx}(s+b)+t_{xx}(r-c)-\left(a''_{xx}r+2b''_{xx}s+c''_{xx}t\right)-& \qquad (**)\\ -2\left(a'_xr_x+2b'_xs_x+c'_xt_x\right)+2\left(r_xt_x-s_x^2\right)-\varphi''_{xx}=0.& \end{aligned}$$

Здесь для простоты записи черта над обозначениями коэффициентов уравнения (*) опущена. Во избежание недоразумений полное дифференцирование обозначается штрихом.

В точке P, где w достигает максимума,

$$r_x=w\left(\frac{1}{\lambda}\right)_x=-\frac{r\lambda_x}{\lambda}, \qquad s_x=r_y=-\frac{r\lambda_y}{\lambda},$$

$$r_{xx}=\frac{w_{xx}}{\lambda}+r\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{xx},$$

$$s_{xx}=r_{xy}=\frac{w_{xy}}{\lambda}+r\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{xy},$$

$$t_{xx}=r_{yy}=\frac{w_{yy}}{\lambda}+r\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{yy}.$$

С помощью первого из равенств (**) выражение $r_xt_x-s_x^2$ можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned} r_xt_x-s_x^2=-\frac{1}{r}\left(r_x^2(t-a)-2s_xr_x(s+b)+s_x^2(r-c)\right)-&\\ -\frac{c}{r(r-c)}\left(r_x^2(t-a)-2r_xs_x(s+b)+s_x^2(r-c)\right)+\frac{Ar^2r_x}{r-c},& \end{aligned}$$

где A — некоторое ограниченное выражение.

Теперь, принимая во внимание полученные выше выражения для r_x, r_y, r_{xx}, s_{xx} и t_{xx} в точке P и замечая, что в этой точке $s=0$, а $t<r$, можем второе равенство (**) преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda}\left(w_{xx}(t-a)-2w_{xy}(s+b)+w_{yy}(r-c)\right)-r^2\left(a_{pp}r+2b_{pp}s+c_{pp}t\right)-&\\ -\frac{c}{r(r-c)}\left(r_x^2(t-a)-2r_xs_x(s+b)+s_x^2(r-c)\right)-&\\ -\frac{r}{\lambda}\left(\lambda_{xx}(t-a)-2\lambda_{xy}(s+b)+\lambda_{yy}(r-c)\right)+B(1+\alpha\varepsilon)r^2=0,& \qquad (***) \end{aligned}$$

где B — некоторое выражение, которое при $r-c>1$ не превосходит некоторой постоянной, не зависящей от вторых производных z.

Примем $\alpha=\frac{1}{\varepsilon}$. Тогда четвертая скобка равенства (***) при больших r имеет порядок r^2/ε, а пятая — порядок r^2. Поэтому при достаточно малом фиксированном ε и r, большем некоторого r_0, сумма двух последних скобок равенства (***) отрицательна. Отсюда следует, что в точке P имеем $r\leqslant r_0$. В противном случае равенство (***) невозможно.

Действительно,

$$w_{xx}(t-a)-2w_{xy}(s+b)+w_{yy}(r-c)\leqslant 0,$$

так как w в P достигает максимума. Далее

$$-r^2(a_{pp}r+2b_{pp}s+c_{pp}t)\leqslant 0$$

из-за выпуклости функции $a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2$ по переменным p, q. И, наконец,

$$-\frac{c}{r(r-c)}\left(r_x^2(t-a)-2r_xs_x(s+b)+s_x^2(r-c)\right)<0,$$

так как форма $(r-c)\xi^2-2(s+b)\xi\eta+(t-a)\eta^2$ положительная. Таким образом, при $r>r_0$ левая часть равенства (***) отрицательна. Следовательно, r в точке P не может быть больше r_0, и мы получаем оценку для w_0:

$$w_0\leqslant r_0e^{\varepsilon}.$$

И существование априорных оценок для вторых производных тем самым доказано.

§ 10. Регулярность условных решений сильно эллиптических уравнений Монжа — Ампера с регулярными коэффициентами

В этом параграфе при весьма общих предположениях будет доказано, что всякое условное решение сильно эллиптического уравнения Монжа — Ампера

$$rt-s^2=ar+2bs+ct+\varphi$$

с регулярными коэффициентами является регулярным.

Пусть в области G плоскости xy задано сильно эллиптическое уравнение Монжа — Ампера с регулярными коэффициентами, зависящими от параметра α, причем, когда $\alpha\to 0$, коэффициенты уравнения при $(x, y)\in G$, $p^2+q^2+z^2<R^2$ остаются равномерно ограниченными вместе с производными до третьего порядка и $\varphi>c_0>0$.

Пусть решение этого уравнения z_α при $\alpha \to 0$ сходится к выпуклой функции z_0. Очевидно, эта функция представляет собой условное решение предельного уравнения.

Лемма. *Пусть H — любое замкнутое множество в области G. Тогда для вторых производных решений z_α, сходящихся к z_0, можно указать оценки в точках множества H, равномерные относительно предельного перехода $\alpha \to 0$.*

Доказательство. Пусть P — произвольная точка множества H. Проведем через нее прямую, параллельную оси z. Она пересечет поверхность F_0: $z=z_0(x, y)$ в точке P_0, а поверхность F_α: $z=z_\alpha(x, y)$ — в точке P_α. Проведем в точке P_0 какую-нибудь опорную плоскость и сместим ее в направлении $z>0$ до упора в край поверхности F_α (мы предполагаем, как всегда, что поверхность F_0 обращена выпуклостью в сторону $z<0$). Плоскость в этом положении обозначим σ_α.

Так как поверхность F_0 строго выпукла ($\varphi>c_0>0$), то при достаточной близости α к нулю расстояние точки P_α от плоскости σ_α в направлении оси z будет больше некоторого $\delta_0>0$ независимо от точки P.

Пусть плоскость σ_α задается уравнением $z=\xi_\alpha(x,y)$. Введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$w = \delta\mu z''_\alpha,$$

где

$$\delta = \zeta_\alpha - z_\alpha, \quad \mu = e^{\beta z'_\alpha},$$

а дифференцирование (указанное штрихами) выполняется по произвольному направлению. Эту функцию мы будем рассматривать в области G_P, определяемой условием $\zeta_\alpha - z_\alpha>0$. Функция w достигает абсолютного максимума в некоторой внутренней точке O области G_P для некоторого направления из этой точки. Мы примем точку O за начало координат, а экстремальное направление в ней — за направление оси x. Тогда функция

$$w = \delta\mu r_\alpha, \quad \text{где} \quad \mu = e^{\beta p_\alpha}, \quad p_\alpha = \frac{\partial z_\alpha}{\partial x}, \quad r_\alpha = \frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial x^2},$$

достигает максимума в начале координат, причем в этой точке $s = \frac{\beta q r_\alpha}{2}$, а $t \leqslant e^{\beta(p_\alpha - q_\alpha)}$.

Полагая $\delta\mu=\lambda$, в точке O, где w достигает максимума, имеем

$$r_x = -\frac{r\lambda_x}{\lambda}, \quad s_x = r_y = -\frac{r\lambda_y}{\lambda},$$

$$r_{xx} = \frac{w_{xx}}{\lambda} + w\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{xx}, \quad r_{xy} = \frac{w_{xy}}{\lambda} + w\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{xy}, \quad r_{yy} = \frac{w_{yy}}{\lambda} + w\left(\frac{1}{\lambda}\right)_{yy}.$$

Чтобы упростить запись, мы индекс α в дальнейшем будем опускать.

Дифференцируя заданное уравнение два раза по x, последовательно получим:

$$
\begin{gathered}
(r_x - c'_x)(t - a) + (r - c)(t_x - a'_x) - 2(s + b)(s_x + b_x) = K'_x, \\
(r_{xx} - c'_{xx})(t - a) - 2(s_{xx} + b''_{xx})(s + b) + \\
+ (t_{xx} - a''_{xx})(r - c) + 2(r_x - c'_x)(t_x - a'_x) - (s_x + b'_x)^2 = K''_{xx}, \\
K = \varphi + ac - b^2.
\end{gathered} \qquad (*)
$$

Используя выражения для первых и вторых производных r в точке O, выражение для t_x из первого равенства $(*)$, а также оценки s и t через r в точке O, указанные выше, можно привести второе равенство $(*)$ к следующему виду:

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{\lambda}\{w_{xx}(t - a) - 2w_{xy}(s + b) + w_{yy}(r - c)\} - \\
- \{(c_{pp}r^2 + 2c_{pq}rs + c_{qq}s^2)(t - a) - 2(b_{pp}r^2 + 2b_{pq}rs + b_{qq}s^2)(s + b) + \\
+ (a_{pp}r^2 + 2a_{pq}rs + a_{qq}s^2(r - c)\} - \\
- \frac{c}{r(r - c)}\{(t - a)r_x^2 + 2(s + b)r_x s_x + (r - c)s_x^2\} - \\
- \frac{\beta^2 w^2 \varphi}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}(A\beta w^2 + B\beta w + C) = 0,
\end{gathered}
$$

где A, B, C — выражения, которые не превосходят некоторой постоянной M, если достаточно велико w.

Пусть при $w \geqslant w_0$ величины $|A|$, $|B|$ и $|C|$ меньше M. Возьмем β настолько большим, чтобы при $w \geqslant w_0$ было

$$
-\beta^2 w^2 \varphi + M(\beta w^2 + \beta w + 1) < 0.
$$

Мы утверждаем, что в области G_P функция $w < w_0$. Действительно, при указанном выборе w_0 и β второе из равенств $(*)$ в точке O невозможно. Именно, после указанного преобразования этого равенства первая строка в нем будет неположительна, так как w достигает максимума в точке O. Следующий член неположителен из-за выпуклости формы $a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2$ по переменным p, q. Предпоследняя строка неположительна из-за положительности формы $(t - a)\xi^2 - 2(s + b)\xi\eta + (r - c)\eta^2$. Наконец, последняя строка отрицательна по выбору чисел w_0 и β.

Оценив w в области G_P, без труда оцениваем r, s и t в точке P. Можно было бы проследить и убедиться, что таким образом могут быть указаны оценки для вторых производных r, s, t, равномерные относительно выбора точки P в H и относительно параметра α при достаточной близости его к нулю.

Теорема 1. *Пусть в области G плоскости xy рассматривается сильно эллиптическое уравнение Монжа — Ампера*

$$rt - s^2 = ar + 2bs + ct + \varphi,$$

коэффициенты которого дифференцируемы по p, q, z, причем функция φ и форма $a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2$ являются неубывающими по z.

Тогда, если условные решения z и z' этого уравнения, обращенные выпуклостью в сторону $z<0$, совпадают на границе G, то они совпадают в G тождественно.

Доказательство. Для того чтобы упростить доказательство и придать наглядность нашим построениям, мы предположим, что одно из решений, например z', является регулярным, а коэффициенты уравнения не зависят от z. Оба эти предположения не являются существенными и в предлагаемом доказательстве не используются по существу.

Введем в рассмотрение уравнение

$$rt - s^2 = (a+\varepsilon) r + 2bs + (c+\varepsilon) t + \varphi - \varepsilon a - \varepsilon c - \varepsilon^2.$$

Оно имеет регулярное решение $z'(x, y) + \frac{\varepsilon}{2}(x^2+y^2)$ и условное решение $z(x, y) + \frac{\varepsilon}{2}(x^2+y^2)$. Первое утверждение проверяется непосредственно подстановкой решения в уравнение. Чтобы убедиться в справедливости второго утверждения, поступим следующим образом.

То, что $z(x, y)$ является условным решением исходного уравнения, в сущности значит, что для любой непрерывной в области G функции $\psi(x, y)$ и для любой последовательности регулярных выпуклых функций z_α, сходящихся к z,

$$\iint_G (r_\alpha t_\alpha - s_\alpha^2 - ar_\alpha - 2bs_\alpha - ct_\alpha - \varphi)\psi\, dx\, dy \to 0.$$

Если теперь в подынтегральную функцию ввести вместо z_α функцию $\bar z_\alpha = z_\alpha + \frac{\varepsilon}{2}(x^2+y^2)$, то получим

$$\iint_G (\bar r_\alpha \bar t_\alpha - \bar s_\alpha^2 - (a+\varepsilon)\bar r_\alpha - 2b\bar s_\alpha - (c+\varepsilon)\bar t_\alpha - \varphi - \\ - \varepsilon a - \varepsilon c - \varepsilon^2)\psi\, dx\, dy \to 0.$$

А это и значит, что функция $\bar z_\alpha$ является условным решением преобразованного уравнения.

Не ограничивая общности, в дальнейшем можно считать, что квадратичная форма

$$a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 > \frac{\varepsilon}{2}(\xi^2+\eta^2)$$

н решення z и z' допускают представления

$$z = z^* + \frac{\varepsilon}{2}(x^2 + y^2), \qquad z' = z'^* + \frac{\varepsilon}{2}(x^2 + y^2),$$

где z^* и z'^* — выпуклые функцин.

Допустим, теорема неверна н рассматриваемые решення, совпадающие на границе G, не совпадают внутри G. Пусть для определенности в некоторой точке $z' - z > 0$. Тогда $z' - z$ достигает в G положительного максимума m.

Пусть F и F' — выпуклые поверхности, задаваемые функциями z и z' соответственно. Сместим поверхность F' в сторону $z < 0$ на расстояние $m' < m$, близкое к m. При этом поверхности F и F' будут пересекаться. Всегда можно подобрать смещенне таким образом, чтобы пересечение происходило по замкнутым кривым. Пусть γ — одна из этих кривых.

Построим выпуклую оболочку поверхностей F' и F (после смещения F') и обозначим Φ ту ее часть, которая обращена выпуклостью в сторону $z < 0$. Поверхность Φ состоит нз кусков поверхностей F, F' и развертывающихся поверхностей, отделяющих эти куски. При достаточной близостн m' к m поверхность Φ прилегает к F' вдоль края.

Обозначим $\bar{F}$ связный кусок поверхности F, расположенный внутри области, ограниченной крнвой γ, и принадлежащий оболочке Φ. Пусть $\bar{G}^*$ — сферическое изображение этого куска. Обозначим $\bar{F}'$ соответствующий кусок поверхности F', имеющий то же сферическое изображение $\bar{G}^*$. Очевидно, поверхности $\bar{F}$ н $\bar{F}'$ имеют вдоль граннц общие опорные плоскости.

Перейдем теперь от точечного задания поверхностей в декартовых координатах x, y, z к тангенциальному заданию в координатах $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, которые представляют собой угловые коэффициенты опорной плоскости ($\bar{x}$ и $\bar{y}$) и с обратным знаком координату z точки пересечения опорной плоскости с осью z. Аналнтическая связь между этими координатами устанавливается равенством

$$z + \bar{z} = x\bar{x} + y\bar{y}.$$

Если поверхность регулярна и строго выпукла, то нмеют место следующие формулы:

$$\bar{x} = p, \quad \bar{y} = q, \quad x = \bar{p}, \quad y = \bar{q},$$

$$\bar{r} = \frac{1}{\Delta} r, \quad \bar{s} = \frac{1}{\Delta} s, \quad \bar{t} = \frac{1}{\Delta} t,$$

$$r = \frac{1}{\bar{\Delta}} \bar{r}, \quad s = \frac{1}{\bar{\Delta}} \bar{s}, \quad t = \frac{1}{\bar{\Delta}} \bar{t},$$

$$\Delta = rt - s^2, \quad \bar{\Delta} = \bar{r}\bar{t} - \bar{s}^2.$$

Преобразуем данное уравнение к тангенциальным координатам. Получим

$$\varphi(\overline{r}\overline{t}-\overline{s}^2)+a\overline{r}+2b\overline{s}+c\overline{t}-1=0.$$

Функция $\overline{z}'(\overline{x}, \overline{y})$, задающая поверхность F' в тангенциальных координатах, очевидно, удовлетворяет этому уравнению. Ему удовлетворяет в обобщенном смысле также функция $\overline{z}(\overline{x}, \overline{y})$, задающая поверхность F в тангенциальных координатах. Именно, каковы бы ни были непрерывная функция $\psi(\overline{x}, \overline{y})$ и последовательность регулярных выпуклых поверхностей $\widetilde{F}$, сходящихся к F, всегда

$$\iint\limits_{\overline{G}^*} (\varphi(\widetilde{r}\widetilde{t}-\widetilde{s}^2)+a\widetilde{r}+2b\widetilde{s}+c\widetilde{t}-1)\psi\, d\overline{x}\, d\overline{y}\to 0,$$

где $\widetilde{z}(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ — функция, задающая в тангенциальных координатах $\widetilde{F}$.

Так как, по предположению, решения z и z' допускают представления

$$z=z^*+\frac{\varepsilon}{2}(x^2+y^2), \quad z'=z'^*+\frac{\varepsilon}{2}(x^2+y^2),$$

то вторые производные $\overline{z}'$ не превосходят $1/\varepsilon$:

$$\overline{r}'\leqslant\frac{1}{\varepsilon}, \quad |\overline{s}'|\leqslant\frac{1}{\varepsilon}, \quad \overline{t}'\leqslant\frac{1}{\varepsilon}.$$

Что касается вторых производных условного решения $\overline{z}$, то для него такие оценки имеют место всюду, где производные существуют, а первые производные удовлетворяют условию Липшица с постоянной $1/\varepsilon$. Это заключение основано на том, что функцию z можно представить в виде предела функций

$$\widetilde{z}=\widetilde{z}^*+\frac{\varepsilon}{2}(x^2+y^2),$$

где $\widetilde{z}^*$ — регулярные выпуклые функции.

Из условия Липшица для первых производных функции $\overline{z}$ следует, что $\overline{z}(\overline{x}, \overline{y})$ почти всюду удовлетворяет уравнению

$$\varphi(\overline{r}\overline{t}-\overline{s}^2)+a\overline{r}+2b\overline{s}+c\overline{t}-1=0.$$

По лемме Адамара построим уравнение для разности $u=\overline{z}'-z$. Получим

$$(\varphi\overline{t}_\vartheta+a)u_{xx}+2(-\varphi\overline{s}_\vartheta+b)u_{xy}+(\varphi\overline{r}_\vartheta+a)u_{yy}+Ku_x+Lu_y=0,$$

где в качестве аргументов берутся средние значения $\overline{p}_\vartheta=\vartheta\overline{p}+(1-\vartheta)\overline{p}', \ldots, \overline{t}_\vartheta=\vartheta\overline{t}+(1-\vartheta)\overline{t}'$. Это уравнение является линейным уравнением эллиптического типа.

Так как смещение m' поверхности F' в сторону $z<0$ было меньше m, то разность $u=\bar{z}'-\bar{z}$ достигает внутри области $\bar{G}^*$ отрицательного минимума. А это невозможно, в чем убеждаемся, рассуждая как в § 6. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть коэффициенты сильно эллиптического уравнения Монжа — Ампера*

$$rt-s^2=ar+2bs+ct+\varphi$$

регулярны (k раз дифференцируемы, $k\geqslant 3$) и удовлетворяют условиям:

1. *Функция φ не убывающая по z и выпуклая по p, q.*
2. *Квадратичная форма $a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2$ не убывающая по z и выпуклая по p, q.*

Тогда всякое условное решение этого уравнения является регулярным ($k+1$ раз дифференцируемым). Если же коэффициенты уравнения аналитические, то решение аналитическое.

Доказательство. Пусть $\bar{z}(x,\ y)$ — условное решение нашего уравнения в области G плоскости xy и O — произвольная точка этой области. Докажем регулярность решения $\bar{z}(x,\ y)$ в окрестности точки O. Не ограничивая общности, будем считать, что точка O совпадает с началом координат.

Пусть $\bar{F}$ — выпуклая поверхность, задаваемая функцией $\bar{z}(x,\ y)$. Построим последовательность выпуклых аналитических поверхностей $\tilde{F}$, сходящихся к $\bar{F}$. Пусть $\tilde{h}$ — выпуклая функция, задающая поверхность $\tilde{F}$. По лемме § 9 при достаточной близости $\tilde{F}$ к $\bar{F}$ и достаточно малом ε в круге G_ε: $x^2+y^2\leqslant\varepsilon^2$ существует условное решение $\tilde{z}$ заданного уравнения, принимающее на окружности круга G_ε значения $\tilde{h}$ и являющееся пределом регулярных решений в любом круге $G_{\varepsilon'}$ меньшего радиуса.

Из теоремы единственности для условных решений (теорема 1) следует, что при $\tilde{F}\to\bar{F}$ решение $\tilde{z}\to\bar{z}$. Таким образом, решение $\bar{z}$ в круге $G_{\varepsilon'}$ является пределом регулярных решений.

По лемме из § 9 для регулярных решений, сходящихся к $\bar{z}$ в некоторой окрестности точки O можно указать априорные оценки вторых производных, равномерные относительно перехода к пределу при $\tilde{F}\to\bar{F}$.

После того как оценки вторых производных получены, из общих соображений можно оценить третьи и четвертые производные регулярных решений (§ 11 гл. II). А это позволяет заключить о трехкратной дифференцируемости решения $\bar{z}$. Дальнейшая регулярность решения $\bar{z}$ устанавливается на основании общей теоремы о регулярности решений уравнений эллиптического типа с регулярными коэффициентами. Теорема доказана.

Глава IX

Поверхности ограниченной внешней кривизны

В отличие от многообразий положительной кривизны теорию многообразий ограниченной кривизны (§ 13 гл. I) А. Д. Александров строит без реализации их на пространственном объекте. Вопрос о геометрической реализации этих многообразий поверхностями евклидова пространства с сохранением достаточно сильных связей метрики многообразия и формы поверхности пока остается открытым. Известны лишь отдельные классы поверхностей с метрикой ограниченной кривизны. Один из таких классов выделяется из совокупности всех гладких поверхностей требованием ограниченности площади сферического изображения с учетом кратности покрытия. Дело в том, что для построения содержательной теории поверхностей, подчиненных такому слабому условию регулярности, как гладкость, требование ограниченности площади сферического изображения является естественным и в некотором смысле минимальным.

Как показали Нэш и Кейпер [53, 39], риманова метрика, заданная на двумерном многообразии, при весьма общих предположениях допускает реализацию на гладкой поверхности трехмерного евклидова пространства. Более того, эта реализация осуществляется так же свободно, как топологическое погружение в пространство многообразия, на котором задана метрика. Из результатов Нэша и Кейпера следует, например, что в трехмерном евклидовом пространстве существует замкнутая поверхность без самопересечений, гомеоморфная тору и локально изометричная плоскости.

Совершенно ясно, что сохранить для гладких поверхностей даже со сколь угодно хорошей метрикой основную в теории поверхностей теорему о связи между внутренней и внешней кривизной в ее обычной формулировке невозможно. Регулярность внутренней метрики поверхности при наличии только гладкости поверхности не дает оснований для такого естественного заключения, как ее локальная выпуклость при условии положительности гауссовой кривизны.

Все это делает необходимым наложить на поверхность другие ограничения, касающиеся ее внешней формы, кроме

гладкости. Наиболее естественным и геометричным является требование ограниченности площади сферического изображения, которое позволяет просто и непосредственно определить важнейшее в теории поверхностей понятие кривизны. Гладкие поверхности, выделяемые этим дополнительным условием, мы будем называть поверхностями ограниченной внешней кривизны. Систематическому изучению этих поверхностей и посвящается настоящая глава. Изложение ведется по работе автора [67].

§ 1. Непрерывные отображения ограниченной вариации

Поверхность Φ в трехмерном евклидовом пространстве мы будем называть *гладкой*, если в окрестности каждой своей точки при соответствующем выборе прямоугольных декартовых координат x, y, z она допускает задание уравнением

$$z = \varphi(x, y),$$

где $\varphi(x, y)$ — непрерывная функция с непрерывными первыми производными. Во всех случаях, если не оговорено противное, поверхность предполагается открытой в том смысле, что точки края поверхности к ней не относятся.

Множество H на поверхности будем называть замкнутым, если оно замкнуто, как множество точек пространства. Открытые множества на поверхности определяются как дополнения к замкнутым.

Пусть Φ и $\bar{\Phi}$ — гладкие поверхности и f — непрерывное отображение поверхности Φ на $\bar{\Phi}$. Очевидно, каково бы ни было замкнутое множество F на поверхности Φ, его образ $f(F)$ на поверхности $\bar{\Phi}$ является также замкнутым множеством, а следовательно, имеет определенную площадь (лебегову меру).

Отображение f поверхности Φ на поверхность $\bar{\Phi}$ мы будем называть *отображением ограниченной вариации*, если для любой конечной системы попарно не пересекающихся замкнутых множеств F_1, F_2, ..., F_r на поверхности Φ сумма площадей их образов на $\bar{\Phi}$

$$\mu f(F_1) + \mu f(F_2) + \ldots + \mu f(F_r)$$

ограничена постоянной, не зависящей от выбора множеств и их числа.

Для непрерывных отображений ограниченной вариации вводим понятие *абсолютной вариации*. Пусть G — открытое множество на поверхности Φ. Абсолютной вариацией отображения f на G мы будем называть

$$\sup(\mu f(F_1) + \mu f(F_2) + \ldots + \mu f(F_r))$$

по всем системам попарно не пересекающихся множеств F_1, F_2, ..., F_r, содержащихся в G. Абсолютную вариацию отображения f на любом множестве H поверхности Φ определим как нижнюю грань абсолютных вариаций отображения f на открытых множествах, содержащих H, и будем обозначать $v^0(H)$.

Лемма 1. *Пусть f — непрерывное отображение поверхности Φ на $\overline{\Phi}$ и H — множество на поверхности Φ. Тогда абсолютная вариация f на H не меньше площади образа H на $\overline{\Phi}$, т. е.*

$$\mu f(H) \leqslant v^0(H).$$

Предполагается, что $f(H)$ имеет определенную площадь (измеримо).

Доказательство. Рассмотрим сначала случай замкнутого множества H. Пусть G — любое открытое множество на Φ, содержащее H. Из определения абсолютной вариации f на открытом множестве очевидным образом следует:

$$\mu f(H) \leqslant v^0(G).$$

Но абсолютная вариация f на H равна нижней грани абсолютных вариаций f на открытых множествах, содержащих H. Поэтому $\mu f(H) \leqslant v^0(H)$.

Теперь рассмотрим случай любого H. Пусть F_1, F_2, ..., F_n, ... — монотонно возрастающая последовательность замкнутых множеств на поверхности Φ, сходящаяся к Φ (как множеству). Пусть $\overline{F}$ — замкнутое подмножество множества $f(H)$, причем такое, что

$$\mu f(H) - \mu \overline{F} < \varepsilon \quad (\varepsilon > 0).$$

Обозначим $\tilde{F}_k$ полный прообраз множества $\overline{F}$ в F_k. Множество $\tilde{F}_k$, очевидно, замкнутое.

По доказанному

$$\mu f(\tilde{F}_k) \leqslant v^0(\tilde{F}_k).$$

Так как $\tilde{F}_k \subset H$, то

$$v^0(\tilde{F}_k) \leqslant v^0(H).$$

Поэтому

$$\mu f(\tilde{F}_k) \leqslant v^0(H).$$

Так как монотонно возрастающая последовательность замкнутых множеств $f(\tilde{F}_k)$ сходится в $\overline{F}$, то

$$\mu f(\tilde{F}_k) \to \mu \overline{F}.$$

Следовательно,

$$\mu \overline{F} \leqslant v^0(H).$$

Ввиду произвола ε, которым определяется множество $\bar{F}$, отсюда заключаем:

$$\mu f(H) \leqslant v^0(H).$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Абсолютная вариация непрерывного отображения f поверхности Φ на поверхность $\bar{\Phi}$ есть вполне аддитивная функция на кольце борелевских множеств поверхности Φ, т. е. для любых попарно не пересекающихся борелевских множеств H_k*

$$v^0\left(\sum_k H_k\right) = \sum_k v^0(H_k).$$

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что абсолютная вариация является внешней мерой Каратеодори, т. е. удовлетворяет условиям:

1) $v^0(H) \geqslant 0$ для любого H;

2) $v^0(H_1) + v^0(H_2) = v^0(H_1 + H_2)$,

если H_1 и H_2 находятся на положительном расстоянии друг от друга;

3) для любых $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$

$$v^0\left(\sum_k H_k\right) \leqslant \sum_k v^0(H_k).$$

Первое условие выполняется очевидным образом. Проверим второе условие, причем сначала рассмотрим случай открытых множеств. Пусть G_1 и G_2 — не пересекающиеся открытые множества на поверхности Φ. Покажем, что

$$v^0(G_1) + v^0(G_2) = v^0(G_1 + G_2).$$

Пусть $F_1, F_2, \ldots, F_n$ — любые замкнутые попарно не пересекающиеся множества, содержащиеся в $G_1 + G_2$. Каждое замкнутое множество F_k разбивается на два замкнутых подмножества F'_k и F''_k, одно из которых принадлежит G_1 (например, F'_k), а другое — G_2.

Имеем

$$\sum_k \mu f(F'_k) \leqslant v^0(G_1), \quad \sum_k \mu f(F''_k) \leqslant v^0(G_2),$$

$$\sum_k \mu f(F_k) \leqslant \sum_k \mu f(F'_k) + \sum_k \mu f(F''_k).$$

Отсюда

$$\sum_k \mu f(F_k) \leqslant v^0(G_1) + v^0(G_2).$$

И так как множества $F_1, \ldots, F_n$ взяты произвольно, то

$$v^0(G_1 + G_2) \leqslant v^0(G_1) + v^0(G_2).$$

Покажем теперь противоположное неравенство. Пусть F_1', F_2', ..., F_n' — любые замкнутые попарно не пересекающиеся множества в G_1 и F_1'', F_2'', ..., F_m'' — любые замкнутые попарно не пересекающиеся множества в G_2. Так как замкнутые множества F_k', F_k'' содержатся в G_1+G_2 и попарно не пересекаются, то

$$\sum_k \mu f(F_k') + \sum_k \mu f(F_k'') \leqslant v^0(G_1+G_2).$$

Отсюда ввиду произвола множеств F_k' и F_k'' заключаем:

$$v^0(G_1)+v^0(G_2) \leqslant v^0(G_1+G_2).$$

Таким образом, для открытых не пересекающихся множеств G_1 и G_2 на поверхности Φ

$$v^0(G_1)+v^0(G_2) = v^0(G_1+G_2).$$

Пусть теперь H_1 и H_2 — любые два множества на поверхности Φ, расстояние между которыми больше нуля. Покажем, что

$$v^0(H_1)+v^0(H_2) = v^0(H_1+H_2).$$

Так как множества H_1 и H_2 находятся на положительном расстоянии, то существуют открытые не пересекающиеся множества G_1' и G_2', содержащие H_1 и H_2 соответственно. Далее, из определения абсолютной вариации следует, что, каково бы ни было $\varepsilon>0$, всегда существуют открытые множества G_1'', G_2'' и G'', содержащие H_1, H_2 и H_1+H_2 соответственно, такие, что

$$v^0(G_1'') - v^0(H_1) < \varepsilon,$$
$$v^0(G_2'') - v^0(H_2) < \varepsilon,$$
$$v^0(G'') - v^0(H_1+H_2) < \varepsilon.$$

Определим теперь открытые множества G_1 и G_2 условиями

$$G_1 = G_1' \cap G_1'' \cap G'',$$
$$G_2 = G_2' \cap G_2'' \cap G''.$$

Очевидно, множества G_1 и G_2 не пересекаются, содержат H_1 и H_2 соответственно и

$$v_0(G_1) - v^0(H_1) < \varepsilon,$$
$$v^0(G_2) - v^0(H_2) < \varepsilon,$$
$$v^0(G_1+G_2) - v^0(H_1+H_2) < \varepsilon.$$

И так как по доказанному

$$v^0(G_1)+v^0(G_2)=v^0(G_1+G_2),$$

а ε произвольно, то

$$v^0(H_1)+v^0(H_2)=v^0(H_1+H_2).$$

Второе условие проверено полностью.

Проверим, наконец, третье условие, причем сначала рассмотрим случай открытых множеств. Итак, пусть $G_1, G_2, \ldots$ $\ldots, G_n, \ldots$ — любые открытые множества на поверхности Ф. Покажем, что

$$v^0\left(\sum_k G_k\right)\leqslant \sum_k v^0(G_k).$$

Возьмем в $G=\sum G_k$ произвольную конечную систему попарно не пересекающихся замкнутых множеств $F_1, F_2, \ldots, F_r$. Определим в каждом множестве G_i множества F_k^i условием

$$F_k^i=G_i\cap F_k.$$

Так как множества F_k^i, содержащиеся в G_i, находятся на положительном расстоянии друг от друга, то из второго условия, справедливость которого уже установлена, следует:

$$\sum_k v^0(F_k^i)=v^0\left(\sum_k F_k^i\right)\leqslant v^0(G_i).$$

Далее, очевидно,

$$\mu f(F_k)\leqslant \sum_i \mu f(F_k^i).$$

По лемме 1 имеем

$$\mu f(F_k^i)\leqslant v^0(F_k^i).$$

Суммируя это неравенство по i и сравнивая с предыдущим, получаем

$$\mu f(F_k)\leqslant \sum_i v^0(F_k^i).$$

Суммируя теперь по k и вспоминая, что

$$\sum_k v^0(F_k^i)\leqslant v^0(G_i),$$

получаем

$$\sum_k \mu f(F_k)\leqslant \sum_i v^0(G_i).$$

Отсюда в силу произвола выбора попарно не пересекающихся множеств F_k следует:

$$v^0\left(\sum_k G_k\right)\leqslant \sum_k v^0(G_k).$$

Покажем теперь, что третье условие выполняется для любых множеств $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ Определим открытые множества $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$ условиями:

$$H_k \subset G_k, \quad v^0(G_k) - v^0(H_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

$$G = G_1 + G_2 + \ldots$$

Так как

$$\sum_k H_k \subset G,$$

и, следовательно,

$$v^0\left(\sum_k H_k\right) \leqslant v^0(G),$$

а по доказанному

$$v^0(G) \leqslant \sum_k v^0(G_k),$$

то

$$v^0\left(\sum_k H_k\right) \leqslant \sum_k v^0(H_k) + 2\varepsilon.$$

Ввиду произвола ε отсюда получаем

$$v^0\left(\sum_k H_k\right) \leqslant \sum_k v^0(H_k).$$

Таким образом, для абсолютной вариации выполняются все условия, которыми определяется внешняя мера Каратеодори. Отсюда следует, что абсолютная вариация является вполне аддитивной функцией на кольце борелевских множеств поверхности Φ.

Пусть f — непрерывное отображение поверхности Φ на поверхность $\overline{\Phi}$ и H — любое множество на поверхности Φ. Определим функцию $n_H(Y)$ точки Y на поверхности $\overline{\Phi}$ следующими условиями. Если число прообразов Y в H конечно, то полагаем $n_H(Y)$ равной числу прообразов, если же число прообразов Y в H бесконечно, то полагаем $n_H(Y)$ равной нулю. Определяемую этими условиями функцию $n_H(Y)$ будем называть *функцией кратности* непрерывного отображения f на множестве H. Найдем выражение для абсолютной вариации отображения f с помощью интеграла от функции кратности по площади поверхности $\overline{\Phi}$.

Лемма 2. *Абсолютная вариация непрерывного отображения на любом борелевском множестве H равна точной верхней грани абсолютных вариаций этого отображения на замкнутых множествах, содержащихся в H.*

Доказательство. Из определения абсолютной вариации для любого множества H следует существование открытого множества G, содержащего H и такого, что

$$v^0(G) - v^0(H) < \varepsilon.$$

По определению вариации на открытом множестве G в нем найдется конечное число попарно не пересекающихся замкнутых множеств F_k таких, что

$$v^0(G) - \sum_k \mu f(F_k) < \varepsilon.$$

Обозначим $\tilde{F}_k$ ту часть множества F_k, которая лежит вне H. Абсолютная вариация на множестве $\sum_k \tilde{F}_k$ меньше ε, так как оно содержится в $G - H$. Отсюда следует существование открытого множества $\tilde{G}$, содержащего $\sum_k \tilde{F}_k$ и такого, что абсолютная вариация на нем меньше ε. Обозначим F'_k ту часть множества F_k, которая принадлежит $\tilde{G}$, а $F''_k = F_k - F'_k$. Множества F''_k, очевидно, замкнутые и содержатся в H. Утверждается, что

$$v^0(G) - v^0\left(\sum_k F''_k\right) < 2\varepsilon,$$

а следовательно,

$$v^0(H) - v^0\left(\sum_k F''_k\right) < 2\varepsilon.$$

Действительно,

$$v^0\left(\sum_k F_k\right) = v^0\left(\sum_k F'_k\right) + v^0\left(\sum_k F''_k\right).$$

Но левая часть равенства отличается от $v^0(G)$ не более, чем на ε, так как

$$\sum_k \mu f(F_k) \leqslant v^0\left(\sum_k F_k\right) \leqslant v^0(G),$$

и

$$v^0(G) - \sum_k \mu f(F_k) < \varepsilon,$$

а первый член правой части не превосходит ε, так как $\sum_k F'_k \subset \subset \tilde{G}$ и $v^0(\tilde{G}) < \varepsilon$. Утверждение доказано. Итак, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, всегда существует такое замкнутое множество F, содержащееся в H, что

$$v^0(H) - v^0(F) < \varepsilon.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Каково бы ни было борелевское множество H, функция кратности $n_H(Y)$ измерима.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай замкнутого множества H. Обозначим M^k множество тех точек поверхности $\overline{\Phi}$, каждая из которых имеет в H не менее k прообразов. Доказать измеримость функции $n_H(Y)$ — это значит доказать измеримость множеств M^k.

Пусть M_n^k — множество точек поверхности $\overline{\Phi}$, у каждой из которых есть k прообразов в H, находящихся на расстоянии не меньше $1/n$ друг от друга. Множества M_n^k, очевидно, замкнутые, и

$$\sum_n M_n^k = M^k.$$

Отсюда следует, что множество M^k есть множество типа F_σ и оно, в частности, измеримо.

Рассмотрим теперь случай открытого множества H. Пусть $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ — монотонно возрастающая последовательность замкнутых множеств, такая, что

$$H = F_1 + F_2 + \ldots F_n + \ldots$$

Определим множества $M_{s,n}^k$ на поверхности $\overline{\Phi}$. Именно, точку Y поверхности $\overline{\Phi}$ отнесем множеству $M_{s,n}^k$, если она имеет в F_s по крайней мере k прообразов, находящихся друг от друга на расстоянии, не меньшем $1/n$. Множества $M_{s,n}^k$ замкнутые и

$$\sum_{s,n} M_{s,n}^k = M^k.$$

Отсюда следует, что и в этом случае M^k является множеством типа F_σ, а следовательно, измеримо.

Рассмотрим, наконец, случай любого борелевского множества H. По определению абсолютной вариации на множестве H и по лемме 2 найдется открытое множество G, содержащее H, и замкнутое множество F, содержащееся в H, такие, что

$$v^0(G) - \varepsilon < v^0(H) \leqslant v^0(F) + \varepsilon,$$

каково бы ни было заданное $\varepsilon > 0$. Имеем

$$M^k(F) \subset M^k(H) \subset M^k(G).$$

По доказанному множества $M^k(F)$ и $M^k(G)$ измеримы. Поэтому, чтобы доказать измеримость $M^k(H)$, достаточно показать, что мера множества $M^k(G) - M^k(F)$ сколь угодно мала, если достаточно мало ε.

Если точка Y принадлежит множеству $M^k(G) - M^k(F)$, то это значит, что она имеет прообраз в $G-F$. Поэтому

$$M^k(G) - M^k(F) \subset f(G-F).$$

Отсюда

$$\mu(M^k(G) - M^k(F)) \leqslant \mu f(G-F) \leqslant v^0(G-F) < 2\varepsilon.$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть G — открытое множество на поверхности Φ и M — любое измеримое множество на поверхности $\bar{\Phi}$. Пусть каждая точка M имеет в G по крайней мере p прообразов. Обозначим $\tilde{M}$ полный прообраз M в G. Тогда, если $\mu(M) > m$, то*

$$mp \leqslant v^0(\tilde{M}).$$

Доказательство. Обозначим M_n подмножество множества M, у каждой точки которого есть p прообразов в G, находящихся на расстоянии, не меньшем $1/n$, друг от друга. Очевидно, чтобы доказать утверждение леммы для множества M, достаточно доказать его для множеств M_n, так как

$$\mu(M_n) \to \mu(M) \quad \text{при} \quad n \to \infty, \quad \text{а} \ v^0(\tilde{M}_n) \leqslant v^0(\tilde{M}).$$

Таким образом, можно считать, что каждая точка M имеет p прообразов в G, находящихся на расстоянии, не меньшем $\delta > 0$.

Пусть $\{A_k\}$ — счетное покрытие G попарно не пересекающимися множествами типа F_σ диаметра меньше δ. Обозначим $\tilde{m}_k$ ту часть множества $\tilde{M}$, которая принадлежит A_k, а m_k — ее образ на поверхности $\bar{\Phi}$. Очевидно, множества m_k измеримы и сумма их равна M.

Образуем множества $m_{i_1, i_2, \ldots, i_p}$:

$$m_{i_1, i_2, \ldots, i_p} = m_{i_1} \cap m_{i_2} \cap \ldots \cap m_{i_p},$$

где все индексы $i_1, i_2, \ldots, i_p$ различны. Очевидно, каждая точка X из M принадлежит по крайней мере одному из этих множеств, так как она имеет p прообразов, находящихся друг от друга на расстоянии, не меньшем δ, т. е. большем диаметра любого множества $\tilde{m}_k$.

Построим теперь измеримые множества $n_{i_1, i_2, \ldots, i_p}$ так, чтобы они попарно не пересекались и чтобы

$$n_{i_1, i_2, \ldots, i_p} \subset m_{i_1, i_2, \ldots, i_p},$$

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_p} n_{i_1, i_2, \ldots, i_p} = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_p} m_{i_1, i_2, \ldots, i_p}.$$

Очевидно, множества $n_{i_1, i_2, \ldots, i_p}$ образуют покрытие M. Поэтому

$$m < \sum_{i_1, \ldots, i_p} \mu n_{i_1, \ldots, i_p}.$$

Так как каждое множество $n_{i_1, i_2, \ldots, i_p}$ содержится в p множествах $m_{i_1}, m_{i_2}, \ldots, m_{i_p}$, то

$$\sum_k \mu(m_k) > mp.$$

Но

$$\sum_k \mu(m_k) \leqslant v^0(\tilde{M}).$$

Следовательно,

$$mp \leqslant v^0(\tilde{M}).$$

Лемма доказана.

Следствие. *Площадь множества точек поверхности $\bar{\Phi}$, имеющих бесконечное число прообразов на Φ, равна нулю.*

Теорема 2. *Для любого борелевского множества H на поверхности Φ имеет место равенство*

$$v^0(H) = \int_{\bar{\Phi}} n_H(Y)\, dY,$$

где dY — элемент площади поверхности $\bar{\Phi}$.

Доказательство. По лемме 3 функция $n_H(Y)$ измерима. Покажем, что она суммируема. Для этого заметим прежде всего, что $n_H(Y) \leqslant n_\Phi(Y)$ при любом H. Поэтому достаточно показать суммируемость функции $n_\Phi(Y)$.

Пусть N^k — множество тех точек поверхности $\bar{\Phi}$, каждая из которых имеет на Φ ровно k прообразов. Множество N^k представимо в виде разности двух множеств типа F_σ. Именно, $N^k = M^k - M^{k+1}$, где M^k — множество тех точек поверхности $\bar{\Phi}$, каждая из которых имеет на Φ не менее k прообразов. Очевидно, полный прообраз $\tilde{N}^k$ множества N^k на Φ допускает такое же представление, в частности, является борелевским множеством. Имеем

$$\int_{\bar{\Phi}} n_\Phi(Y)\, dY = \sum_k k\mu(N^k).$$

Но по лемме 4

$$k\mu(N^k) \leqslant v^0(\tilde{N}_k).$$

Отсюда в силу полной аддитивности абсолютной вариации получаем

$$\int_{\bar{\Phi}} n_\Phi(Y)\, dY \leqslant v^0(\Phi),$$

т. е. функция $n_\Phi(Y)$ суммируема, а вместе с ней суммируема функция $n_H(Y)$, каково бы ни было борелевское множество H.

Рассмотрим теперь функцию множеств $w(H)$ на поверхности Φ:

$$w(H)=\int\limits_{\Phi} n_H(Y)\,dY.$$

Она вполне аддитивна на кольце борелевских множеств. Действительно, пусть $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ — попарно не пересекающиеся борелевские множества. Покажем, что

$$w\left(\sum_k H_k\right)=\sum_k w(H_k).$$

Во-первых, заметим, что

$$w(H_1+H_2+\ \ldots\ +H_n)=w(H_1)+w(H_2)+\ \ldots\ +w(H_n).$$

Это очевидным образом следует из свойств функции кратности для попарно не пересекающихся множеств. Именно, если число прообразов точки Y на поверхности Φ конечно, то

$$n_{H_1+\ldots+H_n}(Y)=n_{H_1}(Y)+\ \ldots\ +n_{H_n}(Y),$$

а площадь множества точек, имеющих бесконечное число прообразов, равна нулю.

Обозначим

$$H^k=\sum_1^k H_l \quad \text{и} \quad H=\sum_1^\infty H_l.$$

Тогда утверждение о полной аддитивности w сводится к доказательству равенства

$$\int\limits_{\Phi} n_H(Y)\,dY=\lim_{k\to\infty}\int\limits_{\Phi} n_{H^k}(Y)\,dY.$$

Так как $n_{H^k}(Y)$ монотонно возрастает на множестве полной меры, то

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{\Phi} n_{H^k}(Y)\,dY=\int\limits_{\Phi}\left(\lim_{k\to\infty} n_{H^k}(Y)\right)dY.$$

Отсюда следует, что для полной аддитивности w достаточно показать, что функции $n_H(Y)$ и $\lim n_{H^k}(Y)$ могут отличаться только на множестве нулей площади.

Допустим, на множестве M

$$n_H(Y)>\lim_{k\to\infty} n_{H^k}(Y).$$

Очевидно, тогда при любом k

$$n_H(Y) > n_{H^k}(Y).$$

Число прообразов точки $Y \subset M$ в H не может быть конечным, ибо тогда при достаточно большом k

$$n_H(Y) = n_{H^k}(Y),$$

а множество точек, имеющих бесконечное число прообразов на Φ, имеет нулевую площадь. Таким образом, почти всюду на $\bar{\Phi}$

$$n_H(Y) = \lim_{k\to\infty} n_{H^k}(Y)$$

и, следовательно, функция множеств $w(H)$ вполне аддитивна.

Известно, что если две вполне аддитивные функции на кольце борелевских множеств равны для любых открытых множеств, то они равны и для любых борелевских множеств. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что для любого открытого множества G

$$v^0(G) = w(G).$$

Во-первых, заметим, что

$$w(G) \leqslant v^0(G).$$

Это неравенство для случая $G = \Phi$ получено выше. Для любого открытого множества G оно получается дословно так же.

Покажем теперь, что

$$w(G) \geqslant v^0(G).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ и $F_1, F_2, \ldots, F_n$ — система замкнутых попарно не пересекающихся множеств в G такая, что

$$v^0(G) - \sum_k \mu f(F_k) < \varepsilon.$$

В силу аддитивности функции w

$$w(G) \geqslant w(F_1) + \ldots + w(F_n).$$

А из определения функции w следует, что

$$w(F_k) \geqslant \mu f(F_k).$$

Поэтому

$$w(G) \geqslant \sum_k \mu f(F_k) \geqslant v^0(G) - \varepsilon.$$

И так как ε произвольно, то

$$w(G) \geqslant v^0(G).$$

Сопоставляя это неравенство с полученным выше, заключаем:

$$w(G) = v^0(G).$$

Теорема доказана.

В заключение отметим следующую лемму.

Лемма 5. *Каково бы ни было множество H на поверхности Φ, если его образ на поверхности $\bar{\Phi}$ при отображении f имеет равную нулю площадь, то абсолютная вариация f на H равна нулю.*

Доказательство. Пусть $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$ — монотонно убывающая последовательность открытых множеств на $\bar{\Phi}$, содержащих $f(H)$ и таких, что

$$\mu(G_n) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Обозначим $\tilde{G}_n$ полный прообраз G_n на Φ. $\tilde{G}_n$ — открытое множество, содержащее H. По теореме 2

$$v^0(\tilde{G}_n) = \int\limits_{\bar{\Phi}} n_{\tilde{G}_n}(Y)\,dY.$$

При $n \to \infty$ величины $v^0(\tilde{G}_n)$ монотонно убывают, а так как все $\tilde{G}_n$ содержат H, то

$$v^0(H) \leqslant \lim_{n \to \infty} v^0(\tilde{G}_n).$$

Так как функции $n_{\tilde{G}_n}(Y)$ при $n \to \infty$ монотонно убывают на множестве полной меры, то

$$\lim_{n \to \infty} v^0(\tilde{G}_n) = \int\limits_{\bar{\Phi}} \Big(\lim_{n \to \infty} n_{\tilde{G}_n}(Y)\Big)\,dY.$$

Но функция

$$\lim_{n \to \infty} n_{\tilde{G}_n}(Y)$$

отлична от нуля только на множестве точек нулевой площади. Поэтому

$$v^0(\tilde{G}_n) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Отсюда

$$v^0(H) = 0.$$

Лемма 5 доказана.

§ 2. Положительная, отрицательная и полная вариации непрерывного отображения

Гладкая поверхность Ф называется *ориентируемой*, если на ней может быть задана вектор-функция $n(X)$ точки поверхности, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $|n(X)|=1$;

2) $n(X)$ — непрерывна;

3) вектор $n(X)$ перпендикулярен к касательной плоскости поверхности в точке X.

Если на поверхности Ф задана функция $n(X)$, то будем говорить, что поверхность ориентирована. Очевидно, ориентируемая поверхность допускает две ориентации. Если одна из них задается вектором-функцией $n(X)$, то вторую задает вектор-функция $-n(X)$.

Если поверхность Ф ориентирована, то на каждой простой кривой γ, ограничивающей гомеоморфную кругу область на поверхности, может быть указано направление обхода так, что будут выполняться следующие условия:

1) если области G_1 и G_2, ограничиваемые кривыми γ_1 и γ_2, не пересекаются, но кривые γ_1 и γ_2 имеют общий отрезок γ_{12}, то при указанном обходе кривых γ_1 и γ_2 отрезок γ_{12} проходится в противоположных направлениях;

2) если γ — малый простой контур, охватывающий точку X, то направление обхода кривой γ и направление нормали $n(X)$ образуют «правый винт».

Относительно определяемого таким образом обхода кривых на поверхности Ф мы будем говорить, что он индуцируется ориентацией поверхности.

Заметим, что ориентируемость поверхности можно определить так же, как возможность задать на всех простых кривых поверхности, ограничивающих гомеоморфные кругу области, направления обхода, удовлетворяющие первому из указанных выше условий. Из этого определения видно, что свойство поверхности быть ориентируемой инвариантно относительно топологических преобразований поверхности, т. е. поверхности, гомеоморфные ориентируемой, ориентируемы. Плоскость, очевидно, ориентируема.

Пусть на ориентированной плоскости дана ориентированная кривая γ (т. е. кривая с заданным на ней направлением обхода) и A — точка, не лежащая на кривой. Пусть X_0 — произвольная точка кривой γ. Определим на кривой γ функцию $\vartheta(X)$ точки X следующими условиями:

1) $\vartheta(X)$ непрерывна на множестве точек кривой, кроме точки X_0;

2) $\vartheta(X)$ с точностью до кратного 2π равна углу, который образует полупрямая AX, идущая из точки A в точку X кривой, с начальной полупрямой AX_0.

Оказывается, функция $\vartheta(X)$ условиями 1) и 2) определяется однозначно с точностью до постоянного слагаемого, кратного 2π. Изменение функции $\vartheta(X)$ при прохождении точки X_0 кривой, деленное на 2π, называется *степенью* точки A относительно кривой γ. Мы будем обозначать ее $q_\gamma(A)$. Степень точки есть целое число. Она не зависит от случайного выбора точки X_0 на кривой.

Наглядно степень точки A относительно кривой γ надо представлять себе как число обходов вокруг точки A при движении вдоль кривой γ в указанном направлении, считая это число положительным, если ориентация кривой γ совпадает с той, которая индуцируется ориентацией плоскости, и отрицательным в противоположном случае.

Если кривая γ испытывает непрерывную деформацию, но так, что все время точка A находится вне кривой, то степень точки A относительно кривой γ не изменяется. Точно так же при непрерывном изменении положения точки A вне кривой степень ее относительно кривой не изменяется.

Если степени точки A относительно кривых γ_1 и γ_2 одинаковы, то одну кривую можно непрерывно деформировать в другую, причем ни в какой момент деформации кривая не будет проходить через точку A.

Пусть P и Q — две произвольные точки замкнутой ориентированной кривой γ. Они разбивают кривую γ на две части. Обозначим их γ_1 и γ_2. Пусть $\bar{\gamma}$ — произвольная кривая, соединяющая точки P и Q. Кривые γ_1 и $\bar{\gamma}$, γ_2 и $\bar{\gamma}$ образуют два замкнутых контура $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$. Ориентируем их соответственно обходу их частей γ_1 и γ_2 на кривой γ. Тогда степень любой точки A, не принадлежащей кривым γ и $\bar{\gamma}$, относительно контура γ равна сумме степеней ее относительно контуров $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$, т. е.

$$q_\gamma(A) = q_{\tilde{\gamma}_1}(A) + q_{\tilde{\gamma}_2}(A).$$

Понятие степени точки относительно замкнутого контура естественно переносится на случай любой поверхности, гомеоморфной плоскости. Именно, пусть Φ — ориентированная, гомеоморфная плоскости поверхность, γ — ориентированный контур на ней и A — точка поверхности, лежащая вне контура γ. Пусть f — гомеоморфизм поверхности Φ на плоскость. Ориентируем плоскость и кривую $f(\gamma)$ соответственно ориентации поверхности Φ и кривой γ. Назовем степенью точки A относительно контура γ на поверхности Φ степень точки $f(A)$ относительно контура $f(\gamma)$ на плоскости. Оказывается, так определяе-

мая степень точки относительно замкнутого контура на поверхности не зависит от случайного выбора гомеоморфизма $\bar{f}$.

Пусть Φ и $\bar{\Phi}$ — гладкие, гомеоморфные плоскости ориентированные поверхности и f — непрерывное отображение поверхности Φ на поверхность $\bar{\Phi}$. Точку X поверхности Φ мы будем называть *регулярной* относительно отображения f, если у нее есть окрестность такая, что для всякой точки Y, отличной от X, из этой окрестности $f(Y) \neq f(X)$. Определяемую этим свойством гомеоморфную кругу окрестность будем называть *нормальной*. Очевидно, каждая регулярная точка имеет нормальную окрестность.

Пусть X — точка поверхности Φ, регулярная относительно отображения f, и ω — ее нормальная окрестность. Возьмем в окрестности ω произвольную ориентированную кривую γ, не проходящую через точку X, относительно которой степень точки X равна $+1$. Степень точки $f(X)$ относительно кривой $f(\gamma)$ мы будем называть *индексом* точки X относительно отображения f и обозначать $j(X)$. Понятие индекса не зависит ни от окрестности ω, ни от выбора кривой γ в ней. Покажем это.

Пусть ω_1 и ω_2 — две нормальные окрестности точки X, γ_1 и γ_2 — замкнутые ориентированные кривые в этих окрестностях такие, что

$$q_{\gamma_1}(X) = +1, \quad q_{\gamma_2}(X) = +1.$$

Надо показать, что

$$q_{f(\gamma_1)}(f(X)) = q_{f(\gamma_2)}(f(X)).$$

Непрерывной деформацией внутри $\omega_2 - X$ кривую γ_2 можно перевести в любую окрестность точки X, в частности в ω_1. При этом величины $q_{\gamma_2}(X)$ и $q_{f(\gamma_2)}(f(X))$ будут сохранять свои первоначальные значения. После этого кривую γ_2 можно непрерывной деформацией внутри $\omega_1 - X$ перевести в кривую γ_1, так как степени точки X относительно кривых γ_1 и γ_2 равны. Но при этом величина $q_{f(\gamma_2)}(f(X))$ также не изменяется. Следовательно, для исходных кривых γ_1 и γ_2

$$q_{f(\gamma_1)}(f(X)) = q_{f(\gamma_2)}(f(X)).$$

Утверждение доказано.

Лемма 1. *Пусть G — гомеоморфная кругу область на поверхности Φ, ограниченная простой кривой γ, и X — точка области G. Пусть для любой точки Y области G или ее границы γ, отличной от X, $f(Y) \neq f(X)$. Тогда, если $|j(X)| > 1$, то каждая точка поверхности $\bar{\Phi}$, принадлежащая той компоненте разбиения ее кривой $f(\gamma)$, которой принадлежит $f(X)$, кроме самой $f(X)$, имеет в G по крайней мере два прообраза.*

Доказательство. Пусть точка $\bar{Y}$ принадлежит указанной компоненте разбиения поверхности $\bar{\Phi}$ кривой $f(\gamma)$. Покажем сначала, что $\bar{Y}$ имеет по крайней мере один прообраз в G. Допустим противное. Будем непрерывно сжимать кривую γ к точки X внутри $G-X$. Так как, по предположению, $\bar{Y}$ не имеет прообразов в G, то ни в какой момент деформации кривой γ кривая $f(\gamma)$ не проходит через точку $\bar{Y}$ и стягивается к точке $f(X)\neq\bar{Y}$. Отсюда следует, что степень точки $\bar{Y}$ относительно кривой $f(\gamma)$ равна нулю. Но, с другой стороны, она равна $j(X)\neq 0$, так как для исходного положения кривой γ точку $f(X)$ можно непрерывно перевести в $\bar{Y}$, не пересекая кривую $f(\gamma)$. Мы пришли к противоречию. Итак, точка $\bar{Y}$ имеет по крайней мере один прообраз в G.

Допустим теперь, что точка $\bar{Y}$ имеет только один прообраз в G, обозначим его $\tilde{Y}$. Тогда, очевидно, точка $\tilde{Y}$ является регулярной точкой, G будет ее нормальной окрестностью и индекс точки $\tilde{Y}$ равен индексу точки X, в частности $|j(\tilde{Y})|>1$. Доказать существование других прообразов точки $\bar{Y}$, кроме $\tilde{Y}$, труднее. С этой целью мы рассмотрим некоторые вспомогательные построения.

Пусть из точки O на плоскости α выходит простая ломаная a с конечным числом звеньев, уходящая в бесконечность. Пусть γ — замкнутая ломаная, не содержащая точку O и пересекающая ломаную a в конечном числе точек. Пусть ломаные a и γ как-то ориентированы. Схему пересечений ломаной γ с ломаной a мы представим строкой вида

$$a a \bar{a} \ldots a \bar{a},$$

которая получается следующим образом. Двигаясь вдоль ломаной γ, мы каждый раз, когда пересекаем ломаную a, записываем в строку пересечений a или $\bar{a}$, смотря по тому, как пересекается ломаная a — справа налево или слева направо.

Две строки пересечений мы будем называть эквивалентными, если они могут быть переведены друг в друга элементарными преобразованиями. К элементарным преобразованиям мы относим опускание в строке рядом расположенных элементов a и $\bar{a}$, пополнение строки такими парами (первый и последний элементы строки считаются рядом расположенными), перестановку первого элемента на последнее место и, наоборот, последнего элемента на первое место.

Очевидно, строка пересечений ломаной γ с ломаной a после опускания в ней всех пар $a\bar{a}$ и $\bar{a}a$ имеет вид

$$aa\ldots a \quad \text{или} \quad \bar{a}\bar{a}\ldots\bar{a},$$

где число элементов a (соответственно $\bar{a}$) равно $|q_\gamma(O)|$.

При непрерывной деформации ломаной γ в области $\alpha - O$ строка ее пересечений с a либо не изменяется, либо подвергается элементарным преобразованиям.

Разобьем теперь ломаную a произвольной точкой A на две ломаные: конечную b и бесконечную c. Каждой замкнутой ломаной γ, не проходящей через точки O и A, пересекающей a в конечном числе точек, мы сопоставим строку пересечений

$$bc\bar{b} \ldots \bar{c},$$

которая получается так же, как и в предыдущем случае. Аналогично предыдущему элементарные преобразования строки определяются как опускание пар $(b\bar{b})$, $(c\bar{c})$, пополнение строки такими парами, перестановка первого элемента на последнее место и наоборот.

Очевидно, если ломаная γ непрерывной деформацией переводится в ломаную γ' в области $\alpha - O - A$ так, что в каждый момент деформации число пересечений ее с a конечно, то строки пересечений ломаных γ и γ' эквивалентны, т. е. переводятся друг в друга элементарными преобразованиями.

Продолжим теперь доказательство леммы. Не ограничивая общности, можно считать, что поверхность $\bar{\Phi}$ — плоскость. Проведем из точки $f(X)$ через точку $\bar{Y}$ простую ломаную a, уходящую в бесконечность. Пусть b — отрезок ломаной между точками $f(X)$ и $\bar{Y}$, а c — оставшаяся (бесконечная) часть.

Возьмем в G малый простой, ограничивающий гомеоморфную кругу область G' контур γ' так, чтобы точка $\bar{Y}$ была внутри γ', а X — вне ее. Соединим произвольную точку P кривой γ с произвольной точкой Q кривой γ' простой кривой γ'', не проходящей через точку X, внутри двусвязной области, ограничиваемой кривыми γ и γ'. Обозначим $\bar{\gamma}$ замкнутую кривую, составленную из кривой γ, кривой γ' и дважды взятой кривой γ''. Очевидно, кривая $\bar{\gamma}$ может быть непрерывной деформацией в области $G - X - \bar{Y}$ переведена в любую сколь угодно малую окрестность точки X. Поэтому кривая $f(\bar{\gamma})$ может быть переведена непрерывной деформацией в любую малую окрестность точки $f(X)$, не проходя ни в какой момент деформации ни через точку $\bar{Y}$, ни через точку $f(X)$.

Если вписать в кривую $f(\bar{\gamma})$ ломаную с достаточно малыми звеньями, то ее также можно непрерывной деформацией в области $\bar{\Phi} - f(X) - \bar{Y}$ перевести в сколь угодно малую окрестность точки $f(X)$. Чтобы не вводить новых обозначений, будем считать, что $f(\bar{\gamma})$ является ломаной.

Легко представить себе деформацию ломаной $f(\bar{\gamma})$, при которой ее части $f(\gamma)$ и $f(\gamma')$ не изменяются, а $f(\gamma'')$ переходит

в ломаную, не пересекающую ломаной a. Будем считать, что ломаная $f(\bar{\gamma})$ в исходном положении обладает этим свойством. Тогда строка ее пересечений при соответствующей ориентации a элементарными преобразованиями приводится к виду

$$ccc\ldots \quad cb\bar{c}b\bar{c}\ldots \quad b\bar{c}.$$

Часть строки до первого элемента b представляет собой приведенную строку пересечений ломаной $f(\gamma)$, а оставшаяся часть — приведенную строку пересечений $f(\gamma')$. В первой части число элементов c, а во второй части число пар $b\bar{c}$ равно $|j(X)| = |j(\bar{Y})|$.

Ломаную $f(\bar{\gamma})$ можно непрерывной деформацией в области $\bar{\Phi} - f(X) - \bar{Y}$ перевести в сколь угодно малую окрестность точки $f(X)$. При этом строка пересечений $f(\bar{\gamma})$ после упрощения будет иметь вид

$$bb\ldots b,$$

где число элементов (b) равно $|j(X)|$. Очевидно, строки

$$bb\ldots b$$

и

$$cc\ldots \quad cb\bar{c}\ldots \quad b\bar{c}$$

не эквивалентны. С другой стороны, они должны быть элементарно преобразуемы друг в друга, так как соответствуют ломаным, которые непрерывной деформацией в области $\bar{\Phi} - f(X) - \bar{Y}$ переводятся одна в другую. Мы пришли к противоречию. Лемма доказана.

Пусть Φ и $\bar{\Phi}$ — ориентированные гладкие поверхности и f — непрерывное отображение ограниченной вариации поверхности Φ на поверхность $\bar{\Phi}$. *Положительной* (*отрицательной*) *вариацией* отображения f на множестве H поверхности Φ мы будем называть абсолютную вариацию f на подмножестве регулярных относительно отображения f точек H с положительным (соответственно, отрицательным) индексом. Полную вариацию отображения f на множестве H определим как разность между положительной и отрицательной вариациями. Положительную, отрицательную и полную вариацию отображения f на множестве H будем обозначать $v^{+}(H)$, $v^{-}(H)$ и $v(H)$ соответственно.

Лемма 2. *Абсолютная вариация отображения f на множестве нерегулярных относительно отображения f точек поверхности Φ равна нулю.*

Доказательство. Пусть H — множество нерегулярных относительно отображения f точек поверхности Φ и $f(H)$ — его образ на поверхности $\bar{\Phi}$. Так как каждая точка $f(H)$ имеет бес-

конечное число прообразов на Ф, то по следствию леммы 4 § 1 площадь $f(H)$ равна нулю. Но тогда по лемме 5 § 1 абсолютная вариация f на H равна нулю. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Множество E тех регулярных точек поверхности Ф, у которых $|j(X)|>1$, не более чем счетно.*

Доказательство. Допустим, лемма неверна. Так как точки множества E суть регулярные точки, то для каждой точки X из E можно указать такое δ, что в δ-окрестности точки X не будет точек, имеющих своим образом $f(X)$, кроме самой X. Отнесем каждой точке $X\subset E$ число $\delta(X)$, обладающее указанным свойством. Очевидно, для некоторого $\delta_0>0$ найдется несчетное множество E_{δ_0} точек $X\subset E$, для которых $\delta(X)>\delta_0$.

Опишем около каждой точки $X\subset E_{\delta_0}$ «окружность» γ_X радиуса $\delta_0/2$. Пусть $\lambda(X)$ — расстояние точки $f(X)$ от контура $f(\gamma_X)$. Из множества E_{δ_0}, очевидно, известным образом выделяется несчетное подмножество $E_{\delta_0\lambda_0}$ таких точек X, для которых $\lambda(X)>\lambda_0>0$.

Так как множество $E_{\delta_0\lambda_0}$ несчетно, то оно имеет точку сгущения A, принадлежащую поверхности. Возьмем две точки X' и X'' из $E_{\delta_0\lambda_0}$ настолько близкие к A, чтобы расстояние между ними было меньше $\delta_0/2$, а расстояние между их образами на $\overline{\Phi}$ — меньше λ_0. При этом точки $f(X')$ и $f(X'')$ принадлежат одной компоненте разбиения поверхности $\overline{\Phi}$ кривой $f(\gamma_{X'})$. А тогда по лемме 1 внутри области ограниченной кривой $\gamma_{X'}$ можно указать по крайней мере две точки, имеющие своим образом $f(X'')$. Но это невозможно, так как в δ_0-окрестности точки X'' нет точек, имеющих своим образом $f(X'')$, кроме самой X''. Мы пришли к противоречию. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть H_j обозначает все те точки поверхности Ф, которые регулярны относительно отображения f и имеют заданный индекс j. Тогда H_j может быть представлено в виде*

$$H_j=B-\omega,$$

где B — борелевское множество, а ω — множество нерегулярных точек.

Доказательство. Определим подмножество H_j^n множества H_j условием: точку $X\subset H_j$ отнесем к H_j^n, если в $\frac{1}{n}$-окрестности точки X нет точек с образом $f(X)$, кроме самой точки X. Покажем, что если регулярная точка Y является предельной точкой множества H_j^n, то она принадлежит H_j^n.

Пусть G — нормальная окрестность точки Y диаметра меньше $1/n$ и γ — кривая в этой окрестности, относительно которой степень точки Y равна $+1$. Если точка $X\subset H_j^n$ достаточно близка к Y, то G будет для нее нормальной окрестностью,

степень ее относительно γ будет равна $+1$, а степень ее образа $f(X)$ относительно кривой $f(\gamma)$ будет равна степени точки $f(Y)$ относительно той же кривой. Но это значит, что индекс точки Y равен индексу точки X, т. е. j. Следовательно, точка Y принадлежит H_j^n.

Пополним множество H_j^n предельными точками, не принадлежащими H_j^n, и полученное множество обозначим $\overline{H}_j^n$. По доказанному множество $\overline{H}_j^n$ отличается от H_j^n только нерегулярными точками. Так как

$$H_j = \sum_n H_j^n,$$

а сумма $\overline{H}_j^n$ является борелевским множеством, то H_j допускает указанное в лемме представление. Лемма 4 доказана.

Теорема 1. *Положительная, отрицательная и полная вариации непрерывного отображения f поверхности Φ на поверхность $\overline{\Phi}$ являются вполне аддитивными функциями на кольце борелевских множеств поверхности Φ.*

Доказательство. Пусть H — борелевское множество и M — любое множество, на котором абсолютная вариация равна нулю. Тогда

$$v^0(H - M) = v^0(H).$$

Действительно,

$$v^0(H - M) \leqslant v^0(H),$$

так как $(H - M) \subset H$.

Покажем, что

$$v^0(H - M) \geqslant v^0(H).$$

Так как абсолютная вариация на M равна нулю, то существует для любого $\varepsilon > 0$ открытое множество G, содержащее M, такое, что $v^0(G) < \varepsilon$. Имеем

$$v^0(H - G) + v^0(G) \geqslant v^0(H).$$

Отсюда следует, что

$$v^0(H - M) \geqslant v^0(H) - \varepsilon.$$

И так как ε произвольно, то

$$v^0(H - M) \geqslant v^0(H).$$

Принимая во внимание неравенство, указанное вначале, заключаем

$$v^0(H - M) = v^0(H).$$

Утверждение доказано.

Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ — любые борелевские попарно не пересекающиеся множества и $H=H_1+H_2+\ldots$ По определению

$$v^+(H)=v^0(H\cap\Omega^+),$$

где Ω^+ — множество точек поверхности Φ, регулярных относительно отображения f и имеющих положительный индекс. По лемме 4

$$\Omega^+=B-\omega,$$

где B — борелевское множество, а ω — множество, содержащее только нерегулярные точки.

По лемме 2 абсолютная вариация на множестве ω равна нулю. Поэтому

$$v^+(H)=v^0(H\cap B).$$

В силу полной аддитивности абсолютной вариации

$$v^0(H\cap B)=\sum_k v^0(H_k\cap B),$$

а по только что доказанному

$$v^0(H_k\cap B)=v^0(H_k\cap\Omega^+).$$

Следовательно,

$$v^+(H)=\sum_k v^+(H_k).$$

Аналогично устанавливается полная аддитивность отрицательной вариации v^-. Как следствие полной аддитивности v^+ и v^- получается полная аддитивность v. Теорема доказана.

Теорема 2. *Положительная, отрицательная и полная вариации непрерывного отображения f поверхности Φ на поверхность $\bar\Phi$ на любом борелевском множестве H допускают следующие интегральные представления*:

$$v^+(H)=\int\limits_{\bar\Phi} n_H^+(Y)\,dY,\quad v^-(H)=\int\limits_{\bar\Phi} n_H^-(Y)\,dY,$$

$$v(H)=\int\limits_{\bar\Phi}\left(n_H^+(Y)-n_H^-(Y)\right)dY,$$

где $n_H^+(Y)$ — число регулярных прообразов точки Y в H с индексом $+1$, а $n_H^-(Y)$ — число регулярных прообразов с индексом -1.

Эта теорема следует из леммы 3 и теоремы 2 § 1.

Теорема 3. *Пусть G — гомеоморфная кругу область на поверхности Φ, ограниченная кривой γ, на которой абсолютная вариация отображения f равна нулю. Пусть $\bar{\gamma}$ — образ кривой γ на поверхности $\bar{\Phi}$ и $q_{\bar{\gamma}}(Y)$ — степень произвольной точки Y поверхности $\bar{\Phi}$ относительно кривой $\bar{\gamma}$. Тогда полная вариация отображения f в области G равна*

$$v(G) = \int\limits_{\bar{\Phi}-\bar{\gamma}} q_{\bar{\gamma}}(Y)\,dY.$$

(Ориентация кривой $\bar{\gamma}$ предполагается соответствующей ориентации кривой γ, а последняя индуцируется ориентацией Φ.)

Доказательство. Во-первых, заметим, что функция $q_{\bar{\gamma}}(Y)$ измерима, так как постоянна и целочисленна на каждой связной компоненте множества $\bar{\Phi}-\bar{\gamma}$. Далее, в области интегрирования $\bar{\Phi}-\bar{\gamma}$ могут быть опущены все точки Y, которые имеют среди прообразов на Φ нерегулярные или регулярные точки с индексом, по абсолютной величине большим единицы, а также те точки Y, у которых бесконечное число прообразов. Множество всех упомянутых точек имеет площадь, равную нулю.

Пусть точка Y имеет в G $n^+(Y)$ прообразов с индексом $+1$, $n^-(Y)$ прообразов с индексом -1 и $n^0(Y)$ прообразов с индексом, равным нулю. Разобьем область G на $n^+(Y)+n^-(Y)+n^0(Y)$ элементарных областей G_k так, чтобы в каждой области G_k был только один прообраз X_k точки Y. Пусть γ_k — контур, ограничивающий область G_k и $\bar{\gamma}_k$ — его образ на $\bar{\Phi}$.

Имеем

$$q_{\bar{\gamma}}(Y) = \sum_k q_{\bar{\gamma}_k}(Y).$$

Так как область G_k не содержит других прообразов точки Y, кроме X_k, то

$$q_{\bar{\gamma}_k}(Y) = j(X_k).$$

Отсюда следует, что

$$q_{\bar{\gamma}}(Y) = n^+(Y) - n^-(Y).$$

И для окончания доказательства достаточно воспользоваться интегральным представлением полной вариации, которое дается предыдущей теоремой. Теорема доказана.

Замечание. Интегральное представление для полной вариации, даваемое теоремой 3, без труда распространяется на случай многосвязной области G. При этом, если γ_0 — внешний

контур, ограничивающий область, а $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ — внутренние контуры, то подынтегральная функция

$$q_{\bar{\gamma}}(Y) = q_{\bar{\gamma}_0}(Y) - q_{\bar{\gamma}_1}(Y) - \ldots - q_{\bar{\gamma}_r}(Y).$$

§ 3. Гладкие поверхности ограниченной внешней кривизны

Пусть Φ — ориентированная гладкая поверхность и $n(X)$ — единичный вектор нормали поверхности, задающий ее ориентацию. *Сферическим отображением* поверхности Φ называется отображение ее на единичную сферу, при котором точке X поверхности сопоставляется точка сферы с вектором $n(X)$.

Гладкая поверхность Φ называется *поверхностью ограниченной внешней кривизны*, если ее сферическое изображение имеет конечную площадь с учетом перекрытия. Точный смысл этого наглядного требования заключается в том, что для любой конечной системы попарно не пересекающихся замкнутых множеств на поверхности сумма площадей их образов при сферическом отображении равномерно ограничена. Таким образом, требование ограниченности внешней кривизны поверхности есть не что иное, как условие ограниченности вариации ее сферического отображения.

Пусть G — любое открытое множество на поверхности Φ, $F_1, F_2, \ldots, F_r$ — любые замкнутые попарно не пересекающиеся множества в G и $\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_r$ — их образы при сферическом отображении поверхности. *Абсолютной кривизной* поверхности Φ на множестве G мы будем называть точную верхнюю грань сумм площадей множеств $\bar{F}_k$ по всем конечным системам попарно не пересекающихся множеств F_k в G. Абсолютную кривизну поверхности на любом множестве H определим как точную нижнюю грань абсолютных кривизн на открытых множествах, содержащих H. Таким образом, абсолютная кривизна поверхности на данном множестве H есть не что иное, как абсолютная вариация сферического отображения поверхности на этом множестве.

Отметим основные свойства абсолютной кривизны.

Теорема 1. *Абсолютная кривизна поверхности на произвольном множестве не меньше площади сферического изображения этого множества. Абсолютная кривизна равна нулю тогда и только тогда, когда площадь сферического изображения равна нулю.*

Теорема 2. *Абсолютная кривизна поверхности как функция множества является вполне аддитивной на кольце борелевских множеств.*

Теорема 3. *Абсолютная кривизна поверхности на любом борелевском множестве H есть*

$$\sigma^0(H) = \int\limits_{\Omega} n(Y)\,dY,$$

где $n(Y)$ — число точек поверхности, имеющих своим образом точку Y единичной сферы Ω при сферическом отображении, dY — элемент площади единичной сферы, а интегрирование распространяется на всю сферу.

Все эти свойства получаются из соответствующих свойств абсолютиой вариации непрерывного отображения, каким является сферическое отображеиие гладкой поверхиости.

Для гладких поверхиостей мы определяем следующую классификацию точек. Точку X гладкой поверхности будем называть *точкой одностороннего расположения*, если достаточно малая окрестность точки X поверхиости располагается по одиу сторону касательиой плоскости в этой точке. Все остальиые точки поверхности будем называть *точками двустороннего расположения*. Таким образом, в любой, сколь угодио малой окрестности точки X двустороннего расположеиия найдутся точки, расположеииые по разиые стороны касательной плоскости в X.

Точку X гладкой поверхности мы будем называть *регулярной* (относительио сферического отображеиия), если в достаточно малой окрестиости ее иет точек с касательиыми плоскостями, параллельными касательной плоскости в X. Имеет место

Теорема 4. *Абсолютная кривизна поверхности ограниченной внешней кривизны на множестве нерегулярных точек равна нулю.*

Эта теорема, так же как и предыдущие, следует из свойств абсолютной вариации сферического отображения.

Дальнейшая классификация точек гладкой поверхности оказывается возможной благодаря следующей теореме Н. В. Ефимова [34].

Теорема 5. *Пересечение окрестности регулярной точки X гладкой поверхности с касательной плоскостью в этой точке представляет собой либо точку (точку X), либо четное число простых кривых, исходящих из точки X.*

Доказательство. Пусть X — регуляриая точка поверхности. Как всякая точка поверхиости, X является либо точкой одиостороииего расположеиия, либо точкой двустороииего расположения. Пусть X — точка одиостороииего расположения. Покажем, что касательная плоскость α в точке X с достаточно малой окрестиостью этой точки на поверхиости ие имеет других общих точек, кроме X. Действительио, в противиом случае существует последовательиость точек X_k поверхности, сходя-

щаяся к X и такая, что каждая точка этой последовательности лежит в плоскости α. Так как точка X является точкой одностороннего расположения, то для точек X_k, достаточно близких к X, плоскость α является касательной плоскостью, а это прoтиворечит предположению о регулярности точки X. Итак, если регулярная точка X является точкой одностороннего расположения, то касательная плоскость поверхности в этой точке имеет с достаточно малой окрестностью точки X только одну общую точку — точку X.

Пусть теперь регулярная точка X поверхности является точкой двустороннего расположения. Покажем, что пересечение окрестности точки X с касательной плоскостью в этой точке состоит из четного числа простых кривых, исходящих из точки X.

Пусть U — окрестность точки X, в которой нет точек с нормалями, параллельными нормали в точке X. Обозначим H пересечение окрестности U с касательной плоскостью α в точке X и $\bar{H}=H-X$. Так как касательная плоскость поверхности в каждой точке множества $\bar{H}$ не совпадает с плоскостью α, то каждая связная компонента множества $\bar{H}$ представляет собой простую дугу.

Пусть γ — связная компонента $\bar{H}$. Фиксируем на ней произвольную точку A. Пусть $\lambda(Y)$ — расстояние точки Y кривой γ от точки X, а $\mu(Y)$ — расстояние ее от границы окрестности U. Тогда при движении точки Y вдоль кривой γ в любом из двух направлений от A либо $\lambda(Y) \to 0$, либо $\mu(Y) \to 0$. Покажем это.

Возьмем в качестве параметра на кривой γ дугу s, отсчитываемую от точки A (на любом отрезке AY кривая γ гладкая, а потому спрямляема). Функция $s(Y)$, рассматриваемая по одну сторону от A, может быть ограниченной или неограниченной. Рассмотрим каждый из этих случаев.

Пусть $s(Y)$ ограничена и a — точная верхняя грань ее значений. При $s(Y) \to a$ точка Y стремится к определенному предельному положению Y_0. Y_0 не может быть внутренней точкой области $U-X$, так как в окрестности этой точки $\bar{H}$ представляет собой простую кривую, для которой Y_0 была бы внутренней точкой. Таким образом, Y_0 либо совпадает с X, тогда $\lambda(Y) \to 0$, либо лежит на границе U, и тогда $\mu(Y) \to 0$.

Рассмотрим теперь второй случай. В этом случае при движении Y от A в данном направлении $s(Y) \to \infty$. Если утверждение относительно функций λ и μ неверно, то существует последовательность точек Y_k, обладающая следующими свойствами:

1. $s(Y_k) \to \infty$ при $k \to \infty$.
2. $\lambda(Y_k) > \varepsilon$, $\mu(Y_k) > \varepsilon$,

где ε — положительное число.

Не ограничивая общности, можно считать также, что $s(Y_k) - s(Y_{k-1}) > 1$.

Множество точек Y_k имеет точку сгущения Y_0, являющуюся внутренней точкой области $U - X$. Эта точка, очевидно, принадлежит $\overline{H}$, которое в малой окрестности точки Y_0 представляет собой простую дугу $\overline{\gamma}$ конечной длины. И так как Y_k тоже принадлежит $\overline{H}$, то они должны быть на этой дуге при достаточно большом k. Следовательно, дуга $\overline{\gamma}$ является частью γ. Ввиду конечности длины $\overline{\gamma}$ на ней не может быть бесконечного множества точек Y_k. Мы пришли к противоречию. Итак, при движении вдоль любой компоненты γ множества $\overline{H}$ в том или другом направлении мы неограниченно приближаемся либо к точке X, либо к границе окрестности U.

Очевидно, каждая компонента $\overline{H}$, при движении вдоль которой в любую сторону неограниченно убывает расстояние до границы U, находится на положительном расстоянии от точки X.

Множество всех компонент $\overline{H}$, которые пересекают ε-окрестность точки X, конечно, если достаточно мало ε. Для доказательства заметим прежде всего, что не существует компоненты γ множества $\overline{H}$, при движении вдоль которой в любом из двух направлений мы неограниченно приближались бы к точке X. Действительно, такая компонента, пополненная точкой X, ограничивала бы кусок поверхности, принадлежащей U. И так как край этого куска поверхности лежит в плоскости α, то, очевидно, найдется на нем точка, в которой касательная плоскость будет параллельна плоскости α — касательной плоскости в точке X. Но это невозможно по выбору окрестности U. Отсюда следует, что любая компонента γ множества $\overline{H}$, пересекающая ε-окрестность точки X, пересекает ее границу.

Допустим, число компонент, пересекающих ε-окрестность точки X, бесконечно. Возьмем на каждой такой компоненте γ точку Y, лежащую на границе ε-окрестности. Пусть Y_0 — точка сгущения точек Y. Так как множество $\overline{H}$ в малой окрестности точки Y_0 представляет собой простую дугу $\overline{\gamma}$, то при достаточной близости Y к Y_0 точка Y должна быть на $\overline{\gamma}$ и, следовательно, γ содержит Y_0. Но это возможно только для одной компоненты. Мы пришли к противоречию. Таким образом, число компонент $\overline{H}$ конечно и, следовательно, в непосредственной близости точки X будут только те компоненты, которые в одну сторону неограниченно приближаются к точке X, в другую — к границе окрестности U. Точка X является концевой точкой для таких компонент.

Итак, пересечение окрестности U точки X с касательной плоскостью в этой точке в непосредственной близости точки X состоит из конечного числа простых кривых, исходящих из X.

То, что число кривых четно, вытекает из того, что эти кривые разбнвают окрестность точки X на «секторы» так, что смежные секторы располагаются по разные стороны касательной плоскости в точке X. Теорема доказана.

Регулярную точку X гладкой поверхности мы будем называть *эллиптической*, если достаточно малая окрестность точки X на поверхности имеет с касательной плоскостью в точке X только одну общую точку — точку X.

Точку X поверхности будем называть *параболической*, если пересечение касательной плоскостн в точке X с поверхностью вблизи X состоит из двух простых дуг, исходящих из X.

Точку X назовем *гиперболической*, если пересечение касательной плоскостн в X с поверхностью вблизи X состонт нз четырех простых дуг, нсходящнх из X.

Остальные регулярные точки будем называть *точками уплощения*. Вблнзи точки уплощения X пересечение поверхностн с касательной плоскостью состоит нз четного числа (большего четырех) простых дуг, исходящих из X.

Пусть H — любое множество точек на гладкой поверхности ограниченной внешней кривизны. *Положительной* (*отрицательной*) *кривизной* поверхности на множестве H мы будем называть абсолютную кривизну поверхности на подмножестве эллиптнческих (соответственно гиперболических) точек. *Полной кривизной поверхности* на множестве H будем называть разность между положительной и отрицательной крнвизнамн.

Теорема 6. *На гладкой поверхности ограниченной внешней кривизны положительная, отрицательная и полная кривизны суть ограниченные вполне аддитивные функции на кольце борелевских множеств поверхности.*

Теорема 7. *Положительная, отрицательная и полная кривизны поверхности на любом борелевском множестве H допускают интегральное представление*

$$\sigma^+(H) = \int_\Omega n_H^+(Y)\,dY, \quad \sigma^-(H) = \int_\Omega n_H^-(Y)\,dY,$$

$$\sigma(H) = \int_\Omega \left(n_H^+(Y) - n_H^-(Y)\right) dY,$$

где $n_H^+(Y)$ — число эллиптических, а $n_H^-(Y)$ — число гиперболических точек в H, имеющих своим образом точку Y при сферическом отображении поверхности, dY — элемент площади единичной сферы и интегрирование распространяется на всю сферу.

Теорема 8. *Пусть сферическое изображение гомеоморфной кругу области G, ограниченной простой кривой γ с равной нулю площадью сферического изображения, не покрывает*

точку S единичной сферы. Тогда полная кривизна поверхности в области G равна

$$\sigma(G) = \int\limits_{\Omega - \bar{\gamma} - S} q_{\bar{\gamma}}(Y)\, dY,$$

где $q_{\bar{\gamma}}(Y)$ — степень точки Y на сфере Ω с удаленной точкой S относительно кривой $\bar{\gamma}$ — сферического изображения γ, а интегрирование распространяется на множество $\Omega - \bar{\gamma} - S$ точек единичной сферы.

Теоремы 5, 6, 7 непосредственно вытекают из соответствующих свойств положительной, отрицательной и полной вариаций (§ 2) в применении к сферическому отображению и следующей леммы [34].

Лемма. *Каждая регулярная точка гладкой поверхности имеет относительно сферического отображения определенный индекс. Если единичная сфера соответствующим образом ориентирована, то индексы эллиптической, параболической и гиперболической точек соответственно равны* +1, 0 *и* —1, *а индекс точки уплощения меньше* —1.

Доказательство. То, что каждая регулярная точка поверхности имеет определенный индекс относительно сферического отображения, следует из того, что каждая такая точка является регулярной относительно сферического отображения. Выясним, чему равен индекс в различных случаях.

Согласно определению, ориентация поверхности задается единичным вектором нормали. Мы будем предполагать, что единичная сфера ориентирована единичным вектором $n(X)$, задающим ориентацию поверхности.

Пусть X — эллиптическая точка поверхности и α — касательная плоскость в этой точке. Проведем параллельную и близкую к ней плоскость со стороны, где расположена поверхность. Она пересечет поверхность вблизи точки X по гладкой простой замкнутой кривой γ, охватывающей точку X.

Пусть $\bar{X}$ — точка, соответствующая при сферическом отображении точке X, и $\bar{\gamma}$ — контур, соответствующий контуру γ. Обозначим $t(Y)$ полукасательную кривой γ в точке Y, а $\bar{n}(Y)$ — внешнюю нормаль в этой точке. Спроектируем контур $\bar{\gamma}$ на касательную плоскость сферы в точке $\bar{X}$. Полупрямая $g(Y)$, идущая из точки $\bar{X}$ в точку проекции кривой $\bar{\gamma}$, соответствующую точке Y, параллельна $n(Y)$. Индекс точки $\bar{X}$ есть полное изменение угла, образуемого полупрямой $g(Y)$ с некоторым фиксированным направлением, при обходе кривой γ, деленное на 2π. А так как полупрямые $g(Y)$ и $t(Y)$ перпендикулярны, то оно равно полному изменению угла, образуемого полукасательной

$t(Y)$ с фиксированным в плоскости направлением. Последнее же, очевидно, равно 2π. Следовательно, индекс эллиптической точки равен $+1$.

В случае регулярных точек двустороннего расположения поступаем следующим образом. Проведем две плоскости α_1 и α_2, параллельные плоскости α, близкие к ней и расположенные по разные стороны от α. Плоскость α пересекает поверхность в окрестности точки X по $2m$ кривым, которые разбивают окрестность точки X на $2m$ секторов. Каждая из плоскостей α_1 и α_2 пересекает поверхность по m кривым. Для одной плоскости эти кривые располагаются в четных секторах, для другой — в нечетных. При $\alpha_1, \alpha_2 \to \alpha$ эти кривые сходятся к сторонам секторов.

Возьмем на каждой кривой γ_k пересечения плоскости α с поверхностью точку X_k и соединим ее кривыми γ_k' и γ_k'' вблизи X_k с кривыми пересечения плоскостей α_1 и α_2 с поверхностью, которые расположены в секторах, прилегающих к γ_k. Так из кривых пересечения плоскостей α_1 и α_2 с поверхностью и кривых γ_k', γ_k'' образуется контур γ, охватывающий точку X. В дальнейшем он играет ту же роль, что и контур γ в рассмотренном случае эллиптической точки.

Пусть $\bar{\gamma}$ — сферическое изображение контура γ и $\tilde{\gamma}$ — его проекция на касательную плоскость сферы в точке $\bar{X}$. Обозначим $g(Y)$ полупрямую, идущую из точки $\bar{X}$ в точку кривой $\tilde{\gamma}$, соответствующую точке Y кривой γ. Тогда индекс точки X равен деленному на 2π полному изменению угла $\vartheta(Y)$, образуемого полупрямой $g(Y)$ с некоторым фиксированным направлением, при обходе контура γ.

Это изменение можно представить как сумму изменений указанного угла на участках кривой, определяемых секторами. Изменение угла $\vartheta(Y)$ на участке кривой γ, расположенном внутри сектора, ограниченного кривыми γ_k и γ_{k+1}, мало отличается от $\varphi_k - \pi$, где φ_k — угол, образуемый касательными в точках X_k и X_{k+1} кривых γ_k и γ_{k+1}. Чтобы в этом убедиться, надо воспользоваться параллельностью $g(Y)$ и нормали кривой пересечения плоскости α_1 (или α_2) с поверхностью в точке Y.

Разность между изменением угла $\vartheta(Y)$ на участке кривой γ в секторе (γ_k, γ_{k+1}) и величиной $\varphi_k - \pi$ сколь угодно мала, если плоскости α_1 и α_2 достаточно близки к α. Таким образом, индекс точки X сколь угодно мало отличается от величины

$$\frac{1}{2\pi} \sum_k (\varphi_k - \pi) = 1 - m.$$

И так как он должен быть целым, то он равен $(1 - m)$.

Отсюда следует, что индекс параболической точки равен нулю, индекс гиперболической точки равен —1, а индекс точки уплощения меньше —1. Лемма доказана.

Сейчас мы докажем ряд теорем, которые найдут применение в следующих двух параграфах при изучении поверхностей неотрицательной и нулевой внешней кривизны. Некоторые из этих теорем представляют и самостоятельный интерес.

Мы будем говорить, что поверхность Φ не допускает отрезания «горбушек», если среди областей, на которые ее разбивает произвольная плоскость α, не найдется такой, граница которой целиком принадлежала бы плоскости α. Очевидно, на поверхности, не допускающей отрезания горбушек, не может быть эллиптических точек, и положительная кривизна такой поверхности равна нулю.

Теорема 9. *Пусть Φ — гладкая поверхность, не допускающая отрезания горбушек, X — точка поверхности Φ и α — касательная плоскость в этой точке.*

Тогда либо среди областей, на которые разбивает плоскость α поверхность Φ, найдутся четыре, для которых точка X граничная, либо плоскость α касается поверхности вдоль континуума, содержащего точку X.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что поверхность Φ гомеоморфна кругу, однозначно проектируется на плоскость α и что плоскость α является плоскостью xy. Проведем через точку X плоскость β, перпендикулярную плоскости α. Она пересечет поверхность по некоторой кривой γ. Можно считать, что кривая γ в окрестности точки X не является прямолинейным отрезком. (Если для каждой плоскости β кривая γ в окрестности точки X является прямолинейным отрезком, то существование континуума, о котором идет речь в теореме, очевидно.)

Проведем в плоскости β прямую g так, чтобы она пересекала кривую γ в двух близких к X точках A и B, нигде не касалась этой кривой и чтобы число точек пересечения было конечным. Не ограничивая общности, будем предполагать, что между точками A и B нет других точек пересечения и что отрезок AB прямой g расположен над поверхностью.

Утверждается, что через прямую g можно провести плоскость δ так, что среди областей, на которые разбивает эта плоскость поверхность, найдутся три, каждая из которых содержит на границе по крайней мере одну из точек A или B и «прилегает» к границе поверхности Φ.

Возьмем на прямой g три точки L, M и N вне поверхности: точку L, близкую к A, вне отрезка AB так, чтобы на отрезке LA не было точек поверхности, точку M на отрезке AB, точку N, близкую к B, вне отрезка AB так, чтобы отрезок BN не пере-

секал поверхность. Таким образом, в нашем предположении относительно расположения отрезка AB и поверхности точка M находится над поверхностью, а точки L и N под ней. Обозначим $\overline{L}$, $\overline{M}$ и $\overline{N}$ проекции точек L, M и N на поверхность прямыми, параллельными оси z.

Пусть G_L, G_M и G_N — области разбиения поверхности плоскостью δ, содержащие точки $\overline{L}$, $\overline{M}$ и $\overline{N}$ соответственно. Очевидно, если области G_L и G_N не совпадают, то три области G_L, G_M, G_N и есть те, существование которых утверждается.

Обозначим $\overline{\gamma}$ отрезок AB кривой γ. Так как поверхность Φ не допускает отрезания горбушек, то, какова бы ни была плоскость δ, точку $\overline{M}$ можно соединить с границей поверхности кривой γ_δ, которая целиком лежит под плоскостью δ, причем точка $\overline{M}$ является единственной общей точкой кривых γ_δ и $\overline{\gamma}$. Относительно кривой γ_δ мы будем говорить, что она проходит справа (слева) от $\overline{\gamma}$, если она вблизи точки $\overline{M}$ расположена справа (соответственно слева) от $\overline{\gamma}$.

Допустим, для некоторой плоскости δ можно указать две кривые $-\gamma'_\delta$ и γ''_δ, проходящие справа, соответственно слева, от $\overline{\gamma}$. Очевидно, каждую из кривых γ'_δ и γ''_δ можно считать простой. В противном случае можно построить, исходя из кривых γ'_δ и γ''_δ, простые кривые, обладающие теми же свойствами.

Кривые γ'_δ и γ''_δ не имеют других общих точек, кроме $\overline{M}$. Действительно, пусть P — первая их точка пересечения, если следовать из $\overline{M}$ вдоль γ_δ. Отрезки $\overline{M}P$ кривых γ'_δ и γ''_δ образуют простую замкнутую кривую. Она ограничивает гомеоморфную кругу область Φ' на поверхности. Очевидно, одна из точек — A или B — принадлежит Φ'. И так как край поверхности Φ' и точки A, B располагаются по разные стороны плоскости δ, то эта плоскость отрезает горбушку. Но это невозможно по условию теоремы.

Итак, кривая $\gamma'_\delta+\gamma''_\delta$ простая. Она разбивает поверхность Φ на две части. В одной из них точка A, а с ней и $\overline{L}$, а в другой — точки B и $\overline{N}$. Вместе с точками $\overline{L}$ и $\overline{N}$ указанным областям принадлежат G_L и G_N, которые, таким образом, различны. Остается показать, что всегда найдется положение плоскости δ, для которого есть две кривые γ'_δ и γ''_δ, обладающие указанным свойством.

Если плоскость δ из вертикального положения повернуть в ту или другую сторону на малый угол, то в одном случае существует только правая кривая γ_δ, а в другом — только левая. Отсюда следует, что существует такое положение δ_0 плоскости δ, для которого существуют плоскости, сколь угодно близкие к δ_0, с правыми и левыми кривыми γ_δ.

Пусть для самой плоскости δ_0 кривая γ_{δ_0} правая. Возьмем близкое к δ_0 положение δ_1 плоскости δ, чтобы кривая γ_{δ_1} была левой. Так как кривая γ_{δ_0} лежит существенно под плоскостью δ_0, то кривая γ_{δ_0} будет также под плоскостью δ_1 из-за близости δ_1 к δ_0. Таким образом, для плоскости δ_1 существует правая и левая кривая γ_δ. А в этом случае, как показано выше, G_L, G_M и G_N различны.

Возьмем теперь последовательность прямых g, сходящуюся к касательной γ в точке X. Для каждой прямой получим три не пересекающиеся области — G_L, G_M и G_N. Когда g сходится к касательной в точке X, точки L, M, N сходятся к точке X, плоскость δ_g, определяющая указанные области, сходятся к касательной плоскости поверхности в точке X.

Область G_M разбивается отрезком $\overline{\gamma}$ кривой γ на две области $-G_M'$ и G_M''. Для каждой из четырех областей $G-G_L$, G_N, G_M' и G_M'' — можно сделать два предположения, которые мы будем обозначать Ω и $\overline{\Omega}$.

Условие Ω: для каждого $\varepsilon>0$ в ε-окрестности точки X внутри G найдется точка Y, расстояние которой от касательной плоскости поверхности в точке X не меньше $h_\varepsilon>0$, причем h зависит только от ε и не зависит от плоскости δ, которой определяется G. Условие $\overline{\Omega}$ заключается в том, что условие Ω не выполняется для некоторого ε.

Покажем, что если выполняется условие $\overline{\Omega}$, то существует континуум на поверхности, содержащий точку X, вдоль которого касательная плоскость стационарна, т. е. совпадает с касательной плоскостью в точке X.

Опишем около точки X кружок радиуса $\varepsilon/2$ на поверхности и обозначим связную компоненту G внутри этого кружка, достаточно близкую к точке X, через G_ε. Угол, образуемый касательной плоскостью в произвольной точке G_ε с плоскостью α — касательной плоскостью в X, — равномерно стремится к нулю для некоторой последовательности плоскостей δ, сходящихся к α. Действительно, допустим, на G_ε есть точка V такая, что указанный угол больше $\vartheta_0>0$. Тогда в области G можно удалиться от плоскости α на расстояние порядка $\varepsilon \operatorname{tg} \vartheta_0$, а это противоречит условию $\overline{\Omega}$.

Пусть последовательность положительных чисел μ_k сходится к нулю. Определим последовательность множеств M_k на поверхности Φ. Точку X поверхности отнесем M_k, если ее расстояние от плоскости α не больше μ_k, и угол, образуемый касательной плоскостью в этой точке с плоскостью α, также не больше μ_k. Для любого M_k найдется G_ε, в нем содержащаяся. Поэтому M_k содержит связную компоненту, которая пересекает границу

$\varepsilon/2$-окрестности U_ε точки X и сколь угодно близка к X. Отсюда следует, что пересечение всех M_k содержит континуум, исходящий из точки X, вдоль которого поверхность касается плоскости α.

Пусть теперь для каждой из четырех областей G выполняется условие Ω. Покажем, что тогда среди областей, на которые плоскость α разбивает поверхность Φ, найдутся четыре, содержащие на границе точку X.

Сместим плоскость α вверх и вниз параллельно себе на малое расстояние h. Полученные при этом плоскости обозначим α^+ и α^- соответственно. При достаточно малом h области G_L и G_N будут иметь точки над плоскостью α^+, сколь угодно близкие к точке X, а области G'_M и G''_M — точки, расположенные под плоскостью α, тоже сколь угодно близкие к X. Обозначим $\tilde{G}_L$, $\tilde{G}_N$, $\tilde{G}'_M$ и $\tilde{G}''_M$ области на поверхности Φ, содержащие указанные точки и расположенные над плоскостью α^+ и α^- соответственно. Если после того, как точки выбраны, взять плоскость δ, достаточно близкую к α, то области $\tilde{G}_L$, $\tilde{G}_N$, $\tilde{G}'_M$ и $\tilde{G}''_M$ будут частями областей G_L, G_N, G'_M и G''_M и не будут пересекаться. Каждая из четырех областей $\tilde{G}_L, \ldots, \tilde{G}''_M$ прилегает к границе поверхности Φ (иначе она представляла бы собой горбушку). При $h \to 0$ области $\tilde{G}_L, \ldots, \tilde{G}''_M$ сходятся к четырем не пересекающимся областям, каждая из которых содержит на границе точку X. Теорема доказана.

Теорема 10. *Пусть Φ — гладкая поверхность, не допускающая отрезания горбушек, и K — континуум на ней, имеющий сферическим изображением точку. Тогда касательная плоскость поверхности вдоль континуума K стационарна, т. е. касательная плоскость поверхности во всех точках континуума одна и та же.*

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что поверхность Φ задана уравнением

$$z = z(x, y)$$

и в точках континуума

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Допустим, утверждение теоремы неверно и континуум содержит две точки — A и B, координаты z у которых различны. Пусть для определенности $z_A < z_B$. Рассечем поверхность Φ плоскостью α_t:

$$z = t, \qquad z_A \leqslant t \leqslant z_B.$$

Эта плоскость содержит по крайней мере одну точку C_t континуума K. Обозначим M_t ту компоненту пересечения плоскости α_t с поверхностью, которой принадлежит точка C_t. По теореме 9 M_t либо содержит континуум, вдоль которого $\partial z/\partial x = \partial z/\partial y = 0$, либо разбивает поверхность по крайней мере на четыре области. В работе А. С. Кронрода [42] показано, что множество значений t, для которых имеет место хотя бы одна из указанных возможностей, имеет меру нуль. Отсюда следует, что весь континуум K лежит в плоскости $z = \mathrm{const}$, которая касается поверхности во всех точках K. Теорема доказана.

Теорема 11. *Если поверхность ограниченной внешней кривизны допускает отрезание горбушек, то положительная кривизна поверхности отлична от нуля, в частности на поверхности есть эллиптические точки.*

Доказательство. Пусть α — плоскость, отрезающая горбушку S от поверхности, т. е. кусок поверхности с краем, целиком лежащим в плоскости α. Поверхность S имеет опорные плоскости всех направлений, достаточно близких к α. Отсюда следует, что сферическое изображение множества точек одностороннего расположения имеет не равную нулю площадь. Так как сферическое изображение множества нерегулярных точек поверхности имеет площадь, равную нулю, а регулярная точка одностороннего расположения может быть только эллиптической, то сферическое изображение множества эллиптических точек поверхности имеет площадь, отличную от нуля. Следовательно, положительная кривизна поверхности отлична от нуля. Теорема доказана.

Теорема 12. *Если на поверхности ограниченной внешней кривизны есть эллиптическая (гиперболическая) точка, то положительная (соответственно отрицательная) кривизна поверхности отлична от нуля.*

Если на поверхности есть параболическая точка, то положительная и отрицательная кривизна отличны от нуля.

Доказательство. То, что положительная кривизна поверхности отлична от нуля, если на ней есть эллиптическая точка, следует из теоремы 11, так как в этом случае поверхность, очевидно, допускает отрезание горбушек.

Пусть X — гиперболическая точка поверхности. Покажем, что отрицательная кривизна поверхности отлична от нуля. Пусть ω — малая гомеоморфная кругу окрестность точки X, ограниченная простой кривой γ и такая, что в ней и на ее границе γ нет точек с касательными плоскостями, параллельными касательной плоскости в X, кроме самой X. Обозначим $\overline{X}$ и $\overline{\gamma}$ сферическое изображение точки X и кривой γ соответственно, а U — компоненту разбиения сферы кривой $\overline{\gamma}$, которой принад-

лежит точка $\overline{X}$. Почти все точки U имеют в ω в качестве прообразов только эллиптические, гиперболические и параболические точки и притом в конечном числе. А так как степень точки $Y \subset U$ равна сумме индексов прообразов и в то же время равна (-1) — степени точки $\overline{X}$, то среди прообразов должны быть гиперболические точки. Таким образом, площадь сферического изображения гиперболических точек поверхности не меньше площади U. Следовательно, отрицательная кривизна поверхности отлична от нуля.

Рассмотрим случай параболической точки X. Допустим, существуют сколь угодно близкие к X эллиптические точки. Тогда положительная кривизна поверхности в сколь угодно малой окрестности точки X отлична от иуля. Отсюда следует, что в любой сколь угодио малой окрестиости U^* точки $\overline{X}$ есть миожество M положительной площади, каждая точка которого имеет среди прообразов хотя бы одну эллиптическую точку, а остальные прообразы могут быть только гиперболическими и параболическими точками. Так как сумма иидексов прообразов точки $Y \subset M$ в ω должна быть равна нулю (степени $\overline{X}$ относительно $\overline{\gamma}$), если окрестность достаточно мала, а среди прообразов заведомо есть эллиптическая точка, то среди иих должна быть хотя бы одна гиперболическая точка. И, следовательно, по доказанному отрицательная кривизна поверхности также не равна иулю.

Допустим теперь, что в достаточно малой окрестности точки X нет эллиптических точек поверхности. Не ограничивая общности, можно считать, что такой окрестностью является ω. Поверхность ω не допускает отрезания горбушек в силу теоремы 11. А тогда по теореме 9 точка X не может быть параболической, так как касательиая плоскость поверхиости в точке X разбивает окрестность на две области, а плоского континуума, о котором идет речь в теореме 9, ие может быть из-за регуляриости точки X. Теорема доказаиа.

Теорема 13. *Замкнутая поверхность Φ ограниченной внешней кривизны имеет полную кривизну*

$$\sigma = 2\pi\chi(\Phi),$$

где $\chi(\Phi)$ — эйлерова характеристика поверхности.

Доказательство. Для гладкой кусочно-аналитической поверхности это утверждение следует, как известно, из теоремы Гаусса — Боннэ.

Разобьем поверхность Φ на малые элементарные области G_k, ограниченные кривыми γ_k. Возьмем в каждой области G_k точку X_k. Пусть $\overline{X}_k$ ее сферическое изображение, а $\overline{X}_k^*$ — точка сферы ω, диаметрально противоположная $\overline{X}_k$. Обозначим $\overline{\gamma}_k$

сферическое изображение кривой γ_k и $q_{\bar{\gamma}_k, \bar{X}^*}(Y)$ — степень точки $Y \subset \omega$ на сфере ω с удаленной точкой $\bar{X}^*$. Тогда

$$\sigma(\Phi) = \sum_k \int_\omega q_{\bar{\gamma}_k, \bar{X}_k^*}(Y)\, dY.$$

Очевидно, в этой формуле можно взять вместо точек $\bar{X}_k^*$ близкие точки.

Пусть $\tilde{\Phi}$ — близкая к Φ гладкая кусочно-аналитическая поверхность, причем такая, что в близких точках касательные плоскости поверхностей Φ и $\tilde{\Phi}$ образуют малые углы. Подвергнем поверхность $\tilde{\Phi}$ разбиению на элементарные области $\tilde{G}_k$ кусочно-регулярными кривыми $\tilde{\gamma}_k$, близкими к кривым γ_k, топологически эквивалентному разбиению поверхности Φ на области G_k. Пусть в соответствующих точках поверхностей Φ и $\tilde{\Phi}$, лежащих на границе по крайней мере трех областей G, нормали параллельны. Полная кривизна поверхности $\tilde{\Phi}$ равна

$$\sigma(\tilde{\Phi}) = \sum_k \int_\omega q_{\bar{\bar{\gamma}}_k, \bar{X}_k^*}(Y)\, dY.$$

Покажем что

$$\sum_k \int_\omega q_{\bar{\gamma}_k, \bar{X}_k^*}(Y)\, dY = \sum_k \int_\omega q_{\bar{\bar{\gamma}}_k, \bar{X}_k^*}(Y)\, dY.$$

Отрезки кривых $\bar{\gamma}_k$ и $\bar{\bar{\gamma}}_k$ естественным образом поставлены в соответствие топологической эквивалентностью разбиения на элементарные области поверхностей Φ и $\tilde{\Phi}$. Пусть γ — отрезок, общий кривым $\bar{\gamma}_i$ и $\bar{\gamma}_j$, а $\bar{\gamma}$ — соответствующий отрезок, общий кривым $\bar{\bar{\gamma}}_i$ и $\bar{\bar{\gamma}}_j$. Имеем

$$\int_\omega q_{\bar{\gamma}_i}(Y)\, dY + \int_\omega q_{\bar{\gamma}_j}(Y)\, dY = \int_\omega \left(q_{\bar{\gamma}_i}(Y) + q_{\bar{\gamma}_j}(Y)\right) dY =$$

$$= \int_\omega q_{\bar{\gamma}_i + \bar{\gamma}_j}(Y)\, dY = \int_\omega q_{\bar{\gamma}'_i}(Y)\, dY + \int_\omega q_{\bar{\gamma}'_j}(Y)\, dY,$$

где $\bar{\gamma}'_i$ и $\bar{\gamma}'_j$ получаются заменой в кривых $\bar{\gamma}_i$ и $\bar{\gamma}_j$ отрезка γ на отрезок $\tilde{\gamma}$. Таким образом, можно последовательно заменить отрезки кривых $\bar{\gamma}_k$ соответствующими отрезками кривых $\bar{\bar{\gamma}}_k$ и перейти от степени точки относительно кривых $\bar{\gamma}_k$ к степени ее относительно кривых $\bar{\bar{\gamma}}_k$. Этим и устанавливается равенство сумм соответствующих интегралов, т. е. равенство полных кривизн поверхностей Φ и $\tilde{\Phi}$.

Итак, для доказательства теоремы достаточно построить кусочно-аналитическую поверхность, обладающую указанными свойствами. Возьмем малое $\varepsilon > 0$, и достаточно густую сеть точек A_k на поверхности. Около каждой точки A_k опишем шар ω_k радиуса ε. Пусть T — тело, составленное из всех шаров ω_k. При достаточной густоте точек A_k связная компонента S границы T представляет собой кусочно-аналитическую поверхность, близкую к Φ, причем ее касательные плоскости образуют с касательными плоскостями Φ в близких точках малые углы. Остается, таким образом, только сгладить построенную поверхность.

Не ограничивая общности, можно считать, что никакие четыре сферы S_k, ограничивающие шары ω_k, не пересекаются в одной точке. Представим себе, что шар ω достаточно малого радиуса обкатывает поверхность S снаружи T. При этом он огибает некоторую поверхность $\tilde{S}$. Поверхность $\bar{\Phi}$, которую мы хотим получить, является частью $\tilde{S}$. Она состоит из кусков сфер S_k, кусков торов, соответствующих пересечениям сфер S_k по две, и кусков сфер ω, соответствующих пересечениям S_k по три. Очевидно, указанным построением можно удовлетворить и последнему условию, которому должна удовлетворять поверхность $\bar{\Phi}$, именно, чтобы в соответствующих точках поверхностей Φ и $\tilde{\Phi}$, лежащих на границе по крайней мере трех элементарных областей G, нормали были параллельны. Теорема доказана.

§ 4. Поверхности нулевой внешней кривизны

Гладкую поверхность Φ ограниченной внешней кривизны мы будем называть *поверхностью нулевой кривизны*, если ее положительная и отрицательная кривизны равны нулю. Очевидно, полная кривизна такой поверхности на любом множестве равна нулю. Обратное также верно. Именно, если полная кривизна поверхности на любом множестве равна нулю, то поверхность является поверхностью нулевой кривизны. Более того, если полная кривизна на любом открытом множестве равна нулю, то поверхность является поверхностью нулевой кривизны. Покажем это.

Если полная кривизна на любом открытом множестве равна нулю, то в силу полной аддитивности она равна нулю на всех борелевских множествах. Отсюда следует, что положительная и отрицательная кривизны на всех борелевских множествах равны нулю. В частности, положительная и отрицательная кривизны всей поверхности равны нулю.

В настоящем параграфе мы выясним строение поверхностей нулевой кривизны.

Теорема 1. *Поверхность нулевой кривизны развертывающаяся (т. е. локально изометрична плоскости) и имеет обычное для регулярных развертывающихся поверхностей строение с прямолинейными образующими и стационарной касательной плоскостью вдоль каждой образующей.*

Доказательство. Во-первых, покажем, что *площадь сферического изображения поверхности нулевой кривизны равна нулю.* Действительно, на поверхности не может быть ни эллиптических, ни гиперболических, ни параболических точек, так как при наличии на поверхности хотя бы одной из указанных точек, как показано в предыдущем параграфе, либо положительная, либо отрицательная кривизна отлична от нуля, что невозможно. Так как на поверхности нет ни эллиптических, ни гиперболических, ни параболических точек, то ее абсолютная кривизна равна нулю, а следовательно, равна нулю и площадь сферического изображения.

В ближайших рассмотрениях мы ограничимся достаточно малым куском поверхности и будем предполагать, что он задан уравнением

$$z=z(x,\ y)$$

над некоторым кругом K плоскости xy.

Обозначим E_p множество тех точек поверхности, в которых $\partial z/\partial x=p$. Тогда *для почти всех p касательная плоскость вдоль каждой компоненты E_p стационарна.* Действительно, сферическое изображение E_p расположено на дуге большого круга $\varkappa_p$. Так как площадь сферического изображения поверхности равна нулю, то для почти всех p линейная мера сферического изображения E_p на $\varkappa_p$ равна нулю. Отсюда следует, что для каждого такого p сферическое изображение любой компоненты E_p есть точка. По теореме предыдущего параграфа заключаем, что касательная плоскость вдоль каждой компоненты E_p стационарна. Утверждение доказано.

Пусть касательная плоскость поверхности вдоль каждой компоненты E_p стационарна. *Тогда каждая такая компонента пересекается с границей поверхности.* Допустим, утверждение неверно и $\varkappa$ — компонента E_p, которая не пересекается с границей поверхности. Пусть ε — настолько малое положительное число, что ε-окрестность $\varkappa$ тоже не пересекается с границей поверхности. Существует разбиение множества E_p на два замкнутых подмножества — E_p' и E_p'', находящихся на положительном расстоянии, из коих первое содержит $\varkappa$ и содержится в его ε-окрестности.

Так как множество E_p' находится на положительном расстоянии от границы поверхности и множества E_p'', то существует простая замкнутая кривая γ, отделяющая E_p' от границы

поверхности и не пересекающаяся с E''_p. Пусть G — гомеоморфная кругу область, ограниченная этой кривой.

Вдоль кривой γ разность $\partial z/\partial x - p$ сохраняет знак. Пусть для определенности $\partial z/\partial x > p+\delta$ $(\delta>0)$. Возьмем произвольное p' между p и $p+\delta$. Множество $E_{p'}$ отделяет $\varkappa$ от γ. Следовательно, в $E_{p'}$ найдется компонента $\varkappa_{p'}$, отделяющая $\varkappa$ от γ. Она содержится в области G. Обозначим $\tilde{\varkappa}$ ту компоненту разбиения области G множеством $\varkappa_{p'}$, которой принадлежит $\varkappa$. Очевидно, $\tilde{\varkappa}$ — область, границей ее служит $\varkappa_{p'}$. Ввиду произвола p' по доказанному можно считать, что касательная плоскость вдоль $\varkappa_{p'}$ стационарна; обозначим ее α. Компонента разбиения поверхности плоскостью α, содержащая какую-нибудь точку $\tilde{\varkappa}$, не лежащую в плоскости α, есть горбушка. Но поверхность не допускает отрезания горбушек, так как положительная кривизна равна нулю. Утверждение доказано.

Для удобства дальнейших рассмотрений обозначим Ω множество тех значений p, для которых выполняются следующие два условия:

1) касательная плоскость вдоль каждой компоненты стационарна;

2) никакая компонента E_p не содержит точек ветвления, в частности E_p не имеет внутренних точек.

Как показано выше, первое условие выполняется почти для всех p. Что касается второго условия, то и оно выполняется почти для всех p [42].

Пусть $p\subset\Omega$. Множество E_p разбивает поверхность на области. Пусть G — одна из областей, в которой для определенности $\partial z/\partial x > p$. Пусть $\varkappa$ — любая компонента границы G. Очевидно, $\varkappa$ принадлежит одной из компонент E_p или является целой компонентой. Покажем, что $\varkappa$ *пересекается с границей поверхности*. При этом мы воспользуемся теми же соображениями, которые были применены при доказательстве того, что каждая компонента E_p пересекается с границей поверхности.

Пусть F — вся граница области G. Если утверждение неверно, то существует простая замкнутая кривая γ, отделяющая $\varkappa$ от границы поверхности и не пересекающая F. Кривая γ проходит в G. Действительно, возьмем в G точку A, близкую к $\varkappa$ и такую, чтобы соответствующее ей $p'=\partial z/\partial x\subset\Omega$. Компонента $\varkappa'$ точки A множества $E_{p'}$ проходит в G и пересекается с границей поверхности по доказанному. Так как точка A близка к $\varkappa$, а следовательно, лежит внутри области, ограниченной кривой γ, то компонента $\varkappa'$ пересекает кривую γ. Итак, на кривой γ есть точка из G. Но тогда вся кривая проходит в G, так как не пересекает ее границу. После этого мы заключаем о возможности отрезания горбушки точно так же, как

в указанном доказательстве. Но поверхность не допускает отрезания горбушек. Утверждение доказано.

Продолжим исследование компоненты $\varkappa$ границы области G. Компонента $\varkappa$ лежит в некоторой плоскости α, которая касается поверхности в каждой точке $\varkappa$. Подвергнем поверхность некоторому преобразованию, которое будем называть «уплощением». Оно заключается в следующем.

Пусть A — точка поверхности, не принадлежащая ни G, ни E_p. Тогда она отделена некоторой компонентой $\tilde{\varkappa}\subset E_p$ от G. Пусть $\tilde{G}$ — компонента точки A, определяемая разбиением поверхности множеством $\tilde{\varkappa}$. Мы заменим область $\tilde{G}$ куском плоскости, касающейся поверхности вдоль $\tilde{\varkappa}$.

Полученная таким образом новая поверхность будет гладкой, а ее сферическое изображение будет содержаться в сферическом изображении исходной поверхности. Конечным или счетным числом таких уплощений мы получаем гладкую поверхность нулевой кривизны, у которой

$$\frac{\partial z}{\partial x}\geqslant p,$$

причем знак «больше» имеет место только в области G, которая, как и ее граница, остались такими же, как и на исходной поверхности. Таким образом, строение компоненты $\varkappa$ можно изучать на преобразованной поверхности.

В отличие от предыдущих рассмотрений мы будем предполагать, что $\varkappa$ является компонентой границы G на открытой поверхности (без ограничивающей ее кривой). Обозначим $\tilde{\Phi}$ область на плоскости α (касательной плоскости вдоль компоненты $\varkappa$), в которую проектируется поверхность прямыми, параллельными оси z, и $\tilde{G}$ — область, соответствующую области G. Очевидно, граница $\tilde{G}$ совпадает с границей G, поэтому $\varkappa$ является компонентой границы $\tilde{G}$.

Обозначим $\varkappa^*$ компоненту множества E_p на уплощенной поверхности, содержащую компоненту $\varkappa$ границы G. *Компонента* $\varkappa^*$ *лежит в плоскости* α. Действительно, так как сферическое изображение E_p имеет линейную меру нуль, то сферическое изображение $\varkappa^*$ есть точка. Поэтому $\varkappa^*$ лежит в плоскости, касающейся поверхности во всех точках множества $\varkappa^*$. Но $\varkappa$ принадлежит $\varkappa^*$, следовательно, этой плоскостью является α.

Множество $\varkappa$ лежит на границе $\varkappa^*$. Действительно, пусть A — точка из $\varkappa$. Тогда в любой ее окрестности есть точки из $\tilde{G}$. Но это значит, что A лежит на границе $\varkappa^*$.

Пусть g — произвольная прямая в плоскости α, параллельная плоскости xz и пересекающая $\varkappa^*$. Пересечение прямой g с $\varkappa^*$ есть либо точка, либо отрезок. Это следует из того, что

на уплощенной поверхности $\partial z/\partial x \geqslant p$, а угловой коэффициент плоскости α равен p. Таким образом, *множество $\varkappa^*$ состоит из прямолинейных отрезков и точек, расположенных на непрерывном множестве прямых в плоскости α, параллельных плоскости xz.*

Пересечение замыкания множества $\varkappa^*$ с границей поверхности связно. Действительно, в противном случае $\varkappa^*$ разбивает поверхность по крайней мере на две области, в каждой из которых есть точки G. Но это невозможно из-за связности G.

Так как пересечение замыкания $\varkappa^*$ с границей поверхности связно, то граница $\varkappa^*$ связна и, следовательно, *вся граница $\varkappa^*$ состоит из $\varkappa$.*

Обозначим W_{xz} множество прямых в плоскости α, параллельных плоскости xz, и $\overset{*}{W}_{xz}$ — подмножество множества W_{xz}, составленное из прямых, пересекающих $\varkappa^*$. Пусть g — произвольная прямая из $\overset{*}{W}_{xz}$, A_g^- — первая и A_g^+ — последняя точки пересечения ее с $\varkappa^*$, если следовать со стороны $x<0$ в сторону $x>0$ вдоль прямой g. Может случиться, что одной или даже обеих точек не существует. Это будет тогда, когда один из концов или оба конца отрезка, по которому пересекает прямая g множество $\varkappa^*$, принадлежат границе поверхности. Точки A_g^- и A_g^+ определяют полупрямые g^- и g^+ прямой g, направленные в сторону $x<0$ и $x>0$ соответственно. Множества, образованные этими полупрямыми, обозначим W_{xz}^- и W_{xz}^+.

Каждая компонента w множества W_{xz}^- (или W_{xz}^+) является открытым множеством в W_{xz}^- (соответственно W_{xz}^+), а следовательно, гомеоморфна отрезку, если $\overset{*}{W}_{xz}$ не сводится к единственной прямой. Пусть g_1 и g_2 — прямые, ограничивающие w, и g — любая прямая из w, расположенная между g_1 и g_2. Утверждается, что *множество с точек A_g^- (соответственно A_g^+) есть выпуклая кривая и обращена выпуклостью в сторону $x>0$ (соответственно $x<0$).* Докажем это утверждение, предполагая для определенности, что w является компонентой W_{xz}^-.

Допустим, утверждение неверно. Тогда найдутся три прямые g', g'', g''', для которых выполняются следующие условия:

1) прямая g' расположена между прямыми g' и g''';

2) существует прямая t в плоскости α, отделяющая точку $A_{g''}^-$ от точек $A_{g'}^-$ и $A_{g'''}^-$, причем точка $A_{g''}^-$ расположена со стороны $x<0$.

Прямые g_1 и g_2 ограничивают в плоскости α полосу S. Обозначим S^- множество точек полосы, принадлежащих полупрямым g^-. Пусть Φ_S — та часть поверхности, которая прямыми, параллельными оси z, проектируется на полосу S. Преобразуем

поверхность Φ_S, оставив без изменения ту ее часть, которая соответствует в указанном проектировании S^-, и заменив оставшуюся часть множеством $S - S^-$. Полученную при этом поверхность будем обозначать $\overline{\Phi}_S$. Поверхность $\overline{\Phi}_S$ гладкая, с нулевой кривизной и, следовательно, не допускает отрезания горбушек.

Относительно поверхности $\overline{\Phi}_S$ существенно заметить следующее. Так как при достаточно больших x имеем $\partial z/\partial x = p$ (поверхность $\overline{\Phi}_S$ на значительном удалении в сторону $x > 0$ лежит в плоскости α), а на всей поверхности $\partial z/\partial x \geqslant p$, то поверхность $\overline{\Phi}_S$ расположена ниже плоскости α. Далее, пусть D — область на поверхности $\overline{\Phi}_S$, которая проектируется в часть полосы S, ограниченную прямой t и полупрямыми g'^- и g'''^-. Граница этой области, кроме некоторого участка, принадлежащего прямой t, лежит существенно ниже плоскости α.

Проведем через прямую t плоскость β, близкую плоскости α, так, чтобы точка $A^-_{g''}$ была над плоскостью β. Пусть R_β — компонента разбиения поверхности $\overline{\Phi}_S$ плоскостью β, которой принадлежит точка $A^-_{g''}$. Точка $A^-_{g''}$ принадлежит области D. А так как поверхность не допускает отрезания горбушек, то R_β пересекает границу D. Но при достаточной близости β к α это невозможно. Действительно, часть границы D, соответствующую прямой t, R_β не пересекает, так как R_β расположена над одной полуплоскостью плоскости β, определяемой прямой t. Оставшуюся часть границы R_β не пересекает, потому что она находится существенно под плоскостью α, а следовательно, и под плоскостью β, если она достаточно близка к α. Мы пришли к противоречию. Утверждение доказано.

Покажем теперь, что число компонент множеств W^-_{xz} и W^+_{xz} не может быть слишком большим. Именно, утверждается, что оно не больше трех. Действительно, если число компонент больше трех, то найдутся две компоненты w и w', ограниченные прямыми, не являющиеся граничными в множестве W_{xz}. Каждая из компонент w и w' определяет на поверхности область T (соответственно T'), которая прямыми, параллельными оси z, проектируется в w (соответственно w'). Граница каждой из областей T и T' принадлежит $\varkappa$. И так как в каждой из областей T и T' есть точки области G, то $\varkappa$ разбивает G, что невозможно.

Так как число компонент множеств W^-_{xz} и W^+_{xz} не превосходит трех, то $\varkappa$ состоит из конечного числа выпуклых кривых (c), однозначно проектирующихся на ось y, и прямолинейных отрезков, параллельных плоскости xz. Принимая во внимание, что $\varkappa$ не содержит точек ветвления и разбивает поверхность,

заключаем, что $\varkappa$ *является простой кривой с концами на границе поверхности.*

Покажем теперь, что *выпуклая дуга c, определяемая описанным выше способом компонентой w множества* W^-_{xz} (или W^+_{xz}), *является прямолинейным отрезком.* Допустим, утверждение неверно. Тогда на кривой c можно указать точку M и две близкие к ней точки K и L, расположенные по разные стороны от M так, что полупрямая g_M, проведенная из точки M в плоскости α параллельно плоскости xz в направлении $x<0$, разбивается отрезком $\widetilde{KL}$. Пусть $\tilde{\gamma}$ — кривая, по которой плоскость, параллельная плоскости xz, проходящая через M, пересекает исходную поверхность.

Возьмем на кривой $\tilde{\gamma}$ со стороны $x<0$ точку $\bar{M}$, в которой $\partial z/\partial x \neq p$. Такая точка найдется в любой, сколь угодно малой полуокрестности точки M, так как в противном случае $\varkappa$ содержала бы прямолинейный отрезок, параллельный плоскости xz с концом в точке M, и эта точка была бы точкой ветвления для $\varkappa$, что исключено. Пусть для определенности в точке $\bar{M}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p_M > p.$$

Пусть p_1^* и p_2^* — два числа из Ω, близкие к p и удовлетворяющие неравенствам

$$p_M > p_1^* > p > p_2^*.$$

Определим на поверхности открытые множества G_1 и G_2, в которых $\partial z/\partial x < p_1^*$ и $\partial z/\partial x > p_2^*$ соответственно. Очевидно, $\varkappa$ принадлежит каждому из этих множеств. Обозначим G_1^* и G_2^* компоненты множеств G_1 и G_2, содержащие кривую $\varkappa$. Так как $G_1^* \cap G_2^*$ отделяет точку $\bar{M}$ от $\varkappa$, то найдется компонента $\varkappa^*$ границы $G_1^* \cap G_2^*$, отделяющая $\bar{M}$ от $\varkappa$. Очевидно, $\varkappa^*$ является компонентой границы одной из областей G_1^* или G_2^*.

При достаточной близости p_1^* и p_2^* к p компонента $\varkappa^*$ содержится в сколь угодно малой окрестности $\varkappa$. По доказанному $\varkappa^*$ — простая кривая, расположенная в некоторой плоскости α^*, касающейся поверхности во всех точках $\varkappa^*$.

Пусть G^* — та из областей G_1^* или G_2^*, на границе которой лежит $\varkappa^*$. Подвергнем поверхность уплощению относительно области G^* подобно тому, как это было сделано вначале относительно области G. Пусть $\bar{c}$ — проекция в направлении оси z отрезка KL кривой c на плоскость α^*. Проведем из произвольной точки кривой $\bar{c}$ полупрямую g в плоскости α^* параллельно плоскости xz в направлении $x<0$. Эта полупрямая при достаточной близости $\varkappa^*$ к $\varkappa$ обязательно пересечет $\varkappa^*$ в некоторой

точке A_g. В противном случае можно было бы соединить очевидным образом точку кривой c с точкой $\bar{M}$, не пересекая $\varkappa^*$.

По доказанному множество точек A_g представляет собой выпуклую кривую c^*, обращенную выпуклостью в сторону $x<0$. При p_1^* и $p_2^* \to p$ эта кривая сходится к c. Но кривая c существенно выпукла в направлении $x>0$ и, следовательно, не может быть пределом c^*. Мы пришли к противоречию. Утверждение доказано. Итак, каждая из дуг c кривой $\varkappa$ представляет собой прямолинейный отрезок, и сама кривая является простой ломаной с концами на границе поверхности.

Покажем, наконец, что $\varkappa$ представляет собой просто прямолинейный отрезок. Допустим, $\varkappa$ ломаная и Q — ее вершина. Проведем через точку Q вертикальную плоскость δ так, чтобы она разделяла сходящиеся в Q звенья ломаной и чтобы кривая γ пересечения этой плоскости с поверхностью не содержала прямолинейного отрезка с концом в точке Q. Такая плоскость, очевидно, существует. В противном случае легко указать отрезок на поверхности, содержащий точку Q со стационарной касательной плоскостью, отличный от звеньев ломаной $\varkappa$, сходящихся в Q. Этот отрезок должен принадлежать $\varkappa$. Но $\varkappa$ не содержит точек ветвления.

Сохраняя плоскость xy, возьмем в качестве плоскости xz плоскость δ. Теперь, чтобы доказать, что $\varkappa$ не имеет излома в точке Q, достаточно повторить дословно предыдущее рассуждение, в котором было показано, что выпуклые отрезки c кривой $\varkappa$ прямолинейные. Таким образом, мы приходим к выводу, что $\varkappa$ представляет собой прямолинейный отрезок с концами на границе поверхности.

Пусть Q — произвольная точка поверхности. Тогда *либо через Q проходит прямолинейный отрезок со стационарной касательной плоскостью, с концами на границе поверхности, либо точка Q имеет окрестность, являющуюся куском плоскости.*

Допустим, точка Q не имеет плоской окрестности. Тогда, каково бы ни было $\varepsilon>0$, всегда существует вертикальная плоскость δ, проходящая через точку Q, такая, что на кривой ее пересечения с поверхностью ε-окрестность точки Q не будет прямолинейным отрезком. В противном случае ε-окрестность точки Q на поверхности была бы плоской. Примем плоскость δ за плоскость xz. Пусть $\partial z/\partial x$ в Q равно p_Q. Тогда на расстоянии, не большем ε, от Q найдется точка A, в которой $\partial z/\partial x = p_A \neq p_Q$.

Возьмем любое p в Ω из интервала (p_A, p_Q). Множество E_p отделяет A от Q. Пусть G_A — та из областей на поверхности, определяемая множеством E_p, которой принадлежит A. Точка Q отделена от A некоторой компонентой $\varkappa$ границы G_A. По доказанному $\varkappa$ — прямолинейный отрезок с концами на границе

поверхности и стационарной касательной плоскостью. Отделяя A от Q, отрезок $\varkappa$ проходит от Q на расстоянии, не большем ε. Так как ε произвольно мало, то отсюда следует, что через Q проходит прямолинейный отрезок со стационарной касательной плоскостью и с концами на границе поверхности.

Покажем, что *прямолинейный отрезок, проходящий через точку Q, в случае, когда она не имеет плоской окрестности, единственный.*

То, что найденный прямолинейный отрезок является единственным, следует из более общего предложения, которое нам также понадобится. Именно, пусть P и Q — две точки поверхности, из коих хотя бы одна, например Q, не имеет плоской окрестности; пусть g_P и g_Q — прямолинейные отрезки со стационарной касательной плоскостью, проходящие через точки P и Q соответственно. Тогда, если отрезки g_P и g_Q имеют хотя бы одну общую точку, то они совпадают.

Допустим, отрезки g_P и g_Q различны. Так как точка Q не имеет плоской окрестности, то существует сколь угодно близкая к ней точка A, которая тоже не имеет плоской окрестности и не лежит в касательной плоскости точки Q. По доказанному через точку A проходит прямолинейный отрезок g_A. При достаточной близости A к Q отрезок g_A пересекает либо g_P, либо g_Q, а следовательно, лежит в касательной плоскости прямых g_P и g_Q, что невозможно по выбору точки A.

Докажем теперь, что *поверхность нулевой кривизны локально изометрична плоскости, т. е. каждая точка поверхности имеет окрестность, изометричную куску плоскости.*

Пусть O — произвольная точка поверхности. Если точка O имеет плоскую окрестность, утверждение очевидно. Допустим, O не имеет плоской окрестности. Тогда по доказанному через O проходит и притом единственная прямолинейная образующая g_O. Не ограничивая общности, будем считать, что точка O является началом координат, касательная плоскость поверхности в этой точке совпадает с плоскостью xy и прямолинейная образующая направлена по оси x.

Пусть γ — кривая, по которой плоскость $x=0$ пересекает поверхность. Обозначим F множество точек кривой γ, близких к O ($|y| \leqslant \varepsilon$), каждая из которых не имеет плоской окрестности. Через каждую точку Q множества F проходит и притом единственная прямолинейная образующая g_Q.

Из единственности образующей g_Q следует, что она непрерывно зависит от Q на F. Так как различные прямые g_Q не пересекаются, то направление g_Q для Q, близких к O, мало отличаются от g_O.

Множество G на кривой γ, дополнительное к F, является открытым. Оно состоит из *прямолинейных* отрезков. Пусть $\boldsymbol{\delta}$ —

один из таких отрезков. Его концы Q_1 и Q_2 принадлежат F. Утверждается, что *поверхность между прямыми* g_{Q_1} и g_{Q_2} *представляет собой кусок плоскости*, если все рассмотрения относятся к достаточно малой окрестности кривой γ.

Действительно, вдоль отрезка δ и образующих g_{Q_1} и g_{Q_2} касательная плоскость стационарна. Следовательно, отрезок δ и образующие g_{Q_1} и g_{Q_2} лежат в одной плоскости. Обозначим ее α. Если утверждение неверно, то между прямыми g_{Q_1} и g_{Q_2} найдется точка A, не имеющая плоской окрестности и не принадлежащая плоскости α. Через точку A проходит прямолинейная образующая g_A. Она пересекает либо δ, либо g_{Q_1}, либо g_{Q_2}, а следовательно, лежит в плоскости α, что невозможно по выбору точки A. Итак, поверхность между образующими g_{Q_1} и g_{Q_2} представляет собой кусок плоскости.

До сих пор прямолинейные образующие g_Q определены только для точек Q множества F. Теперь мы можем определить прямолинейные образующие g_Q для точек Q из G, соблюдая два условия, именно:

1) чтобы g_Q непрерывно зависела от Q,

2) чтобы прямолинейные образующие, соответствующие различным точкам Q, не пересекались.

Пусть γ_1 и γ_2 — кривые, по которым плоскости $x=\varepsilon_1$ и $x=-\varepsilon_1$ пересекают поверхность (ε_1 мало). Прямолинейные образующие, проходящие через концы кривой γ и кривые γ_1 и γ_2, выделяют окрестность D точки O на поверхности. Утверждается, что эта окрестность изометрична куску плоскости.

Возьмем на кривой γ достаточно густо точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Пусть B_i и C_i — точки пересечения образующей g_{A_i} с кривыми γ_1 и γ_2. Рассмотрим многогранник P, составленный из треугольников $B_1C_1C_2$, $B_1B_2C_2$. $B_2C_2C_3$, ... Когда густота точек A_i на кривой γ увеличивается, многогранник P сходится к области D поверхности, причем грани многогранника сходятся к касательным плоскостям поверхности. Отсюда следует, что внутренняя метрика многогранника сходится к метрике поверхности. Но многогранник P очевидным образом разворачивается на плоскость. Поэтому окрестность D изометрична области на плоскости. Утверждение доказано. Вместе с ним полностью доказана теорема 1.

Теорема 2. *Полная поверхность с нулевой кривизной цилиндрическая.*

Доказательство. Очевидно, достаточно показать, что любые две прямолинейные образующие поверхности, проходящие через точки, не имеющие плоских окрестностей, параллельны.

Пусть g_1 и g_2 — две такие прямолинейные образующие. Так как поверхность полная, то g_1 и g_2 неограниченно продолжаемы, т. е. полные прямые. Они не могут пересекаться, так как проходят через точки, не имеющие плоских окрестностей. Таким образом, чтобы доказать параллельность прямых g_1 и g_2, достаточно показать, что они не могут быть расходящимися.

Соединим какие-нибудь две точки прямых g_1 и g_2 простой кривой γ на поверхности. Будем теперь постепенно разворачивать поверхность. В процессе разворачивания поверхности плоскость окажется покрытой один раз. Прямые g_1 и g_2, как геодезические на поверхности, перейдут в некоторые прямые $\bar{g}_1$ и $\bar{g}_2$ на плоскости. Так как прямые g_1 и g_2 на поверхности не пересекаются, то прямые $\bar{g}_1$ и $\bar{g}_2$ также не пересекаются, а следовательно, параллельны.

Пусть две точки $\bar{P}_1$ и $\bar{P}_2$ на прямых $\bar{g}_1$ и $\bar{g}_2$ неограниченно удаляются от некоторого начального положения, но так, что расстояние между ними остается ограниченным. Это возможно, так как прямые $\bar{g}_1$ и $\bar{g}_2$ параллельны. Точки P_1 и P_2 на прямых g_1 и g_2, соответствующие $\bar{P}_1$ и $\bar{P}_2$, также неограниченно удаляются. Расстояние между точками P_1 и P_2 в пространстве, а тем более на поверхности неограниченно растет, так как, по предположению, прямые g_1 и g_2 расходящиеся. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

§ 5. Поверхности с неотрицательной внешней кривизной

Поверхность Ф ограниченной внешней кривизны мы будем называть поверхностью *с неотрицательной кривизной*, если отрицательная кривизна ее равна нулю.

На поверхности с неотрицательной кривизной каждая регулярная точка является эллиптической, ибо, как установлено в § 1, наличие на поверхности хотя бы одной регулярной точки с индексом, меньшим единицы, влечет за собой неравенство нулю отрицательной кривизны поверхности.

Для того чтобы поверхность была поверхностью с неотрицательной кривизной, необходимо, чтобы полная кривизна на любом множестве точек поверхности была неотрицательна, и достаточно, чтобы она была неотрицательна на всех открытых множествах.

В настоящем параграфе мы имеем в виду выяснить внешнее строение поверхностей неотрицательной кривизны. При этом мы будем предполагать, что положительная кривизна отлична от нуля. Случай, когда она равна нулю, уже рассмотрен в предыдущем параграфе.

Лемма 1. *Пусть X — эллиптическая точка поверхности с неотрицательной кривизной и $\overline{X}$ — ее сферическое изображение. Тогда точки X и $\overline{X}$ имеют такие окрестности G и $\overline{G}$ соответственно, что почти все точки $\overline{G}$ имеют в G по одному прообразу.*

Доказательство. Пусть G — гомеоморфная кругу окрестность точки X, ограниченная простой кривой γ, не содержащая точек с нормалями, параллельными нормали в точке X, кроме самой X. Пусть $\overline{G}$ — та из компонент разбиения единичной сферы образом $\overline{\gamma}$ кривой γ, которой принадлежит $\overline{X}$. Утверждается, что окрестности G и $\overline{G}$ точек X и $\overline{X}$ соответственно обладают свойствами, указанными в лемме.

Действительно, почти все точки $\overline{G}$ имеют регулярные прообразы в G, т. е. эллиптические точки, и притом в конечном числе. Пусть $\overline{Y}$ — одна из таких точек. Степень точки $\overline{Y}$ относительно $\overline{\gamma}$ равна степени точки $\overline{X}$, т. е. $+1$. А так как степень точки $\overline{Y}$ равна сумме индексов ее прообразов, каждый из которых равен $+1$, то число прообразов равно одному. Лемма доказана.

Лемма 2. *Поверхность с неотрицательной кривизной выпукла в окрестности каждой эллиптической точки, т. е. каждая такая точка имеет окрестность, являющуюся выпуклой поверхностью.*

Доказательство. Пусть X — эллиптическая точка поверхности и α — касательная плоскость в X. Некоторая окрестность G точки X на поверхности расположена по одну сторону от плоскости α, причем X является единственной точкой из этой окрестности, которая лежит в плоскости α.

Проведем плоскость β, близкую к α и пересекающую G. Так как вблизи точки X нет точек с нормалями, параллельными нормали в точке X, то β пересекает G по простой замкнутой кривой γ^*, ограничивающей гомеоморфную кругу область G^*, содержащую X и расположенную между плоскостями α и β. Построим выпуклую оболочку области G^* и обозначим $\overline{G}^*$ ту ее часть, которая расположена вне плоскости β. Утверждается, что все достаточно близкие к X эллиптические точки G принадлежат $\overline{G}^*$.

Действительно, пусть Y — близкая к X эллиптическая точка, не принадлежащая $\overline{G}^*$. Ее малая окрестность U также не принадлежит $\overline{G}^*$. Сферическое изображение U имеет положительную площадь. Оно покрывается сферическим изображением той части G^*, которая принадлежит $\overline{G}^*$, если Y достаточно близка к X. Таким образом, вблизи точки $\overline{X}$ — сферического изображения точки X — существует множество положительной площади, каждая точка которого имеет по крайней мере два прообраза. А это противоречит лемме 1.

Итак, все близкие к X эллиптические точки лежат на $\overline{G}^*$. Отсюда следует, что плоскость β можно взять так близко к плоскости α, что все эллиптические точки G^* будут на $\overline{G}^*$. Пусть плоскость β проходит именно таким образом. Тогда утверждается, что $G^*=\overline{G}^*$.

Часть поверхности G^*, не принадлежащая $\overline{G}^*$, состоит из развертывающихся поверхностей (она не содержит регулярных точек). Пусть g — какая-нибудь ее прямолинейная образующая. Один из концов g принадлежит $\overline{G}^*$. В этой точке g касается $\overline{G}^*$, а следовательно, g принадлежит $\overline{G}^*$ в силу выпуклости $\overline{G}^*$. Мы пришли к противоречию. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть Φ — поверхность с неотрицательной кривизной и α — плоскость, пересекающая поверхность. Тогда каждая из частей, на которые плоскость разбивает поверхность Φ, с краем, лежащим в этой плоскости, есть выпуклая поверхность, т. е. является областью на границе выпуклого тела.*

Доказательство. Пусть Φ' — один из таких кусков, определяемых плоскостью α. Требуется доказать, что Φ' — выпуклая поверхность. Не ограничивая общности, можно считать, что число точек поверхности Φ, имеющих касательные плоскости, параллельные α, конечно, причем все эти точки эллиптические. Действительно, существует сколь угодно близкая к α плоскость α', обладающая этим свойством. А если теорема будет доказана для случая плоскости α', то предельным переходом она устанавливается и для α.

Покажем, что *пересечение поверхности Φ' с любой плоскостью β, параллельной α, представляет собой простую замкнутую кривую.* Пусть β_0 — плоскость, параллельная α, касающаяся поверхности Φ' и такая, что вся поверхность Φ' расположена между α и β^0. Эта плоскость, вообще говоря, может касаться поверхности Φ' в нескольких точках (эллиптических, так как нерегулярные точки исключены по предположению). Обозначим эти точки $A_1, A_2, \ldots, A_r$.

Будем параллельно смещать плоскость β из положения β_0 в α. Так как поверхность Φ' выпуклая в окрестности каждой точки A_i, то для плоскостей β, близких к β_0, пересечение β с Φ' (обозначим его χ_β) состоит из r простых кривых: $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_r$. Такое строение пересечения β с Φ' сохранится до тех пор, пока плоскость β не станет снова касательной к Φ' в новой точке (или точках).

Какие изменения в этот момент могут происходить с χ_β? Выродиться в точку какая-либо из его компонент не может, так как она к этому моменту описала бы замкнутую поверхность, которая, таким образом, не была бы связана с оставшейся частью поверхности Φ'. Не может произойти и соприкосновения двух компонент $\varkappa_i, \varkappa_j$ без вырождения каждой из них

в точку, ибо тогда точка соприкосновения $\varkappa_i$ и $\varkappa_j$ была бы точкой касания поверхности Φ' с плоскостью β, а такая точка, как эллиптическая, является изолированной в χ_β. Остается предположить, что в рассматриваемый момент χ_β пополняется конечным числом новых точек. Таким образом, при прохождении плоскости β через положение касания с поверхностью Φ' число компонент увеличивается.

К моменту, когда плоскость β совпадает с α, каждая из компонент $\varkappa_s$ опишет поверхность Φ_s. Никакие две из этих поверхностей не имеют общих точек, принадлежащих поверхности Φ'. Но поверхность Φ' связна, поэтому Φ_s может быть только одна. А следовательно, χ_β для каждого β между β_0 и α состоит только из одной компоненты, которая представляет собой простую замкнутую кривую.

Покажем теперь, что *кривая χ_β, по которой пересекается поверхность Φ' с плоскостью β, является выпуклой кривой.* Допустим, χ_β не выпуклая кривая. Тогда в плоскости β можно провести прямую g, которая разобьет χ_β не менее чем на три части. Пусть χ'_β и χ''_β — две части кривой, расположенные по одну сторону от g.

Обозначим Φ_β ту часть поверхности Φ', которая отрезается от нее плоскостью β и расположена со стороны плоскости β_0. Проведем через прямую g полуплоскость δ в то из полупространств, определяемых плоскостью β, где расположена поверхность Φ_β. Если полуплоскость δ сильно наклонена в сторону кривых χ'_β и χ''_β, то она заведомо разбивает поверхность Φ_β так, что кривые χ'_β и χ''_β принадлежат различным компонентам Φ'_δ и Φ''_δ этого разбиения.

Будем непрерывно поворачивать около оси g полуплоскость δ, увеличивая Φ'_δ и Φ''_δ. Очевидно, наступит момент, когда Φ'_δ и Φ''_δ сольются, образуя одну компоненту. Пусть это происходит в положении δ^* полуплоскости δ. Построим полуплоскость $\bar\delta$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) полуплоскость $\bar\delta$ близка к δ^*, причем ее граничная прямая лежит в плоскости β;

2) компоненты разбиения поверхности Φ_β, содержащие кривые χ'_β и χ''_β, различны;

3) существует только конечное число точек на поверхности Φ_β, в которых касательные плоскости параллельны $\bar\delta$, причем все эти точки эллиптические.

Если плоскость $\bar\delta$ сдвигать параллельно, увеличивая компоненты $\Phi'_{\bar\delta}$ и $\Phi''_{\bar\delta}$, то они ввиду близости $\bar\delta$ к δ^* скоро сольются. Это слияние не может начаться у плоскости β по выбору пря-

мой g. Вместе с тем оно не может начаться и во внутренней точке поверхности по причине, которая изложена в предыдущем рассмотрении. Мы пришли к противоречию. Утверждение доказано. Итак, кривая χ_β выпуклая. Следовательно, граница Φ', лежащая в плоскости α, является выпуклой кривой.

Дополним поверхность Φ' выпуклым куском плоскости α, который ограннчен краем поверхности Φ'. Утверждается, что *полученная таким образом замкнутая поверхность* $\overline{\Phi}'$ *является выпуклой поверхностью.* Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что почти все плоскости, пересекающие $\overline{\Phi}'$, пересекают ее по замкнутым выпуклым кривым.

Пусть π — плоскость, обладающая следующим свойством: среди касательных плоскостей Φ' есть только конечное число параллельных π, причем все точки касания — эллнптические точки. Очевидно, почти все плоскости обладают указанным свойством. Утверждается, что плоскость π пересекает поверхность $\overline{\Phi}'$ по замкнутой выпуклой кривой.

Доказательство этого утверждения состоит из двух частей. В первой частн устанавливается, что пересечение плоскостн π с поверхностью $\overline{\Phi}'$ состоит из одной замкнутой кривой c_π. Это делается дословно так же, как доказательство того, что множество χ_β пересечения поверхности Φ' с плоскостью β, параллельной α, состоит из простой замкнутой кривой. Во второй части доказывается, что кривая c_π выпуклая. Эта часть дословно повторяет доказательство выпуклости кривой χ_β. Мы не будем делать этих повторений. Теорема доказана.

Теорема 2. *Полная поверхность Φ с неотрицательной и не равной нулю кривизной есть либо замкнутая выпуклая поверхность, либо бесконечная выпуклая поверхность.*

Доказательство. Так как положительная крнвнзна поверхностн Φ отлична от нуля, то в сферическом изображении поверхности есть точка, все прообразы которой — эллиптические точки, и число прообразов конечно. Пусть A — один из прообразов. Будем касательную плоскость α в точке A непрерывно сдвнгать и следнть за той компонентой Φ_α разбиения поверхности плоскостью α, которой принадлежит A. По теореме 1 Φ_α все время является выпуклой поверхностью. На ее границе γ_α не могут появляться точки с касательной плоскостью, параллельной α, кроме как в случае вырождения границы γ_α в точку.

Если в некоторый момент γ_α вырождается в точку, то замкнутая выпуклая поверхность, описанная кривой γ_α к этому

моменту, и есть вся поверхность Ф. В противном случае это противоречило бы связности Ф.

Если же кривая γ_α не вырождается, то она описывает бесконечную выпуклую поверхность, которая, как и в предыдущем случае, должна совпадать со всей поверхностью Ф. Теорема доказана.

§ 6. Нитяная поверхность

В § 7 будет доказана теорема о приближении произвольной поверхности ограниченной внешней кривизны регулярными поверхностями, внешние кривизны которых сходятся к внешним кривизнам данной. В настоящем параграфе мы рассмотрим некоторую специальную («нитяную») поверхность, которая после надлежащего сглаживания и дает указанное приближение.

Пусть в полосе $a \leqslant x \leqslant b$ плоскости xy даны две спрямляемые кривые γ и $\bar{\gamma}$, однозначно проектирующиеся на ось x и, следовательно, допускающие задание уравнениями

$$y = \varphi(x), \qquad y = \bar{\varphi}(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b.$$

Пусть кривая γ расположена над кривой $\bar{\gamma}$, т. е. для всех x из указанного сегмента

$$\bar{\varphi}(x) \leqslant \varphi(x).$$

Пусть, наконец, A и B — две точки, расположенные на прямых $x=a$, $x=b$ между кривыми γ и $\bar{\gamma}$. Обозначим $\underline{G}$ замкнутую область в плоскости xy, ограниченную кривыми γ, $\bar{\gamma}$ и прямыми $x=a$, $x=b$.

Лемма 1. *Среди всех кривых, соединяющих точки A и B в замкнутой области G, существует кратчайшая; обозначим ее $\tilde{\gamma}$. Эта кратчайшая единственная, однозначно проектируется на ось x, а следовательно, допускает задание уравнением*

$$y = \tilde{\varphi}(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b.$$

Доказательство. Существование кратчайшей вытекает из компактности множества кривых ограниченной длины, соединяющих две данные точки в замкнутой области, и свойства полунепрерывности длины кривой, которое состоит в том, что если кривые γ_n сходятся к кривой γ_0, а их длины сходятся к l, то длина кривой γ_0 не превосходит l.

Покажем, что кривая $\tilde{\gamma}$ проектируется на ось x однозначно. Во-первых, заметим, что кривая $\tilde{\gamma}$ не имеет самопересечений,

так как в противном случае возможно очевидное уменьшение ее длины.

Пусть g — произвольная прямая, параллельная оси y, проведенная между прямыми $x=a$ и $x=b$. Обозначим P_1 первую, а P_2 — последнюю точку кривой $\tilde{\gamma}$, лежащие на прямой g при следовании вдоль кривой из A в B. Доказать однозначную проектируемость кривой $\tilde{\gamma}$ на ось x это значит доказать, что для каждой прямой g точка $P_1 \equiv P_2$.

Допустим, для некоторой прямой g точки P_1 и P_2 различны. Тогда, очевидно, отрезок $\tilde{\gamma}$ между точками P_1, P_2 должен быть прямолинейным отрезком, соединяющим эти точки.

Пусть Q_1 — средина отрезка P_1P_2. Возьмем точку P на кривой $\tilde{\gamma}$, близкую к точке P_1 и не принадлежащую отрезку P_1P_2. Пусть Q — четвертая вершина параллелограмма, тремя вершинами которого являются P, P_1, Q_1. Тогда при достаточной близости P к P_1 прямолинейные отрезки PQ и Q_1Q лежат в G. Отсюда следует, что отрезок PP_1 кривой $\tilde{\gamma}$ должен быть прямолинейным отрезком, так как в противном случае отрезок PQ_1 кривой можно сократить, заменяя его ломаной PQQ_1. Но тогда прямолинейный отрезок PQ_1 лежит в G и, следовательно, возможно сокращение кривой $\tilde{\gamma}$ заменой ее отрезка PQ_1 прямолинейным отрезком. Мы пришли к противоречию. Утверждение доказано. Итак, кривая $\tilde{\gamma}$ проектируется однозначно на ось x.

Докажем единственность кривой $\tilde{\gamma}$. Допустим, существуют две кривые $\tilde{\gamma}$: $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$. Обе кривые, естественно, имеют одну и ту же длину l. Возьмем в качестве параметра на кривых $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$ сумму их дуг, отсчитываемых от точки A. При этом кривые будут заданы уравнениями

$$\tilde{\gamma}_1: \quad x = x_1(s), \quad y = y_1(s) \qquad (0 \leqslant s \leqslant 2l),$$
$$\tilde{\gamma}_2: \quad x = x_2(s), \quad y = y_2(s) \qquad (0 \leqslant s \leqslant 2l),$$

где функции $x_1(s)$, $x_2(s)$, $y_1(s)$, $y_2(s)$ удовлетворяют условию Липшица и по выбору параметра $x_1(s) = x_2(s)$.

Рассмотрим кривую $\tilde{\gamma}$, задаваемую уравнениями

$$x = \frac{1}{2}(x_1(s) + x_2(s)), \quad y = \frac{1}{2}(y_1(s) + y_2(s)).$$

Эта кривая, очевидно, проходит в G и спрямляема, так как функции $x_1(s) + x_2(s)$, $y_1(s) + y_2(s)$ удовлетворяют условию

Липшица, следовательно, они ограниченной вариации. Покажем, что ее длина $\bar{l}$ не больше l — длины кривых $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$. Имеем

$$\int_0^{2l} \sqrt{x_1'^2 + y_1'^2}\, ds = l, \quad \int_0^{2l} \sqrt{x_2'^2 + y_2'^2}\, ds = l,$$

$$\int_0^{2l} \left\{ \left(\frac{x_1' + x_2'}{2} \right)^2 + \left(\frac{y_1' + y_2'}{2} \right)^2 \right\}^{1/2} ds = \bar{l},$$

$$\int_a^b \left\{ \frac{\sqrt{x_1'^2 + y_1'^2} + \sqrt{x_2'^2 + y_2'^2}}{2} - \left[\left(\frac{x_1' + x_2'}{2} \right)^2 + \left(\frac{y_1' + y_2'}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} ds = l - \bar{l}.$$

Так как функция $\sqrt{u^2 + v^2}$ является выпуклой, то подынтегральное выражение в последней формуле неотрицательно. Поэтому $l \geqslant \bar{l}$. Но по условию минимальности кривых $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$ имеем $\bar{l} \geqslant l$. Отсюда следует $l = \bar{l}$. И так как интеграл от неотрицательной функции равен нулю, то подынтегральная функция должна быть равна нулю почти всюду. А равенство нулю подынтегральной функции возможно только при $x_1' = x_2'$, $y_1' = y_2'$.

Так как функции $x_1(s)$, $x_2(s)$, $y_1(s)$, $y_2(s)$ удовлетворяют условию Липшица и соответственно равны при $s=0$, то из равенства производных заключаем равенство функций. Итак, кривые $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$ совпадают. Мы пришли к противоречию. Лемма доказана полностью.

Лемма 2. *Кривая $\tilde{\gamma}$, существование которой устанавливается леммой 1, непрерывно зависит от ограничивающих область G кривых γ, $\bar{\gamma}$ и положения точек A, B на прямых $x=a$, $x=b$.*

Доказательство. Утверждение леммы в сущности сводится к следующему. Если даны последовательности кривых γ_n, $\bar{\gamma}_n$, сходящихся к кривым γ, $\bar{\gamma}$ соответственно, и последовательность пар точек A_n, B_n, сходящихся к A и B, то указанным образом построенные кривые сходятся к кривой $\tilde{\gamma}$.

Если утверждение неверно, то существует подпоследовательность кривых $\tilde{\gamma}_n$, не сходящаяся к $\tilde{\gamma}$. Не ограничивая общности, можно считать, что она сходится к некоторой кривой $\tilde{\gamma}_0$. Кривая $\tilde{\gamma}_0$, очевидно, будет кратчайшей среди всех кривых в G, соединяющих точки A и B. А тогда по лемме 1 она должна совпадать с $\tilde{\gamma}$. Мы пришли к противоречию. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть каждая из кривых γ и $\bar{\gamma}$ состоит из конечного числа дуг алгебраических кривых, причем углы между полукасательными в каждой точке, разделяющей смежные дуги*

со стороны области G, не больше π. Тогда кривая $\tilde{\gamma}$ гладкая. Ее часть, расположенная существенно между кривыми γ и $\bar{\gamma}$, состоит из конечного числа прямолинейных отрезков, а оставшаяся часть состоит из выпуклых дуг алгебраических кривых, которые выпуклостью обращены в сторону G.

Доказательство. Покажем, во-первых, что если в точке P, разделяющей две смежные дуги кривой γ (или $\bar{\gamma}$), угол между полукасательными со стороны G меньше π, то эта точка не может принадлежать $\tilde{\gamma}$. Заметим, что по условию леммы такая точка не может быть общей для кривых γ и $\tilde{\gamma}$.

Проведем полупрямую g из точки P внутрь области G. Возьмем на γ две точки — M и N, близкие к P и расположенные по разные стороны от нее. При достаточной близости точек M и N к P отрезок MN пересекается с полупрямой g в некоторой точке Q — внутренней точке области G. Не ограничивая общности, можно считать, что на отрезке MN нет других точек кривой γ, кроме точек M и N. Кривая $\tilde{\gamma}$, чтобы достигнуть P, должна пересекать отрезок MN. Пусть M_1 и N_1 — первая и последняя точки пересечения кривой $\tilde{\gamma}$ с отрезком MN. Тогда, заменяя отрезок M_1N_1 кривой $\tilde{\gamma}$ прямолинейным отрезком M_1N_1, получим кривую, также расположенную в G, но меньшей длины, а это невозможно.

Покажем теперь, что часть кривой $\tilde{\gamma}$, расположенная внутри области G, состоит из конечного числа прямолинейных отрезков.

Пусть h — связная компонента множества тех точек кривой $\tilde{\gamma}$, которые являются внутренними точками G. Пусть P — произвольная точка h. Возьмем по разные стороны от нее точки M и N. Так как P — внутренняя точка G, то при достаточной близости M и N к P прямолинейный отрезок MN находится в G. Отсюда следует, что этот отрезок принадлежит h. И так как это имеет место для любой точки P, то h — прямолинейный отрезок, причем концы его принадлежат границе области G, т. е. кривым γ, $\bar{\gamma}$ или точкам A, B.

Пусть P — конец отрезка h — является точкой кривой γ (или $\bar{\gamma}$). По доказанному P является гладкой точкой кривой γ. Покажем, что отрезок h лежит на касательной кривой γ в точке P. Допустим, утверждение неверно. Тогда, очевидно, точка P не может принадлежать $\bar{\gamma}$. Проведем из точки P вертикальную полупрямую g_P внутрь области G, а через второй конец отрезка h — вертикальную прямую g и обозначим Q точку пересечения g с γ. Возьмем точку M на отрезке h, не совпадающую ни с одним из его концов. Пусть N — первая точка пересечения с кривой γ, которую мы встречаем, следуя из M в Q по прямой

Заменим кривую γ на отрезке PN ломаной PMN. При этом область G, ограниченная новой кривой γ и прежней кривой $\bar{\gamma}$, содержится в старой области G. Поэтому свойство кривой $\bar{\gamma}$ быть кратчайшей сохраняется, а вместе с тем в новой области G кривая $\bar{\gamma}$ не может проходить через P, как показано выше. Итак, отрезок h касается кривой γ в точке P.

Так как конечное число алгебраических кривых могут иметь только конечное число общих касательных с различными точками касания, то число прямолинейных отрезков h кривой $\bar{\gamma}$ конечно. И оставшаяся часть кривой $\bar{\gamma}$ составлена, таким образом, из конечного числа дуг алгебраических кривых, принадлежащих γ и $\bar{\gamma}$. Пусть c — одна из таких дуг.

Дугу c можно разбить на конечное число выпуклых дуг c_k, для каждой из которых выполняется одно из следующих условий:

1) c_k принадлежит γ, но не принадлежит $\bar{\gamma}$;

2) c_k принадлежит $\bar{\gamma}$, но не принадлежит γ;

3) c_k принадлежит и γ и $\bar{\gamma}$.

Покажем, что в каждом из этих случаев дуга c_k обращена выпуклостью в сторону G (прямолинейный отрезок считается выпуклым в обе стороны). Действительно, в первом и втором случаях, если c_k обращена наружу G, кривая $\bar{\gamma}$ допускает очевидное уменьшение длины. В третьем случае условие выпуклости в сторону G всегда выполнено, надо только относить c_k к соответствующей кривой γ или $\bar{\gamma}$. Лемма доказана.

Пусть даны две конечные системы алгебраических поверхностей $\{F_k\}$ и $\{\bar{F}_k\}$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) каждая из поверхностей F_k и $\bar{F}_k$ однозначно проектируется на плоскость xy;

2) проекция всех поверхностей системы $\{F_k\}$, а также проекция всех поверхностей системы $\{\bar{F}_k\}$ покрывает прямоугольник

$$a \leqslant x \leqslant b, \qquad c \leqslant y \leqslant d;$$

3) если P — точка границы какой-нибудь поверхности $F_i(\bar{F}_i)$, проектирующаяся на прямоугольник, то всегда найдется внутренняя точка Q на некоторой поверхности $F_j(\bar{F}_j)$, которая имеет ту же проекцию на плоскость xy, что и P, и расположена ниже (соответственно выше) точки P;

4) точки пересечения любой прямой, параллельной оси z, с поверхностями F_k расположены не ниже точек пересечения ее с поверхностями $\bar{F}_k$.

Пусть

$$z = f_k(x, y), \qquad z = \bar{f}_k(x, y)$$

— уравнения поверхностей F_k и $\bar{F}_k$ соответственно. Определим две функции $\varphi(x, y)$ и $\bar{\varphi}(x, y)$ в прямоугольнике $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ условиями

$$\varphi(x, y) = \min_k f_k(x, y), \quad \bar{\varphi}(x, y) = \max_k \bar{f}_k(x, y).$$

Очевидно, эти функции непрерывны и кусочно-алгебраические.

Обозначим Φ и $\bar{\Phi}$ кусочно-алгебраические поверхности, заданные уравнениями

$$\begin{aligned} z &= \varphi(x, y), \\ z &= \bar{\varphi}(x, y) \end{aligned} \qquad (a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d).$$

Относительно этих поверхностей существенно заметить следующее. Во-первых, поверхность Φ расположена над поверхностью $\bar{\Phi}$. Во-вторых, любая плоскость $y = \eta$ $(c \leqslant \eta \leqslant d)$ пересекает поверхности Φ и $\bar{\Phi}$ по кривым γ_η и $\bar{\gamma}_\eta$, которые составлены из конечного числа алгебраических дуг, причем в точках, принадлежащих двум смежным дугам кривой γ_η, угол, образованный полукасательными, обращен вершиной в сторону $z > 0$, а у кривой $\bar{\gamma}_\eta$ — в сторону $z < 0$.

Пусть в плоскостях $x = a$ и $x = b$ даны две алгебраические кривые — γ_1 и γ_2, расположенные между поверхностями Φ и $\bar{\Phi}$ и однозначно проектирующиеся на ось y. Обозначим A_η и B_η точки пересечения кривых γ_1 и γ_2 с плоскостью $y = \eta$. Соединим точки A_η и B_η в плоскости $y = \eta$ кратчайшей $\tilde{\gamma}_\eta$, расположенной между кривыми γ_η и $\bar{\gamma}_\eta$.

Лемма 4. *При изменении η от c к d кривая $\tilde{\gamma}_\eta$ описывает кусочно-аналитическую поверхность $\tilde{\Phi}$ (нитяную поверхность), однозначно проектирующуюся на прямоугольник $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$.*

Та часть поверхности $\tilde{\Phi}$, которая расположена существенно между поверхностями Φ и $\bar{\Phi}$, состоит из линейчатых аналитических поверхностей, а остальная часть — из кусков аналитических поверхностей F_k и $\bar{F}_k$.

Нарушение гладкости поверхности $\tilde{\Phi}$ происходит только на конечном числе кривых $\tilde{\gamma}_\eta$, причем, если точка P нарушения гладкости принадлежит $\Phi(\bar{\Phi})$, то двугранный угол, образуемый касательными полуплоскостями $\Phi(\bar{\Phi})$ в этой точке со стороны области, ограничиваемой поверхностями $\bar{\Phi}$ и Φ, меньше π.

Доказательство. То, что кривая $\tilde{\gamma}_\eta$ описывает поверхность, однозначно проектирующуюся на прямоугольник, следует

из того, что кривая $\tilde{\gamma}_\eta$ проектируется однозначно на прямую $y=\eta$ плоскости xy и непрерывно зависит от кривых γ_η, $\overline{\gamma}_\eta$ и точек A_η, B_η.

То, что часть поверхности $\tilde{\Phi}$, расположенная существенно внутри области, ограниченной поверхностями Φ и $\overline{\Phi}$, состоит из аналитических линейчатых поверхностей, следует из того, что эта часть описывается прямолинейными отрезками кривой $\tilde{\gamma}_\eta$, которые на концах касаются алгебраических поверхностей или опираются на аналитические кривые (γ_1, γ_2). Число линейчатых поверхностей конечно потому, что число алгебраических поверхностей F_k и $\overline{F}_k$ конечно.

Нарушение гладкости $\tilde{\Phi}$ на конечном числе кривых $\tilde{\gamma}_\eta$ объясняется также тем, что Φ и $\overline{\Phi}$ составлены из конечного числа алгебраических поверхностей.

Пусть точка P нарушения гладкости $\tilde{\Phi}$ принадлежит Φ. Обозначим $\vartheta(P)$ угол, образуемый касательными полуплоскостями поверхности $\tilde{\Phi}$ в этой точке со стороны области, ограничиваемой поверхностями Φ и $\overline{\Phi}$. Покажем, что $\vartheta(P)\leqslant\pi$.

Действительно, точка P принадлежит одной из поверхностей F_k и является гладкой точкой этой поверхности. Поверхность Φ в окрестности P расположена под F_k, тем более под поверхностью F_k расположена поверхность $\tilde{\Phi}$, и, следовательно, угол $\vartheta(P)$ никак не может быть больше π со стороны указанной области. Случай, когда точка P принадлежит $\overline{\Phi}$, рассматривается аналогично. Лемма доказана.

Пусть Φ — кусочно-аналитическая поверхность, однозначно проектирующаяся на прямоугольник

$$a\leqslant x\leqslant b,\quad c\leqslant y\leqslant d \qquad (c<0<d).$$

Пусть

$$z=\varphi(x, y)$$

— уравнение этой поверхности, где $\varphi(x, y)$ — кусочно-аналитическая функция в указанном прямоугольнике, удовлетворяющая условиям:

1) производная $\partial\varphi/\partial x$ непрерывна во всем прямоугольнике $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant y\leqslant d$;

2) производная $\partial\varphi/\partial y$ терпит разрыв только на оси x, причем скачок производной при переходе через ось x меньше ε;

3) в каждой точке оси x, где существует $\partial^2\varphi/\partial x^2$,

$$\partial^2\varphi/\partial x^2\,\Delta(\partial\varphi/\partial y)\leqslant 0,$$

где $\Delta(\partial\varphi/\partial y)$ — изменение производной $\partial\varphi/\partial y$ при переходе в данной точке оси x от $y<0$ к $y>0$.

Лемма 5. *Поверхность* Φ:

$$z=\varphi(x, y) \qquad (a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d),$$

удовлетворяющая перечисленным выше условиям, допускает приближение аналитической поверхностью Φ^*:

$$z=\varphi^*(x, y) \qquad (a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d),$$

обладающее следующими свойствами:

1) $|\varphi(x,y)-\varphi^*(x,y)|<\varepsilon_1$ *для всех точек* (x, y) *прямоугольника*;

2) *для всех точек прямоугольника, где существуют производные* $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$,

$$|\partial\varphi/\partial x-\partial\varphi^*/\partial x|<\varepsilon_2, \quad |\partial\varphi/\partial y-\partial\varphi^*/\partial y|<\varepsilon_2;$$

3) *положительная кривизна поверхности* Φ *в области регулярности отличается от положительной кривизны поверхности* Φ^* *меньше чем на* ε_3.

Величины ε_1 *и* ε_3 *можно считать сколь угодно малыми, а* ε_2 *мало вместе с* ε, *характеризующим степень нарушения гладкости поверхности* Φ.

Доказательство. Во-первых, заметим, что для доказательства теоремы достаточно построить гладкую кусочно-аналитическую поверхность, обладающую свойствами 1), 2), 3). Приближение последней с помощью аналитической с сохранением указанных свойств, как известно, не составляет труда.

Пусть λ — малое положительное число. Определим в прямоугольнике $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ функцию $\psi(x, y)$, полагая

$$\psi(x, y)=\varphi(x, y) \quad \text{при} \quad |y| \geqslant \lambda,$$

$$\psi(x, y)=\alpha(x) y^3+\beta(x) y^2+\gamma(x) y+\delta(x) \quad \text{при} \quad |y| \leqslant \lambda,$$

где $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ и $\delta(x)$ подобраны так, чтобы при $|y|=\lambda$

$$\varphi(x, y)=\psi(x, y) \quad \text{и} \quad \partial\varphi(x, y)/\partial y=\partial\psi(x, y)/\partial y.$$

Утверждается, что функция $\psi(x, y)$ при достаточно малом λ гладкая, кусочно-аналитическая и обладает свойствами 1), 2), 3), указанными в лемме. Докажем это.

Функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ и $\delta(x)$ указанными условиями определяются однозначно. Опуская соответствующие вычисления, приведем окончательный результат:

$$\alpha=\frac{1}{4\lambda^3}\left\{\lambda\left(\varphi_y^{+}+\varphi_y^{-}\right)-\left(\varphi^{+}-\varphi^{-}\right)\right\}; \quad \beta=\frac{1}{4\lambda}\left(\varphi_y^{+}-\varphi_y^{-}\right);$$

$$\gamma=\frac{1}{4\lambda}\left\{3\left(\varphi^{+}-\varphi^{-}\right)-\lambda\left(\varphi_y^{+}+\varphi_y^{-}\right)\right\}; \quad \delta=\frac{1}{4}\left\{2\left(\varphi^{+}+\varphi^{-}\right)-\lambda\left(\varphi_y^{+}-\varphi_y^{-}\right)\right\},$$

где плюс или минус, поставленные индексом, указывают на то, что второй аргумент функции (y) полагается равным $+\lambda$ или $-\lambda$ соответственно.

Подставляя эти значения для α, β, γ и δ в $\psi(x, y)$, получаем для нее в области $|y| \leqslant \lambda$ следующее выражение:

$$\psi(x, y)=\frac{1}{2}(\varphi^{+}+\varphi^{-})+(\varphi^{+}-\varphi^{-})\left(-\frac{y^{3}}{4\lambda^{3}}+\frac{3y}{4\lambda}\right)+$$
$$+(\varphi_{y}^{+}+\varphi_{y}^{-})\left(\frac{y^{3}}{4\lambda^{2}}-\frac{y}{4}\right)+(\varphi_{y}^{+}-\varphi_{y}^{-})\left(\frac{y^{2}}{4\lambda}-\frac{\lambda}{4}\right).$$

Так как при малых λ величина $\varphi^{+}-\varphi^{-}$ имеет порядок λ, то при $|y| \leqslant \lambda$

$$\psi(x, y)=\frac{1}{2}(\varphi^{+}+\varphi^{-})+O(\lambda),$$

где $O(\lambda)$ — некоторая функция, имеющая порядок λ. Отсюда по непрерывности функции $\varphi(x, y)$ следует, что выражение

$$|\varphi(x, y)-\psi(x, y)|$$

сколь угодно мало, если мало λ.

Дифференцируя функцию $\psi(x, y)$ по x и замечая, что $|\varphi_{xy}^{+}-\varphi_{xy}^{-}|$ имеет порядок λ, мы дословно таким же рассуждением приходим к выводу, что

$$|\varphi_{x}(x, y)-\psi_{x}(x, y)|$$

сколь угодно мало, если мало λ.

Рассмотрим теперь

$$|\varphi_{y}(x, y)-\psi_{y}(x, y)|.$$

Имеем

$$\psi_{y}(x, y)=(\varphi^{+}-\varphi^{-})\left(-\frac{3y^{2}}{4\lambda^{3}}+\frac{3}{4\lambda}\right)+$$
$$+(\varphi_{y}^{+}+\varphi_{y}^{-})\left(\frac{3y^{2}}{4\lambda^{2}}-\frac{1}{4}\right)+(\varphi_{y}^{+}-\varphi_{y}^{-})\left(\frac{y}{2\lambda}\right).$$

При малых λ

$$\varphi^{+}=\varphi^{0}+\lambda\varphi_{y}^{+}+O(\lambda^{2}), \quad \varphi^{-}=\varphi^{0}-\lambda\varphi_{y}^{-}+O(\lambda^{2}),$$

где через φ^{0} обозначено $\varphi(x, 0)$. Поэтому

$$\psi_{y}=\frac{1}{2}(\varphi_{y}^{+}+\varphi_{y}^{-})+\frac{y}{2\lambda}(\varphi_{y}^{+}-\varphi_{y}^{-})+O(\lambda).$$

Отсюда видно, что

$$|\varphi_{y}(x, y)-\psi_{y}(x, y)|$$

мало вместе с λ и ε.

Покажем, наконец, что изменение положительной кривизны при переходе от поверхиости $z=\varphi(x, y)$ к поверхности $z=\psi(x, y)$ сколь угодно мало, если достаточно мало λ.

Во-первых, поверхности $z=\varphi(x, y)$ и $z=\psi(x, y)$ отличаются только в области $|y|<\lambda$. В этой области положительная кривизна поверхиости $z=\varphi(x, y)$ мала вместе с λ. Таким образом, нам надо показать, что положительная кривизна поверхности $z=\psi(x, y)$ в области $|y|<\lambda$ мала вместе с λ.

Положительиая кривизиа поверхиости $z=\psi(x, y)$ в области $|y|\leqslant\lambda$ равна

$$\omega^+=\int\int \frac{\psi_{xx}\psi_{yy}-\psi_{xy}^2}{\left(1+\psi_x^2+\psi_y^2\right)^{3/2}}\,dx\,dy,$$

где интегрирование распространяется иа ту часть области $|y|\leqslant\lambda$, где подынтегральная функция положительиа.

Чтобы оценить величииу интеграла, которым определяется положительная кривизиа поверхиости $z=\psi(x, y)$, рассмотрим вторые производные функции $\psi(x, y)$ при $|y|\leqslant\lambda$. Именно, покажем прежде всего, что при $|y|\leqslant\lambda$ величины ψ_{xx}, ψ_{xy} и $\lambda\psi_{yy}$ равиомерио ограничеиы. Для этого сиова воспользуемся явным выражеиием для $\psi(x, y)$ в области $|y|\leqslant\lambda$.

Дифференцируя выражение для $\psi(x, y)$ два раза по x, заключаем об ограничеиности ψ_{xx} просто на основании равномерной ограничениости вторых и третьих производных φ в областях ее аиалитичиости.

Дифференцируя $\psi(x, y)$ по x и y, получим

$$\psi_{xy}(x, y)=\left(\varphi_x^+-\varphi_x^-\right)\left(-\frac{3y^2}{4\lambda^3}+\frac{3}{4\lambda}\right)+ \\ +\left(\varphi_{xy}^++\varphi_{xy}^-\right)\left(\frac{3y^2}{4\lambda^2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\varphi_{xy}^+-\varphi_{xy}^-\right)\frac{y}{2\lambda}.$$

Второй и третий члены этого выражения ограничены в силу ограииченности вторых производных фуикции φ. Что касается первого члена, то в силу иепрерывности функции $\varphi_x(x, y)$ ои допускает представление

$$\left(\frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda}^{\lambda}\varphi_{xy}\,dy\right)\left(-\frac{3y^2}{4\lambda^2}+\frac{3}{4}\right).$$

Первый сомножитель этого выражения ограничен из-за ограииченности производной φ_{xy}, а второй ограиичен очевидиым образом. Итак, производиая ψ_{xy} ограиичеиа.

Следует заметить, что последние заключения отиосятся к тем точкам рассматриваемой области, где производиые существуют. Но таковы почти все точки области задаиия фуикции φ, поэтому λ, иапример, всегда можно выбрать так, чтобы иа прямых

$y=\pm\lambda$ встречающиеся производные функции φ существовали почти везде.

Покажем ограниченность $\lambda\psi_{yy}$. Дифференцируя выражение ψ два раза по y, получаем

$$\lambda\psi_{yy}=-\frac{3y}{2\lambda^2}(\varphi^+-\varphi^-)+\frac{3y}{2\lambda}(\varphi_y^+ + \varphi_y^-)+\frac{1}{2}(\varphi_y^+ - \varphi_y^-).$$

Ограниченность второго и третьего слагаемых следует из ограниченности производных функции φ. Первое слагаемое допускает представление

$$-\frac{3y}{2\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}\int\limits_{-\lambda}^{\lambda}\varphi_y\,dy\right)$$

и, следовательно, ограничено по той же причине. Итак, величина $\lambda\psi_{yy}$ ограничена.

Поверхность $z=\varphi(x, y)$ состоит из конечного числа аналитических поверхностей, разделяемых аналитическими кривыми. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_r$ — точки оси x, лежащие на границе областей аналитичности функции φ, расположенных со стороны $y>0$, и $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_s$ — точки, лежащие на границе областей аналитичности со стороны $y<0$. Число тех и других конечно. Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_t$ — точки оси x, в которых φ_{xx} обращается в нуль, не будучи равной нулю тождественно в окрестности. По причине аналитичности кусков поверхности φ число таких точек также конечно.

Построим для каждой точки A_i, $\bar{A}_i$ и B_i содержащий ее интервал δ так, чтобы общая длина интервалов не превосходила ε'. Множество, составленное из интервалов δ, обозначим D.

Часть отрезка (ab) оси x, не покрытая интервалами δ, состоит из отрезков $\bar{\delta}$. В достаточно малой полуокрестности каждого отрезка $\bar{\delta}$ со стороны $y>0$ и со стороны $y<0$ функция $\varphi(x, y)$ аналитическая. Возьмем λ настолько малым, чтобы функция $\varphi(x, y)$ была аналитической внутри каждого прямоугольника со стороной $\bar{\delta}$ и параллельной стороной на $y=\pm\lambda$.

Множество точек, принадлежащих отрезкам $\bar{\delta}$, разобьем на два подмножества D' и D''. В D' отнесем все точки, где $|\varphi_{xx}|<\varepsilon''$, а в D'' — точки, где $|\varphi_{xx}|\geqslant\varepsilon''$.

Обозначим D_λ, D'_λ и D''_λ множества точек прямоугольника $a\leqslant x\leqslant b$, $|y|\leqslant\lambda$, которые проектируются на ось x в множества D, D' и D'' соответственно. Положим для краткости

$$\frac{\psi_{xx}\psi_{yy}-\psi_{xy}^2}{(1+\psi_x^2+\psi_y^2)^{3/2}}=\Omega.$$

Обозначим, наконец, G_λ множество точек (x, y), в которых $|y| \leqslant \lambda$ и $\Omega > 0$. Тогда

$$\omega^+ = \int\limits_{G_\lambda} \Omega\, dx\, dy = \int\limits_{G_\lambda \cap D_\lambda} \Omega\, dx\, dy + \int\limits_{G_\lambda \cap D'_\lambda} \Omega\, dx\, dy + \int\limits_{G_\lambda \cap D''_\lambda} \Omega\, dx\, dy.$$

Третий интеграл правой части равенства при достаточно малом λ равен нулю, так как $G_\lambda \cap D''_\lambda$ пусто. Действительно, так как в каждой компоненте D''_λ функция φ аналитическая при $y \leqslant 0$ и при $y \geqslant 0$, то при достаточно малом λ

$$\psi_{xx}(x, y) = \varphi_{xx}(x, 0) + O(\lambda),$$

$$\psi_{yy}(x, y) = \frac{1}{2\lambda}(\varphi_y(x, +0), -\varphi_y(x, -0)) + O(1).$$

По условию леммы

$$\varphi_{xx}(x, 0)(\varphi_y(x, +0) - \varphi_y(x, -0)) < 0.$$

Поэтому при достаточно малом λ в D''_λ функция $\Omega < 0$ и, следовательно, в D''_λ нет точек G_λ.

Оценим теперь

$$\int\limits_{G_\lambda \cap D'_\lambda} \Omega\, dx\, dy.$$

По той же причине, что и для D''_λ, в D'_λ имеют место данные выше представления для ψ_{xx} и ψ_{yy}. И так как в D' величина $|\varphi_{xx}| < \varepsilon''$, то при малом λ в D'_λ

$$|\psi_{xx}\psi_{yy}| < \frac{c\varepsilon''}{\lambda},$$

где c — постоянная, не зависящая от λ и ε''. Что касается смешанной производной ψ_{xy}, то она оценена раньше. Принимая во внимание, что площадь области интегрирования $G_\lambda \cap D'_\lambda$ не больше $(b-a)\lambda$, заключаем, что интеграл

$$\int\limits_{G_\lambda \cap D'_\lambda} \Omega\, dx\, dy$$

оценивается величиной ε'' и, следовательно, мал, если мало ε''.

Оценим, наконец, интеграл

$$\int\limits_{G_\lambda \cap D_\lambda} \Omega\, dx\, dy.$$

Так как при $|y| \leqslant \lambda$ функции ψ_{xx}, $\lambda\psi_{yy}$ и ψ_{xy} равномерно

ограничены, то подынтегральная функция имеет порядок не более чем $1/\lambda$. Что же касается площади области интегрирования, то она не больше $\varepsilon'\lambda$. Поэтому величина интеграла мала вместе с ε'.

Резюмируя вышеизложениое, заключаем, что при достаточио малом λ положительиая кривизна поверхности $z=\psi(x, y)$ в области $|y|\leqslant\lambda$ сколь угодно мала. Лемма доказана полностью.

Лемма 6. *Пусть*

$$z=\varphi(x, y), \quad a\leqslant x\leqslant b, \quad c\leqslant y\leqslant d,$$

— нитяная поверхность, существование которой устанавливается леммой 4. Тогда существует аналитическая поверхность

$$z=\psi(x, y) \quad a\leqslant x\leqslant b, \quad c\leqslant y\leqslant d,$$

удовлетворяющая следующим условиям:

1) $|\varphi(x, y)-\psi(x, y)|<\varepsilon_1$;

2) $|\partial\varphi/\partial x-\partial\psi/\partial x|<\varepsilon_2$, $|\partial\varphi/\partial y-\partial\psi/\partial y|<\varepsilon_2$;

3) *каково бы ни было множество M_φ в области регулярности поверхности φ,*

$$|\sigma^+(M_\varphi)-\sigma^+(M_\psi)|<\varepsilon_3,$$

где M_ψ — множество на поверхности ψ, в которое проектируется M_φ прямыми, параллельными оси z.

Числа ε_1 и ε_3 можно считать сколь угодно малыми, а ε_2 мало, если малы скачки производных φ в точках нарушения гладкости.

Эта лемма по существу следует из леммы 5.

§ 7. Приближение поверхностей ограниченной внешней кривизны регулярными поверхностями

Доказательству теоремы о приближеиии поверхиостей ограничеииой виешней кривизны мы предпошлем ряд лемм о прямолинейных образующих на гладкой поверхиости.

Прямолинейный отрезок g иа гладкой поверхиости мы будем называть *изолированным*, если не существует последовательности прямолииейных отрезков иа поверхности, сходящихся к g.

Лемма 1. *Множество изолированных прямолинейных отрезков на поверхности не более чем счетно.*

Доказательство. Сопоставим каждому прямолииейному отрезку, лежащему на поверхности, шесть величин $x_1, x_2, \ldots, x_6$, из коих первые три являются декартовыми координатами одного коица отрезка, а остальные три — декартовыми координатами другого коица. Таким образом, каждому

отрезку на поверхности будет сопоставлена точка шестимерного евклидова пространства $(x_1, x_2, \ldots, x_6)$.

Обозначим H множество точек этого пространства, соответствующих указанным образом прямолинейным отрезкам поверхности. Очевидно, если отрезок g изолированный, то соответствующая ему точка $X_g \subset H$ является изолированной точкой. А множество изолированных точек H не более чем счетно. Лемма доказана.

Пусть g — неизолированный прямолинейный отрезок на поверхности. Тогда, если среди прямолинейных отрезков g_n, сходящихся к g, найдутся сколь угодно близкие к g, расположенные с ним в одной плоскости, то касательная плоскость поверхности вдоль g стационарна. Докажем это.

Не ограничивая общности, можно считать, что отрезок g расположен в плоскости xz. Пусть A и B — две произвольные внутренние точки отрезка g. Проведем через них плоскости, перпендикулярные к оси x. Они пересекут поверхность по кривым γ_A и γ_B соответственно. Обозначим A_n и B_n точки пересечения кривых γ_A и γ_B с отрезком g_n, который лежит в одной плоскости с отрезком g.

Положим

$$\xi_A^n = \begin{cases} \dfrac{z(A_n) - z(A)}{y(A_n) - y(A)}, & \text{если } A_n \neq A, \\ \partial z/\partial y\,|_A, & \text{если } A_n = A, \end{cases}$$

$$\xi_B^n = \begin{cases} \dfrac{z(B_n) - z(B)}{y(B_n) - y(B)}, & \text{если } B_n \neq B, \\ \partial z/\partial y\,|_B, & \text{если } B_n = B. \end{cases}$$

Так как $\xi_A^n = \xi_B^n$, а при $n \to \infty$

$$\xi_A^n \to \partial z/\partial y\,|_A \quad \text{и} \quad \xi_B^n \to \partial z/\partial y\,|_B,$$

то

$$\partial z/\partial y\,|_A = \partial z/\partial y\,|_B.$$

Равенство производных $\partial z/\partial x$ в точках A и B очевидно. Утверждение доказано.

Лемма 2. *Если угол между нормалями поверхности на концах неизолированного прямолинейного отрезка g меньше ϑ, то угол между нормалями в двух любых точках отрезка также меньше ϑ.*

Доказательство. Будем считать, что отрезок g расположен в плоскости xz. Если среди отрезков g_n, сходящихся к g, существуют сколь угодно близкие к g, расположенные с ним в одной плоскости, то утверждение леммы очевидно, так как в этом случае касательная плоскость вдоль отрезка g стационарна.

Возьмем точки A и B на отрезке g, близкие к его концам, и пусть C — точка отрезка, делящая расстояние между A и B в отношении λ: $(1-\lambda)$. Так же, как и в предыдущем рассмотрении, проведем через точки A, B, C плоскости, перпендикулярные к оси x, и обозначим A_k, B_k и C_k пересечения их с отрезком g_k. В связи с замечанием, сделанным выше, можно считать, что $A_k \neq A$, $B_k \neq B$ и $C_k \neq C$.

Для доказательства леммы, очевидно, достаточно показать, что производная $\partial z/\partial y$ в точке C заключена между производными в точках A и B.

Положим

$$\xi_A^n = \frac{z(A_n)-z(A)}{y(A_n)-y(A)}, \quad \xi_B^n = \frac{z(B_n)-z(B)}{y(B_n)-y(B)}, \quad \xi_C^n = \frac{z(C_n)-z(C)}{y(C_n)-y(C)}.$$

Из геометрических соображений ясно, что ξ_C^n заключено между ξ_A^n и ξ_B^n. В этом можно убедиться и вычислениями, если принять во внимание известные соотношения между координатами трех точек на прямой.

Отсюда, переходя к пределу при $n \to \infty$, заключаем, что производная $\partial z/\partial y|_C$ заключена между производными $\partial z/\partial y|_A$ и $\partial z/\partial y|_B$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если вдоль неизолированного прямолинейного отрезка касательная плоскость поверхности не стационарна, то величина*

$$\mu_{A,B}^{n,m} = \frac{y(B_n)-y(B_m)}{y(A_n)-y(A_m)}$$

при n, $m \to \infty$ стремится к определенному, отличному от нуля пределу.

Доказательство. Во-первых, при достаточно больших m и n отрезки g_m и g_n не могут пересекаться, так как отсюда немедленно следовало бы, что касательная плоскость вдоль отрезка g стационарна.

Рассмотрим три отношения:

$$\alpha = \frac{z(A_n)-z(A_m)}{y(A_n)-y(A_m)}, \quad \beta = \frac{z(B_n)-z(B_m)}{y(B_n)-y(B_m)}, \quad \gamma = \frac{z(C_n)-z(C_m)}{y(C_n)-y(C_m)}.$$

Принимая во внимание известное соотношение между координатами точек A_k, B_k и C_k:

$$x(C_k) = \lambda x(A_k) + (1-\lambda)\, x(B_k),$$
$$y(C_k) = \lambda y(A_k) + (1-\lambda)\, y(B_k),$$
$$z(C_k) = \lambda z(A_k) + (1-\lambda)\, z(B_k),$$

получаем

$$\mu_{A,B}^{n,m} = -\frac{\lambda(\alpha-\gamma)}{(1-\lambda)(\beta-\gamma)}.$$

При $m, n \to \infty$

$$\alpha \to \partial z/\partial y|_A, \quad \beta \to \partial z/\partial y|_B, \quad \gamma \to \partial z/\partial y|_C.$$

И так как

$$\partial z/\partial y|_A \neq \partial z/\partial y|_C \neq \partial z/\partial y|_B,$$

то при $m, n \to \infty$

$$\mu_{A,B}^{m,n} \to \mu_{A,B} = -\frac{\lambda(\partial z/\partial y|_A - \partial z/\partial y|_C)}{(1-\lambda)(\partial z/\partial y|_B - \partial z/\partial y|_C)}.$$

Лемма доказана.

Сопоставим каждому неизолированному отрезку g, параллельному плоскости xz, число ϑ_g, равное углу между нормалями поверхности на его концах. Если ϑ_g отлично от нуля, то отнесем отрезку g еще число μ_g, равное пределу величины $\mu_{A,B}^g$, когда точки A и B неограниченно приближаются к концам отрезка g.

Лемма 4. *Множество G_ε отрезков g длины не меньше $l>0$, для которых $\vartheta_g \geqslant \varepsilon > 0$ и $|\mu_g - 1| \geqslant \varepsilon$, конечно.*

Доказательство. Допустим, G_ε бесконечно. Тогда в нем можно выделить сходящуюся последовательность g_n. Она сходится к некоторому отрезку g_0, причем

$$\vartheta_{g_n} \to \vartheta_{g_0}.$$

Так как $\vartheta_{g_n} \geqslant \varepsilon$, то и $\vartheta_{g_0} \geqslant \varepsilon$. Отсюда следует, что μ_{g_0} существует и является пределом μ_{g_n}, в частности, $|\mu_{g_0} - 1| \geqslant \varepsilon$.

С другой стороны, так как отрезок g_0 является пределом отрезков g_n, параллельных плоскости xz, то $\mu_{g_0} = 1$. Мы пришли к противоречию. Лемма доказана.

Пусть отрезок $g \subset G_\varepsilon$ на поверхности F расположен в плоскости $y=t=\text{const}$. Проведем через каждую точку P отрезка в плоскости $x=x_P$ прямую g_P, касающуюся поверхности F в точке P. Отрезки $g_P (P \subset g)$ образуют аналитическую линейчатую поверхность F_g (гиперболический параболоид).

Действительно, коэффициент k_P наклона прямой g_P в произвольной точке P, делящей расстояние между концами в отношении $\lambda : (1-\lambda)$, выражается через коэффициенты наклона прямых, соответствующих концевым точкам, по формуле

$$k_P = \frac{\lambda\mu_g k_1 + (1-\lambda) k_2}{\lambda\mu_g + (1-\lambda)}$$

и, таким образом, представляет собой аналитическую функцию λ. Отсюда следует, что поверхность F_g аналитическая.

Построим в плоскости $y=t$ две кривые γ^+ и γ^- следующим образом. На отрезке g возьмем близкие к концам A и B точки $\bar{A}$

и $\bar{B}$. Сместим точки A и B в направлении $z>0$ на расстояние $\bar{h}$. Кривая γ^+ состоит из прямолинейного отрезка $\bar{A}\bar{B}$ и двух парабол, которые касаются g в точках $\bar{A}$, $\bar{B}$ и проходят через точки $A_{\bar{h}}$ и $B_{\bar{h}}$, полученные смещением A и B. Кривая γ^- строится аналогично, только точки A и B смещаются на $\bar{h}$ в направлении $z<0$.

Теперь построим поверхности F_g^+ и F_g^-. Через каждую точку P кривой γ^+ проведем параболу в плоскости $x=x_P$ так, чтобы ее наклон в P был равен наклону той прямолинейной образующей поверхности F_g, которая лежит в плоскости $x=x_P$, а коэффициент при y^2 равен $\bar{\varepsilon}/\bar{h}$. Эти параболы образуют гладкую кусочно-аналитическую поверхность F_g^+. Поверхность F_g^- строится аналогично, только вместо кривой γ^+ берется γ^-, а коэффициент при y^2 у парабол равен $\bar{\varepsilon}/\bar{h}$.

Сместим поверхность F_g в направлении $z>0$ на расстояние $\bar{h}$. При этом некоторая часть поверхности F_g^+ окажется под поверхностью F_g. Обозначим ее $\tilde{F}_g^+$. Относительно этой поверхности существенно заметить следующее:

1. При достаточно малом $\bar{h}$ и фиксированном $\bar{\varepsilon}$ ее край расположен над поверхностью F.

2. Проекция $\tilde{F}_g^+$ на плоскость xy расположена в $\bar{h}/\sqrt{\bar{\varepsilon}}$-окрестности проекции отрезка g.

3. Абсолютная кривизна поверхности $\tilde{F}_g^+$ мала вместе с $\bar{\varepsilon}$ (имеет порядок $\bar{\varepsilon}$).

Все перечисленные свойства поверхности $\tilde{F}_g^+$ проверяются непосредственными вычислениями. Поверхность $\tilde{F}_g^-$ определяется аналогично с помощью поверхности F_g^- и обладает аналогичными свойствами.

Сместим поверхность F на малое расстояние h ($h \ll \bar{h}$) в направлениях $z>0$ и $z<0$ в положения F^+ и F^- соответственно так, чтобы край поверхности $\tilde{F}_g^+$ был над F^+, а край $\tilde{F}_g^-$ — под F^-. Пусть $\tilde{G}_g^+$ — компонента разбиения поверхности $\tilde{F}_g^+$ поверхностью F^+, содержащая отрезок $g_{\bar{A},\bar{B}}$. Преобразуем поверхность F^+, заменив в ней областью $\tilde{G}_g^+$ ту часть, в которую эта область проектируется прямыми, параллельными оси z. Полученную поверхность обозначим $\tilde{F}^+$. Поверхность $\tilde{F}^-$ определяется аналогично с помощью поверхности $\tilde{F}_g^-$.

Лемма 5. *Пусть M — множество прямолинейных отрезков длины не меньше l, параллельных плоскости xz и расположенных между поверхностями $\tilde{F}^+$ и $\tilde{F}^-$. Тогда существует $d>0$ такое, что, каково бы ни было $\bar{\varepsilon}>0$, при достаточно малом $\bar{h}$ в*

d-окрестности отрезка g не будет отрезков из M, кроме самого g.

Доказательство. Допустим, утверждение неверно и g' — отрезок из M, расположенный в d-окрестности отрезка g. Пусть P' и Q' — точки отрезка g', делящие его на три равные части, а S' — точка, расположенная между ними и делящая отрезок $P'Q'$ в отношении $\lambda:(1-\lambda)$. Проведем через каждую из этих точек плоскость, параллельную плоскости yz. При достаточно малом d эти плоскости пересекают отрезок g в точках P, Q и S соответственно.

Рассмотрим три отношения:

$$\xi_A=\frac{z(A)-z(\overline{A})}{y(A)-y(\overline{A})},\quad \xi_B=\frac{z(B)-z(\overline{B})}{y(B)-y(\overline{B})},\quad \xi_C=\frac{z(C)-z(\overline{C})}{y(C)-y(\overline{C})}.$$

Если d и $\overline{h}/\sqrt{\varepsilon}$ достаточно малы, то эти отношения близки к $\partial z/\partial y|_A$, $\partial z/\partial y|_B$ и $\partial z/\partial y|_C$ соответственно. Следовательно

$$\xi_C=\frac{\lambda\mu_g\xi_A+(1-\lambda)\xi_B}{\gamma\mu_g+(1-\lambda)}+\tilde{\varepsilon},$$

где $\tilde{\varepsilon}$ сколь угодно мало, если малы d и $\overline{h}/\sqrt{\varepsilon}$. С другой стороны, очевидно,

$$\xi_C=\lambda\xi_A+(1-\lambda)\xi_B.$$

Так как $|\xi_A-\xi_B|$ ограничено снизу положительными числом ($\vartheta_g\neq 0$), а $\mu_g\neq 0$, то при $\lambda=\frac{1}{2}$ и достаточно малом $\overline{\varepsilon}$ эти два выражения для ξ_C заведомо различны. Мы пришли к противоречию. Лемма доказана.

Теорема. *Пусть F — поверхность ограниченной внешней кривизны и X — произвольная точка на этой поверхности. Тогда у точки X есть окрестность U_X такая, что существует последовательность регулярных, даже аналитических поверхностей F_n, сходящихся к F в U_X вместе со сферическими изображениями и с положительными кривизнами, слабо сходящимися к положительной кривизне F.*

Точный смысл этой теоремы состоит в следующем. Сходимость поверхностей F_n к F в окрестности U_X предполагает некоторый гомеоморфизм f_n поверхности F на F_n, определенный в U_X. В теореме утверждается, во-первых, что при достаточно большом n расстояния между соответствующими точками поверхностей F и F_n, а также углы между касательными поверхностей в этих точках сколь угодно малы.

Далее, в силу гомеоморфизма f_n каждому множеству $E\subset U_X$ сопоставлено некоторое множество $f_n(E)$ на F_n. Пусть $\sigma_n^+(E)$ — его положительная кривизна. Тогда в теореме утверждается,

что, какова бы ни была непрерывная функция $\psi(Y)$, заданная в U_X,

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{U_X}\psi(Y)\,d\sigma_n^+(E(Y))=\int\limits_{U_X}\psi(Y)\,d\sigma^+(E(Y)).$$

Доказательство. Пусть F — гладкая поверхность ограниченной внешней кривизны. Приняв касательную плоскость в точке X за плоскость xy, достаточно малую окрестность этой точки поверхности можем задать уравнением

$$z=\varphi(x,\ y),\quad a\leqslant x\leqslant b,\quad c\leqslant y\leqslant d,$$

где $\varphi(x,\ y)$ — непрерывная и непрерывно дифференцируемая функция по обеим переменным в указанной области.

Так как множество изолированных отрезков на поверхности не более чем счетно, то, не ограничивая общности, можно считать, что среди них нет параллельных плоскости xy.

Для каждого отрезка g множества G_ε (лемма 4) построим кусочно-аналитические поверхности $\tilde F_g^+$ и $\tilde F_g^-$ с достаточно малым ε, которым они определяются.

Разобьем прямоугольник Δ: $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant y\leqslant d$, прямыми, параллельными координатным осям, на малые прямоугольники δ так, чтобы абсолютная кривизна поверхности на множестве точек, соответствующих сторонам и вершинам прямоугольников δ, была равна нулю. Пусть F_δ — кусок поверхности F, который проектируется на прямоугольник δ. Образуем выпуклую оболочку F_δ. Пусть F_δ' — та ее часть, которая обращена в сторону $z>0$, а F_δ'' — в сторону $z<0$.

Поверхности F_{δ_1}' и F_{δ_2}', у которых соответствующие прямоугольники δ_1 и δ_2 имеют общую сторону, тоже имеют общий отрезок границы — некоторую выпуклую кривую, которая проектируется на эту общую сторону прямоугольников, так что поверхности F_δ', взятые вместе, образуют некоторую поверхность F' и однозначно проектируются на прямоугольник Δ. Аналогичным свойством обладают поверхности F_δ''.

Пусть H — любое множество точек на поверхности F. Тогда положительная кривизна поверхности F на множестве H не меньше суммы положительных кривизн поверхностей F_δ' и F_δ'' на множествах, проектирующихся в H прямыми, параллельными оси z. Это немедленно следует из того, что каждой точке одностороннего расположения на F_δ' (или F_δ''), не содержащей прямолинейного отрезка, в указанном проектировании соответствует на F точка одностороннего расположения.

Приблизим каждую поверхность F'_δ алгебраической выпуклой поверхностью $\tilde{F}'_\delta$, удовлетворяя при этом следующим условиям:

1) полная кривизна $\tilde{F}'_\delta$ должна мало отличаться от полной кривизны F'_δ;

2) если P — точка края какой-нибудь из поверхностей $\tilde{F}'_\delta$, то всегда найдется по крайней мере на одной из смежных поверхностей $\tilde{F}'_\delta$ внутренняя точка, расположенная над P;

3) никакие две поверхности $\tilde{F}'_\delta$ не касаются, следовательно, либо не имеют общих точек, либо пересекаются по алгебраическим кривым.

Очевидно, удовлетворяющее этим условиям приближение поверхностей F'_δ алгебраическими поверхностями $\tilde{F}'_\delta$ нетрудно осуществить.

Поверхности $\tilde{F}'_\delta$ разбивают область пространства $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$. Пусть E' — та из областей этого разбиения, которая содержит точки со сколь угодно большими z. Часть границы E', составленную из кусков алгебраических поверхностей $\tilde{F}'_\delta$, обозначим F'. Она представляет собой кусочно-алгебраическую поверхность, однозначно проектирующуюся на прямоугольник Δ.

Аналогично строится кусочно-алгебраическая поверхность F'' из алгебраических поверхностей $\tilde{F}''_\delta$, приближающих поверхности F''_δ.

Сместим поверхность F'' на малое расстояние h вверх, а поверхность F' на такое же расстояние вниз. При этом, так как h мало, край каждой поверхности $\tilde{F}^+_g$ будет над поверхностью F''. Заменим ту часть поверхности F'', которая вырезается поверхностями $\tilde{F}^+_g$, соответствующими кусками этих поверхностей. Полученную поверхность обозначим Φ. Аналогично с помощью поверхностей F' и $\tilde{F}^-_g$ построим поверхность $\bar{\Phi}$.

Очевидно, малостью прямоугольников можно распорядиться так, чтобы при заданном смещении h поверхность Φ была расположена над $\bar{\Phi}$.

Приблизим линии пересечения поверхности F с плоскостями $x=a$ и $x=b$ алгебраическими кривыми $\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_2$ и построим для этих кривых и поверхностей Φ, $\bar{\Phi}$ нитяную поверхность $\tilde{\Phi}$. Утверждается, что при соответствующем выборе конструктивных параметров, определяющих строение поверхности $\tilde{\Phi}$, она будет обладать следующими свойствами:

1) поверхность $\tilde{\Phi}$ близка к F;

2) касательные плоскости $\tilde{\Phi}$ образуют с касательными плоскостями F в соответствующих точках малые углы.

Первое утверждение очевидно, оно обеспечено малостью h. Именно, расстояние между соответствующими точками F и $\tilde{\Phi}$ (т. е. точками, расположенными на одной вертикали) не превосходит h.

Докажем второе утверждение. Допустим, оно неверно. Тогда на каждой поверхности $\tilde{\Phi}$ можно указать точку $\tilde{Q}$ такую, что касательная плоскость в этой точке образует с касательной плоскостью поверхности F в соответствующей точке Q угол больше $\tilde{\varepsilon}>0$, причем $\tilde{\varepsilon}$ одно и то же для всех $\tilde{\Phi}$.

Можно считать, что точка $\tilde{Q}$ не принадлежит ни Φ, ни $\bar{\Phi}$, так как касательные плоскости этих поверхностей близки к касательным плоскостям F по построению. Таким образом, точка $\tilde{Q}$ должна принадлежать прямолинейному отрезку $\tilde{g}$, который на концах либо касается поверхностей Φ, $\bar{\Phi}$, либо опирается на кривые $\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_2$.

По той же причине расстояния точки $\tilde{Q}$ от концов отрезка $\tilde{g}$, которому она принадлежит, ограничены снизу.

Когда поверхность $\tilde{\Phi}$ неограниченно приближается к F, отрезок $\tilde{g}$, можно считать, сходится к некоторому отрезку g_0 (части отрезка) поверхности F, а точка $\tilde{Q}$ — к его внутренней точке Q_0. Относительно отрезка g_0 могут быть только три предположения: 1) $\vartheta_{g_0} \geqslant \varepsilon$, $|\mu_{g_0}-1| \geqslant \varepsilon$, 2) $\vartheta_{g_0}<\varepsilon$, 3) $|\mu_{g_0}-1|<\varepsilon$. Мы покажем, однако, что конструктивными параметрами поверхностей $\tilde{\Phi}$, сходящихся к F, можно распорядиться так, что ни одно из указанных условий для предельного отрезка g_0 не будет выполняться.

По лемме 4 легко добиться того, чтобы для g_0 не выполнялось первое предположение.

Допустим, g_0 удовлетворяет второму условию ($\vartheta_{g_0}<\varepsilon$). Тогда изменение производной $\partial\varphi/\partial y$ вдоль отрезка g_0 не превосходит ε, т. е. с точностью до ε производная $\partial\Phi/\partial y$ не изменяется. В точке $\tilde{Q}$ величина $\partial\varphi/\partial y$ заключена между ее значениями на концах отрезка $\tilde{g}$. А последние близки к значениям $\partial\varphi/\partial y$ в соответствующих точках отрезка g_0. Отсюда следует, что при достаточной близости $\tilde{\Phi}$ к F производные $\partial\varphi/\partial y$ и $\partial\tilde{\varphi}/\partial y$ в точках Q и $\tilde{Q}$ соответственно будут отличаться на величину порядка ε, которую ввиду произвола ε можно считать меньшей $\tilde{\varepsilon}$. Итак, достаточно взять малым ε, и для отрезка g_0 не будет выполняться второе условие.

Допустим, наконец, что для отрезка g_0 выполняется третье условие $|\mu_{g_0}-1|<\varepsilon$. Покажем, что и это исключается, если достаточно мало ε. Производная $\partial\varphi/\partial y$ вдоль отрезка g_0 при $|\mu_{g_0}-1|<\varepsilon$ и производная $\partial\tilde{\varphi}/\partial y$ вдоль отрезка $\tilde{g}$ изменяются одинаково с точностью до величины порядка ε. И так как ука-

занные производные на концах отрезков близки, то они близки и в точках, делящих отрезки в одинаковых отношениях. Таким образом, если ε мало в сравнении с $\tilde{\varepsilon}$, то для отрезка g_0 не может выполняться третье условие. Мы пришли к противоречию. Итак, среди поверхностей $\tilde{\Phi}$ существуют такие, которые сколь угодно близки вместе с касательными плоскостями к поверхности F.

Построим для каждой поверхности $\tilde{\Phi}$ аналитическую поверхность $\tilde{\Phi}^*$ по лемме 6 § 6. Утверждается, что последовательность аналитических поверхностей, существование которой утверждается теоремой, может быть построена из поверхностей $\tilde{\Phi}^*$.

То, что из совокупности поверхностей $\tilde{\Phi}^*$ можно выделить последовательность $\tilde{\Phi}_n^*$, сходящуюся к F вместе со сферическими изображениями, очевидно. Покажем, что при этом может быть обеспечена также слабая сходимость положительных кривизн.

Каково бы ни было $\varepsilon^+>0$, при достаточной близости поверхности $\tilde{\Phi}^*$ к F

$$\sigma^+(\tilde{\Phi}^*) > \sigma^+(F) - \varepsilon^+.$$

Докажем это.

Возьмем на F конечное число замкнутых, попарно не пересекающихся множеств H_k, сумма площадей сферических изображений которых мало отличается от абсолютной кривизны F.

Определим на F множества W_n точек одностороннего расположения следующим условием. Точку X отнесем W_n, если она имеет окрестность $U(X)$ такую, что:

1) вся $U(X)$ расположена по одну сторону касательной плоскости в точке X;

2) граница окрестности $U(X)$ находится на расстоянии, не меньшем $1/n$ от касательной плоскости;

3) диаметр $U(X)$ не больше расстояния между множеством ΣH_k и границей поверхности F (соответствующей границе прямоугольника Δ).

Очевидно, W_k — замкнутые множества. При достаточно большом n сумма площадей сферических изображений множеств $W_k \cap H_k$ мало отличается от положительной кривизны F, так как $\sum_1^\infty W_n$ содержит все эллиптические точки множества $\sum_k H_k$.

Пусть поверхность $\tilde{\Phi}^*$ так близка к F, что располагается в ε^*-окрестности последней. Если ε^* мало в сравнении с $1/n$, то для каждой точки $X \in w_n \cap H_k$ найдется на $\tilde{\Phi}^*$ точка $\tilde{X}^*$ одностороннего расположения такая, что:

1) расстояние между точками X и $\tilde{X}^*$ мало вместе с ε^*;

2) касательные плоскости поверхностей F и $\tilde{\Phi}^*$ в точках X и $\tilde{X}^*$ параллельны.

Обозначим множество таких точек $\tilde{X}^*$, соответствующих множеству $w_n \cap H_k$, через M_k. Множества M_k при достаточно малом ε^* не пересекаются. Сумма площадей их сферических изображений не меньше суммы площадей сферических изображений множеств $w_n \cap H_k$, которая мало отличается от положительной кривизны поверхности по построению. Отсюда мы и заключаем, что, каково бы ни было $\varepsilon^+ > 0$, при достаточной близости $\tilde{\Phi}^*$ к F

$$\sigma^+(\tilde{\Phi}^*) > \sigma^+(F) - \varepsilon^+.$$

Распределение положительной кривизны на поверхности $\tilde{\Phi}^*$ почти не отличается от распределения ее на нитяной поверхности $\tilde{\Phi}$, из которой $\tilde{\Phi}^*$ получается сглаживанием. Положительная кривизна нитяной поверхности $\tilde{\Phi}$ сосредоточена в областях, по которым она прилегает к поверхностям Φ и $\bar{\Phi}$.

Положим

$$\sigma^+(\tilde{\Phi}_\delta^*) - \sigma^+(F_\delta) = \eta_\delta.$$

Тогда по указанной причине те η_δ, которые больше нуля, дают в сумме меньше ε^+. А тогда, принимая во внимание предыдущее неравенство, заключаем, что сумма абсолютных величин η_δ не превосходит $2\varepsilon^+$. Итак,

$$\sum_\delta |\sigma^+(\tilde{\Phi}_\delta^*) - \sigma^+(F^\delta)| < 2\varepsilon^+.$$

Будем обозначать положительные кривизны поверхностей F и $\tilde{\Phi}^*$ на множествах, проектирующихся в множество E прямоугольника Δ, через $\sigma_F^+(E)$ и $\sigma_{\tilde{\Phi}^*}^+(E)$ соответственно.

Пусть f — любая непрерывная функция, заданная в прямоугольнике Δ. Рассмотрим разность

$$R = \int_\Delta f\, d\sigma_F^+ - \int_\Delta f\, d\sigma_{\tilde{\Phi}^*}^+.$$

Очевидно, R можно представить в виде

$$R = \sum_\delta f'_\delta \sigma_F^+(\delta) - \sum_\delta f''_\delta \sigma_{\tilde{\Phi}^*}^+(\delta),$$

где f'_δ и f''_δ — средние значения функции f в прямоугольнике δ. А теперь нетрудно оценить ее. Имеем

$$R = \sum_\delta f''_\delta \left(\sigma_F^+(\delta) - \sigma_{\tilde{\Phi}^*}^+(\delta)\right) + \sum_\delta \sigma_F^+(\delta)\left(f'_\delta - f''_\delta\right).$$

Первая сумма мала ввиду того, что ε^+ может быть взято про-

извольно малым в неравенстве для положительных кривизн, которое только что было получено. Вторая сумма мала по причине равномерной непрерывности функции f.

Отсюда мы делаем вывод, что в последовательности поверхностей Φ_n^* может быть обеспечена также слабая сходимость положительных кривизн к положительной кривизне F. Теорема доказана полностью.

§ 8. Поверхности ограниченной внешней кривизны как многообразия ограниченной внутренней кривизны

В настоящем параграфе будет доказано, что всякая поверхность ограниченной внешней кривизны является многообразием ограниченной внутренней кривизны в смысле А. Д. Александрова. В связи с этим напомним основные определения и теоремы теории многообразий ограниченной внутренней кривизны.

Многообразие R ограниченной внутренней кривизны определяется двумя аксиомами:

1. R есть многообразие с внутренней метрикой.

2. Каждая точка R имеет окрестность такую, что для любой конечной совокупности попарно не перекрывающихся треугольников в ней сумма абсолютных величин их избытков равномерно ограничена.

Поясним эти аксиомы. Пусть R — метрическое многообразие с метрикой ρ, т. е. метрическое пространство, являющееся многообразием. Тогда для каждой кривой $X(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, в многообразии R может быть определено понятие длины кривой обычным способом:

$$l = \sup \sum \rho\left(X(t_k),\ X(t_{k-1})\right), \qquad a \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant b.$$

Относительно метрического многообразия R говорят, что его метрика внутренняя, если расстояние $\rho(X, Y)$ между любыми двумя точками X и Y в R равно точной нижней грани длин кривых, соединяющих эти точки.

Кривая, соединяющая точки X и Y в R, называется кратчайшей, если ее длина не больше, чем длина любой другой кривой, соединяющей эти точки. Геодезическая определяется как кривая, кратчайшая на каждом достаточно малом отрезке.

Кратчайшие в многообразии ограниченной кривизны обладают следующими свойствами:

1. Для каждой точки A в R и ее окрестности U существует такая окрестность V этой же точки, что любая кратчайшая в R, соединяющая любые две точки X и Y из V, проходит в U.

2. Кратчайшая гомеоморфна отрезку и поэтому вблизи каждой ее внутренней точки можно различать две стороны.

3. Длина кратчайшей равна расстоянию между ее концевыми точками в метрике ρ.

Треугольником ABC в многообразии R называется фигура, составленная из трех кратчайших γ_{AB}, γ_{BC}, γ_{AC}, попарно соединяющих точки A, B, C. Точки A, B, C называются вершинами треугольника, а кратчайшие — сторонами.

Относительно двух треугольников T и T' говорят, что они не перекрываются, если существуют не пересекающиеся гомеоморфные кругу области G' и G'', замыкания которых содержат треугольники T' и T'' соответственно.

Пусть γ_1 и γ_2 — две кривые в R, исходящие из точки O. Пусть X и Y — переменные точки на кривых γ_1 и γ_2 соответственно. Построим на плоскости треугольник со сторонами, равными $\rho(O, X)$, $\rho(O, Y)$, $\rho(X, Y)$. Пусть $\vartheta(X, Y)$ — угол этого треугольника, противолежащий стороне $\rho(X, Y)$. Верхним углом между кривыми γ_1 и γ_2 в точке O называется верхний предел углов $\vartheta(X, Y)$ при $X, Y \to O$. Просто углом между кривыми γ_1 и γ_2 в точке O называется предел $\vartheta(X, Y)$ при $X, Y \to O$. Угол между кривыми в их общей точке может не существовать, в то время как верхний угол всегда существует.

Верхним углом треугольника ABC при вершине A называется верхний угол между сторонами треугольника γ_{AB} и γ_{AC} в точке A. Избытком треугольника называется разность между суммой его верхних углов и π.

В многообразии ограниченной внутренней кривизны любые две кратчайшие, исходящие из одной точки, образуют определенный угол в смысле данного выше определения. Этот угол, очевидно, совпадает с верхним углом.

Пусть G — открытое множество в многообразии R ограниченной внутренней кривизны. Положительной (отрицательной) кривизной R на множестве G называется точная верхняя грань (точная нижняя грань с обратным знаком) положительных (отрицательных) сумм избытков попарно не перекрывающихся треугольников в G и она обозначается $\omega^+(G)$ (соответственно $\omega^-(G)$).

Положительная и отрицательная кривизны многообразия R на любом множестве M определяются равенствами

$$\omega^+(M) = \inf_{G \supset M} \omega^+(G), \qquad \omega^-(M) = \inf_{G \supset M} \omega^-(G).$$

Полной кривизной R на M называется разность между положительной и отрицательной кривизной R на этом множестве. Абсолютной кривизной R на M называется сумма положительной и отрицательной кривизн на M.

Положительная, отрицательная, полная и абсолютная кривизны на компактных множествах конечны и вполне аддитивны на кольце борелевских множеств.

Метрическое многообразие R называется римановым, если оно в окрестности каждой точки допускает такую параметризацию u, v (т. е. топологическое отображение на плоскость с декартовыми координатами u, v), что ее метрика задается в окрестности этой точки положительно определенной квадратичной дифференциальной формой

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

с обычным способом вычисления расстояний между точками (как точной нижней грани длин, соединяющих точки кривых).

Если риманово многообразие допускает параметризацию (u, v) такую, что коэффициенты E, F, G формы ds^2 дважды непрерывно дифференцируемы, то оно является многообразием ограниченной кривизны.

Положительная и отрицательная кривизны риманового многообразия на любом множестве M равны

$$\omega^+ = \int\limits_{K>0} K\,d\sigma, \qquad \omega^- = -\int\limits_{K<0} K\,d\sigma,$$

где K — гауссова кривизна, $d\sigma$ — элемент площади многообразия, а интегрирование распространяется на подмножество множества M, где $K>0$ и $K<0$ соответственно.

Пусть на многообразии R задана последовательность римановых метрик ρ_n, сходящихся к некоторой метрике ρ в том смысле, что, каково бы ни было $\varepsilon>0$, при достаточно большом n для любых двух точек X и Y в R $|\rho(X, Y) - \rho_n(X, Y)| < \varepsilon$. Тогда, если абсолютные кривизны римановых многообразий R_{ρ_n} (многообразие R с метрикой ρ_n) равномерно ограничены, то многообразие R_ρ является многообразием ограниченной кривизны. Более того, если положительные (отрицательные) кривизны многообразий R_{ρ_n} не превосходят $\omega_0^+ (\omega_0^-)$, то положительная (отрицательная) кривизна R_ρ не превосходит также ω_0^+ (соответственно ω_0^-). Из последовательности многообразий R_{ρ_n} можно выделить подпоследовательность таких, полные кривизны которых слабо сходятся к полной кривизне R_ρ.

Полная кривизна замкнутого многообразия с эйлеровой характеристикой χ равна $2\pi\chi$.

Пусть Φ — гладкая поверхность, однозначно проектирующаяся на плоскость xy и заданная уравнением

$$z = \varphi(x, y), \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d,$$

где φ — непрерывная и непрерывно дифференцируемая функция в указанном прямоугольнике. Пусть Φ_n — последовательность гладких поверхностей, также однозначно проектирующихся на

прямоугольник $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, сходящаяся с касательными плоскостями к Ф. Утверждается, что внутренние метрики поверхностей Φ_n сходятся к внутренней метрике Ф, если соответствие точек между поверхностями устанавливается проектированием прямыми, параллельными оси z. Покажем это.

Пусть поверхность Φ_n задается уравнением

$$z = \varphi_n(x, y), \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d.$$

Возьмем две произвольные точки A и B на поверхности Ф и соединим их кривой γ на поверхности. Длина этой кривой равна

$$l_\gamma = \int\limits_\gamma \left\{ \left(1 + \varphi_x^2\right) dx^2 + 2\varphi_x \varphi_y \, dx\, dy + \left(1 + \varphi_y^2\right) dy^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

По непрерывности производных φ_x и φ_y абсолютные величины их меньше некоторой постоянной c. Поэтому

$$l_\gamma < \sqrt{1 + 2c^2}\, l_{\bar\gamma},$$

где $l_{\bar\gamma}$ — есть длина кривой $\bar\gamma$ — проекции кривой γ на плоскости xy. Если взять в качестве γ кривую, лежащую в плоскости, перпендикулярной плоскости xy, то получим

$$l_\gamma < \sqrt{1 + 2c^2}\, d,$$

где d — диагональ прямоугольника, на который проектируется поверхность. Отсюда следует, что, каковы бы ни были точки A и B, расстояние между ними на поверхности не превосходит $\sqrt{1 + 2c^2}\, d$.

Так как поверхности Φ_n сходятся с касательными плоскостями к Ф, то функции $\varphi_n(x, y)$ сходятся равномерно с первыми производными к функции $\varphi(x, y)$. Поэтому при достаточно больших n

$$\left| \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} \right| < c \text{ и } \left| \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} \right| < c.$$

Отсюда, как и в случае поверхности Ф, заключаем, что расстояние между любыми двумя точками на поверхности Φ_n меньше $\sqrt{1 + 2c^2}\, d$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Надо показать, что при достаточно большом n расстояние между любыми двумя точками A и B на поверхности Ф отличается от расстояния между соответствующими точками A_n и B_n на поверхности Φ_n меньше, чем на ε.

По определению расстояния ρ существует кривая γ, соединяющая точки A и B на Ф такая, что

$$|l_\gamma - \rho(A, B)| < \varepsilon',$$

При достаточно больших n

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\varphi_n}{\partial x}\right|<\varepsilon'', \qquad \left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\varphi_n}{\partial y}\right|<\varepsilon''.$$

Используя легко проверяемое неравенство

$$|\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}|\leqslant\sqrt{|\alpha-\beta|},$$

заключаем, что

$$|l_\gamma-l_{\gamma_n}|<2\sqrt{c\varepsilon''}\,l_{\bar\gamma},$$

где l_{γ_n} — длина кривой γ_n на поверхности Φ_n, соответствующей кривой γ на Φ, а $l_{\bar\gamma}$ — длина проекции кривой γ на плоскость xy. Так как $l_{\bar\gamma}\leqslant l_\gamma$, то

$$|l_\gamma-l_{\gamma_n}|<2\sqrt{c\varepsilon''}\,l_\gamma.$$

Отсюда, так как l_γ отличается от $\rho(A,B)$ не более чем на ε', а $l_{\gamma_n}\geqslant\rho_n(A_n,B_n)$, то ввиду произвола ε' и ε'' заключаем:

$$\rho_n(A_n,\ B_n)-\rho(A,\ B)<\varepsilon.$$

Аналогично устанавливается неравенство

$$\rho(A,\ B)-\rho_n(A_n,\ B_n)<\varepsilon.$$

Для этого надо взять кривую γ_n на поверхности Φ_n, соединяющую точки A_n и B_n, такую, чтобы

$$|l_{\gamma_n}-\rho(A_n,\ B_n)|<\varepsilon',$$

а затем воспользоваться аналогичными рассуждениями. Утверждение доказано.

Теорема 1. *Поверхности ограниченной внешней кривизны суть многообразия ограниченной внутренней кривизны.*

Доказательство. Пусть Φ — поверхность ограниченной внешней кривизны и O — произвольная точка на этой поверхности. Введем в пространстве прямоугольные декартовы координаты, приняв точку O за начало координат, а касательную плоскость поверхности в этой точке — за плоскость xy. Тогда некоторая окрестность G точки O на поверхности допускает задание уравнением

$$z=\varphi(x,\ y),\quad a\leqslant x\leqslant b,\quad c\leqslant y\leqslant d.$$

Согласно теореме о приближении (§ 7) существует последовательность аналитических поверхностей Φ_n:

$$z=\varphi_n(x,\ y),\quad a\leqslant x\leqslant b,\quad c\leqslant x\leqslant d,$$

с равномерно ограниченными положительными кривизнами, сходящихся к Φ вместе с касательными плоскостями в области G. По доказанному метрики Φ_n сходятся к метрике Φ в G.

Возьмем на плоскости xy квадрат $\varkappa$ с центром в начале координат и стороной δ. Пусть A_n, B_n, C_n и D_n — точки на поверхности Φ_n, проектирующиеся в вершины квадрата $\varkappa$. Утверждается, что при малом δ для всех достаточно больших n четыре кратчайшие, соединяющие точки A_n, B_n, C_n и D_n на поверхности Φ_n, подобно тому как стороны квадрата $\varkappa$ соединяют его вершины, ограничивают гомеоморфную кругу область G_n^*, проекция которой на плоскость xy покрывает круг

$$x^2+y^2\leqslant\delta^*,$$

где δ^* — малое положительное число. Докажем это утверждение.

Пусть γ_n — одна из четырех кратчайших, например, соединяющая точки A_n и B_n. Покажем, что ее проекция на плоскость xy при малом δ и большом n проходит в λ-окрестности соответствующей стороны квадрата, причем λ мало в сравнении с δ. Если это неверно, то существует $\varepsilon>0$, последовательности чисел $\delta_k\to 0$ и поверхностей Φ_{n_k} такие, что проекция кратчайшей γ_{n_k} на плоскость xy выходит из $\delta\varepsilon$-окрестности соответствующей стороны квадрата. Но тогда длина кривой $\bar\gamma_{n_k}$ — проекции γ_{n_k} на плоскость xy — не меньше $(1+\varepsilon^2)\delta$. Тем более

$$l(\gamma_{n_k})>(1+\varepsilon^2)\,\delta.$$

С другой стороны, длина кривой, соединяющей точки A_{n_k} и B_{n_k} на Φ_{n_k} и проектирующейся на сторону квадрата, как показано выше, не превосходит

$$\sqrt{1+2c^2}\,\delta,$$

где c — максимум модулей производных $\partial\varphi_{n_k}/\partial x$ и $\partial\varphi_{n_k}/\partial y$ в квадрате $\varkappa$. А так как в точке O по условию $\partial\varphi/\partial x=\partial\varphi/\partial y=0$, то при малом δ и достаточно большом n_k

$$\sqrt{1+2c^2}\,\delta<(1+\varepsilon^2)\,\delta.$$

Мы пришли к противоречию. Итак, при малом δ для достаточно больших n проекция кратчайшей γ_n на плоскость xy проходит в λ-окрестности соответствующей стороны квадрата $\varkappa$, причем λ мало в сравнении с δ.

Пусть δ так мало, что λ можно брать равным $\delta/4$. Покажем, что кратчайшие, соединяющие точки A_n, B_n, C_n, D_n, образуют простую, а следовательно, ограничивающую гомеоморфную кругу область кривую. Для этого заметим прежде всего, что кратчайшие $\gamma_{A_nB_n}$ и $\gamma_{C_nD_n}$, равно как и кратчайшие $\gamma_{A_nD_n}$ и $\gamma_{B_nC_n}$, не имеют общих точек. Это очевидно, так как в противном случае пересекались бы их проекции на плоскость xy, что невозможно $(\lambda=\delta/4)$.

Легко видеть далее, что кратчайшие $\gamma_{A_nD_n}$ и $\gamma_{A_nB_n}$ имеют только одну общую точку A_n. Действительно, в противном случае по свойству неналегания кратчайших на регулярной поверхности одна из кратчайших должна содержать другую. Но это невозможно, так как проекция каждой кратчайшей должна быть в $\delta/4$-окрестности соответствующей стороны квадрата.

Аналогичные заключения можно сделать и о других парах кратчайших: $\gamma_{B_nA_n}$ и $\gamma_{B_nC_n}$, $\gamma_{C_nB_n}$ и $\gamma_{D_nC_n}$, $\gamma_{D_nB_n}$ и $\gamma_{D_nA_n}$.

Итак, четыре кратчайшие $\gamma_{A_nB_n}, \ldots, \gamma_{D_nA_n}$ образуют замкнутую кривую, ограничивающую гомеоморфную кругу область G_n^* на поверхности Φ_n. Проекция каждой из областей G_n^* на плоскость xy покрывает круг

$$x^2+y^2 \leqslant (\delta/4)^2,$$

так как проекция каждой из кратчайших, ограничивающих область G_n^*, проходит на расстоянии, не меньшем $\delta/4$, от точки O.

По теореме о приближении положительные кривизны поверхностей Φ_n ограничены некоторой постоянной C. Тем более этой постоянной ограничены положительные кривизны поверхностей Φ_n в областях G_n^*.

По теореме Гаусса — Боннэ абсолютное значение полной кривизны каждого четырехугольника G_n^* не превосходит 4π. Отсюда следует, что отрицательные кривизны областей G_n^* ограничены постоянной $4\pi+C^+$. Таким образом, абсолютные кривизны областей G_n на поверхностях Φ_n ограничены числом $4\pi+2C^+$. Тем более эта оценка имеет место для частей $\tilde{\Phi}_n$ поверхностей Φ_n, которые проектируются на круг

$$x^2+y^2 < \delta^2/16,$$

Так как абсолютные кривизны поверхностей $\tilde{\Phi}_n$ равномерно ограничены, то предельная поверхность $\tilde{\Phi}$ — область на поверхности Φ, проектирующаяся в круг $x^2+y^2<\delta^2/16$ — есть многообразие ограниченной кривизны. Точка O на поверхности Φ была взята произвольно, поэтому вся поверхность Φ является многообразием ограниченной кривизны. Теорема доказана.

§ 9. Связь между внутренней и внешней кривизной поверхности. Теорема Гаусса

Для случая регулярных поверхностей теорема Гаусса о сферическом изображении, как известно, устанавливает связь между интегральной кривизной произвольной области на поверхности и площадью ее сферического изображения. В настоящем

параграфе соответствующая теорема будет доказана для поверхностей ограниченной внешней кривизны. Доказательству этой теоремы предпошлем ряд лемм.

Лемма 1. *Пусть F — поверхность ограниченной внешней кривизны, G — любое открытое множество на ней с границей γ, принадлежащей поверхности (поверхность предполагается открытой), и H — любое замкнутое множество, содержащееся в G. Пусть сферические изображения множества G и его границы не пересекаются.*

Тогда существует бесконечная последовательность открытых множеств $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$, содержащих H и содержащихся в G и удовлетворяющих условиям:

1) *каждое множество G_k состоит из конечного числа областей (вообще говоря, многосвязных), ограниченных простыми кривыми;*

2) *сферическое изображение $\bar{\gamma}_k$ границы γ_k любого множества G_k имеет площадь, равную нулю;*

3) *полные прообразы множеств $\bar{\gamma}_i$ и $\bar{\gamma}_j$ в G не пересекаются.*

Доказательство. Не ограничивая возможностей использования леммы, можно считать, что поверхность F однозначно проектируется на плоскость xy. Разобьем плоскость xy на малые квадраты δ и обозначим F^δ замкнутый кусок поверхности, который проектируется в квадрат δ. Пусть M^δ — замкнутое множество, которое состоит из кусков F^δ, пересекающихся с границей γ области G.

Если квадраты δ достаточно малы, сферические изображения H и M^δ не пересекаются.

Открытое множество $G - M^\delta$ состоит из конечного числа областей (вообще говоря, многосвязных), ограниченных простыми кривыми. Приблизим контуры каждой из областей простыми кривыми с нулевой площадью сферического изображения. Сумму полученных областей обозначим G_1. Очевидно, операцию приближения границ можно проделать так, что G_1 будет содержать H и сферические изображения H и $G - G_1$ не будут пересекаться.

Построим G_2. Пусть M_1 — множество тех точек G, сферические изображения которых принадлежат сферическому изображению $G - G_1$. По построению $M_1 \cap H = 0$. Множество G_2 строится точно так же, как G_1, только роль G теперь будет играть $G_1 - M_1$. Допустим, множество G_2 построено. Пусть M_2 — множество тех точек G, сферические изображения которых принадлежат сферическому изображению $G - G_2$; $M_2 \cap H = 0$. Дальше строится тем же способом множество G_3 и т. д.

Очевидно, построенная таким образом последовательность множеств G_k обладает указанными в лемме свойствами 1), 2), 3). Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть F — поверхность ограниченной внешней кривизны и G — открытое множество на ней, удовлетворяющее условиям леммы 1. Пусть F_n — последовательность регулярных поверхностей с равномерно ограниченными абсолютными кривизнами, сходящихся к F вместе со сферическими изображениями.*

Тогда, каково бы ни было $\varepsilon>0$, среди открытых множеств G_k, существование которых устанавливается леммой 1, найдется такое, что для бесконечного множества значений n

$$|\sigma(G_k)-\sigma(G_k^n)|<\varepsilon,$$

где G_k^n множество на поверхности F_n, соответствующее G_k.

Доказательство. Чтобы упростить запись, будем предполагать, что каждое G_k состоит из одной гомеоморфной кругу области, ограниченной кривой γ_k. Тогда для полных кривизн областей G_k и G_k^n поверхностей F и F_n имеем представления

$$\sigma(G_k)=\int\limits_{\omega} q_{\bar\gamma_k}(Y)\,dY, \quad \sigma(G_k^n)=\int\limits_{\omega} q_{\bar\gamma_k^n}(Y)\,dY,$$

где q обозначает степень произвольной точки единичной сферы относительно соответствующей кривой, а dY — элемент площади сферы.

Обозначим $\delta_{\bar\gamma_k}$ и $\delta_{\bar\gamma_k^n}$ соответственно δ-окрестности кривых $\bar\gamma_k$ и $\bar\gamma_k^n$. Тогда в силу равномерной сходимости сферических изображений, из которой вытекает равномерная сходимость $\bar\gamma_k^n$ к $\bar\gamma_k$ при $n\to\infty$, следует:

$$\int\limits_{\omega-\delta_{\bar\gamma_k^n}} q_{\bar\gamma_k^n}(Y)\,dY \to \int\limits_{\omega-\delta_{\bar\gamma_k}} q_{\bar\gamma_k}(Y)\,dY.$$

Пусть $\tilde\gamma_k$ — полный прообраз кривой $\bar\gamma_k$ на поверхности F. Абсолютная кривизна $\tilde\gamma_k$ равна нулю, так как $\tilde\gamma_k$ имеет своим сферическим изображением кривую $\bar\gamma_k$, площадь которой равна нулю. Пусть U — открытое множество, содержащее $\tilde\gamma_k$ и такое, что абсолютная кривизна его сколь угодно мала. При достаточно малом δ полный прообраз $\tilde\delta_{\bar\gamma_k}$ множества $\delta_{\bar\gamma_k}$ содержится внутри U, а следовательно, его абсолютная кривизна сколь угодно мала.

Величина

$$\left|\int\limits_{\delta_{\bar\gamma_k}} q_{\bar\gamma_k}(Y)\,dY\right|$$

не превосходит абсолютной кривизны $\tilde{\delta}_{\overline{\gamma}_k}$, так как для почти всех Y

$$q_{\overline{\gamma}_k}(Y) = n^+(Y) - n^-(Y),$$

где $n^+(Y)$ — число эллиптических, а $n^-(Y)$ — число гиперболических точек в $\tilde{\delta}_{\overline{\gamma}_k}$, имеющих своим сферическим изображением Y. Следовательно,

$$\Big|\int\limits_{\delta_{\overline{\gamma}_k}} q_{\overline{\gamma}_k}(Y)\, dY\Big| \to 0 \text{ при } \delta \to 0.$$

Если при этом найдутся сколь угодно большие n, для которых

$$\Big|\int\limits_{\delta_{\overline{\gamma}_k^n}} q_{\overline{\gamma}_k^n}(Y)\, dY\Big| < \frac{\varepsilon}{2},$$

то G_k и есть то множество, существование которого утверждается леммой.

Допустим, утверждение леммы неверно. Тогда, каково бы ни было k и $\delta > 0$, для всех достаточно больших n

$$\Big|\int\limits_{\delta_{\overline{\gamma}_k^n}} q_{\overline{\gamma}_k^n}(Y)\, dY\Big| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть m — любое натуральное число. Так как множества $\tilde{\gamma}_k$ попарно не пересекаются, то при достаточно малом δ множества $\tilde{\delta}_{\overline{\gamma}_k^n}$, $k = 1, 2, \ldots, m$, также попарно не пересекаются. При достаточно большом n абсолютная кривизна каждого множества $\tilde{\delta}_{\overline{\gamma}_k^n}$ $(k \leqslant m)$ больше $\varepsilon/2$. Поэтому абсолютная кривизна F_n для достаточно больших n больше $m\frac{\varepsilon}{2}$. Но это невозможно, так как m произвольно, а абсолютные кривизны поверхностей F_n равномерно ограничены по условию. Мы пришли к противоречию. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть F — поверхность ограниченной внешней кривизны и G — открытое множество на ней, удовлетворяющее условиям леммы 1. Пусть F_n — последовательность регулярных поверхностей с равномерно ограниченными положительными и отрицательными кривизнами, сходящихся к F вместе со сферическими изображениями.*

Тогда, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, среди областей G_k, построенных в лемме 1, есть такая, что найдутся сколь угодно большие n, для которых

$$|\omega(G_k) - \omega(G_k^n)| < \varepsilon,$$

Доказательство. По гомеоморфизму, определяющему сходимость F_n к F, кривизны поверхностей F_n можно рассматривать как функции множеств на поверхности F. Именно, если E — произвольное множество на F и E_n — соответствующее ему множество на F_n, то положим

$$\omega_n(E) = \omega(E_n),\ \omega_n^+(E) = \omega^+(E_n),\ \omega_n^-(E) = \omega^-(E_n).$$

Допустим, у полного прообраза $\tilde{\gamma}_k$ кривой $\overline{\gamma}_k$ есть δ-окрестность $\delta_{\tilde{\gamma}_k}$ такая, что найдутся сколь угодно большие n, для которых

$$\begin{aligned} &\omega^+(\delta_{\tilde{\gamma}_k}) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \omega^-(\delta_{\tilde{\gamma}_k}) < \frac{\varepsilon}{2}, \\ &\omega_n^+(\delta_{\tilde{\gamma}_k}) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \omega_n^-(\delta_{\tilde{\gamma}_k}) < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{*}$$

Покажем, что тогда найдутся сколь угодно большие n, для которых

$$|\omega(G^k) - \omega_n(G^k)| < \varepsilon.$$

Действительно, не ограничивая общности, можно считать, что полные внутренние кривизны F_n слабо сходятся к полной кривизне F. Это значит, что, какова бы ни была непрерывная функция f, заданная на поверхности F,

$$\int_F f\,d\omega_n \to \int_F f\,d\omega.$$

Возьмем в качестве f функцию, определяемую условиями:

$$\begin{gathered} f(X) = 1, \text{ если } X \subset G_k - \delta_{\tilde{\gamma}_k}, \\ f(X) = 0, \text{ если } X \subset F - G_k - \delta_{\tilde{\gamma}_k}, \\ f(X) = \frac{\mu(X)}{\lambda(X) + \mu(X)}, \text{ если } X \subset \delta_{\tilde{\gamma}_k}. \end{gathered}$$

Функция f, очевидно, непрерывна.

При достаточно больших n, удовлетворяющих неравенствам (*),

$$\left|\int_F f\,d\omega_n - \omega_n(G_k)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left|\int_F f\,d\omega - \omega(G_k)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда следует, что для таких достаточно больших n

$$|\omega(G_k) - \omega_n(G_k)| < \varepsilon.$$

Таким образом, если предположение о существовании δ-окрестности множества $\tilde{\gamma}_k$ имеет место, то область G_k обладает нужным свойством.

Допустим, указанное предположение не имеет места ни для какой кривой $\tilde{\gamma}_k$. Тогда для любого $\delta>0$ и любого k при достаточно большом n по крайней мере одно из чисел $\omega^+\left(\delta_{\tilde{\gamma}_k}\right)$, $\omega^-\left(\delta_{\tilde{\gamma}_k}\right)$, $\omega_n^+\left(\delta_{\tilde{\gamma}_k}\right)$ или $\omega^-\left(\delta_{\tilde{\gamma}_k}\right)$ будет не меньше $\varepsilon/2$.

Пусть m — любое натуральное число. Возьмем δ настолько малым, чтобы множества $\delta_{\tilde{\gamma}_k}$ $(k\leqslant m)$ не пересекались. Положим

$$M=\delta_{\tilde{\gamma}_1}+\delta_{\tilde{\gamma}_2}+\ldots+\delta_{\tilde{\gamma}_m}.$$

Тогда найдутся такие n, что по крайней мере одно из чисел

$$\omega^+(M),\quad \omega^-(M),\quad \omega_n^+(M),\quad \omega_n^-(M)$$

будет не меньше $m\frac{\varepsilon}{8}$. Но это невозможно, так как m произвольно, а функции множеств равномерно ограничены. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть F — поверхность ограниченной внешней кривизны и G — открытое множество на ней с границей γ, принадлежащей поверхности. Пусть сферические изображения G и γ не пересекаются.*

Тогда, если последовательность регулярных поверхностей F_n с равномерно ограниченными абсолютными кривизнами сходится к F вместе со сферическими изображениями, то, каково бы ни было замкнутое множество $H\subset G$ и число $\varepsilon>0$, существует открытое множество G^*, содержащее H и содержащееся в G, такое, что найдутся сколь угодно большие n, для которых

$$|\sigma(G^*)-\sigma(G^{*n})|<\varepsilon,\quad |\omega(G^*)-\omega(G^{*n})|<\varepsilon.$$

Доказательство. Построим последовательность открытых множеств G_k по лемме 1. По лемме 2 найдется такое G_{k_1}, что для бесконечного множества значений n

$$\left|\sigma\left(G_{k_1}\right)-\sigma\left(G_{k_1}^n\right)\right|<\varepsilon.$$

Если в последовательности G_k опустить G_{k_1}, то найдется второе множество G_{k_2} и т. д. Одним словом, существует бесконечное число множеств G_{k_s}, обладающих этим свойством. Среди множеств G_{k_s} по лемме 3 найдется такое, что для бесконечного множества значений n будет

$$\left|\sigma\left(G_{k_s}\right)-\sigma\left(G_{k_s}^n\right)\right|<\varepsilon,\quad \left|\omega\left(G_{k_s}\right)-\omega\left(G_{k_s}^n\right)\right|<\varepsilon.$$

Множество G_{k_s} и есть то открытое множество G^*, существование которого утверждается леммой. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть G — малая область на поверхности F ограниченной внешней кривизны, γ — ее граница, $\overline{\gamma}$ — сферическое изображение γ и $\tilde{\gamma}$ — его полный прообраз в G.*

Тогда полная внутренняя и полная внешняя кривизны открытого множества $G - \tilde{\gamma}$ равны.

Доказательство. Пусть H — замкнутое множество в $G - \tilde{\gamma}$, удовлетворяющее условиям

$$|\sigma^0(G-\tilde{\gamma}) - \sigma^0(H)| < \varepsilon, \quad |\omega^0(G-\tilde{\gamma}) - \omega^0(H)| < \varepsilon,$$

где ε — любое положительное число.

Построим последовательность аналитических поверхностей F_n с равномерно ограниченными абсолютными кривизнами, сходящихся к F вместе со сферическими изображениями. По лемме 4 предыдущего параграфа существует открытое множество G^*, содержащееся в $G - \tilde{\gamma}$ и содержащее H, такое, что

$$|\sigma(G^*) - \sigma(G^{n*})| < \varepsilon, \quad |\omega(G^*) - \omega(G^{n*})| < \varepsilon.$$

По выбору H

$$|\sigma(G^*) - \sigma(G-\tilde{\gamma})| < \varepsilon, \quad |\omega(G^*) - \omega(G-\tilde{\gamma})| < \varepsilon.$$

Так как на поверхности F_n в силу теоремы Гаусса

$$\sigma(G^{n*}) = \omega(G^{n*}),$$

то из полученных выше четырех неравенств немедленно заключаем:

$$|\sigma(G-\tilde{\gamma}) - \omega(G-\tilde{\gamma})| < 4\varepsilon.$$

А так как ε произвольно, то

$$\sigma(G-\tilde{\gamma}) = \omega(G-\tilde{\gamma}).$$

Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть площадь сферического изображения границы γ открытого множества G равна нулю.*

Тогда

$$\omega(G) \leqslant \sigma(G).$$

Доказательство. Пусть $\tilde{\gamma}$ — полный прообраз сферического изображения γ. По лемме 5

$$\sigma(G-\tilde{\gamma}) = \omega(G-\tilde{\gamma}),$$

но

$$\sigma(G-\tilde{\gamma}) = \sigma(G).$$

Таким образом, достаточно показать, что

$$\omega(G) \leqslant \omega(G - \tilde{\gamma}).$$

Пусть $\delta_{\tilde{\gamma}}$ есть δ-окрестность множества $\tilde{\gamma}$. Соответствующие множества на поверхностях F_n, сходящихся к данной (§ 7), имеют сколь угодно малые положительные кривизны, если достаточно мало δ. Поэтому положительная внутренняя кривизна предельной поверхности на множестве $\delta_{\tilde{\gamma}}$ мала, если мало δ. Следовательно, полная внутренняя кривизна множества $G \cap \tilde{\gamma}$ неположительна и в силу полной аддитивности ω

$$\omega(G) \leqslant (G - \tilde{\gamma}).$$

Лемма доказана.

Лемма 7. *Для любого борелевского множества H на поверхности ограниченной внешней кривизны*

$$\omega(H) \leqslant \sigma(H).$$

Доказательство. Докажем сначала утверждение леммы для любого открытого множества G. Леммой 6 это установлено только для достаточно малых открытых множеств, так как при этом мы пользовались регулярным приближением поверхности, которое получено лишь для достаточно малых кусков поверхности.

Возьмем в G замкнутое множество F такое, чтобы абсолютные внутренняя и внешняя кривизны множества $G - F$ были меньше ε. Разобьем пространство на малые кубы плоскостями, параллельными координатным плоскостям, так, чтобы абсолютные внутренняя и внешняя кривизны множества точек поверхности, лежащих на плоскостях разбиения, были равны нулю. Это легко осуществимо благодаря ограниченности и полной аддитивности абсолютных кривизн.

Если кубы достаточно малы, то к каждому куску поверхности, содержащемуся внутри одного куба, применима лемма 6.

Пусть G^* состоит из тех кусков поверхности разбиения ее кубами, каждый из которых содержит точки F. Очевидно, если стороны кубов малы, то $F \subset G^* \subset G$. Из полной аддитивности полных кривизн и леммы 6 заключаем:

$$\omega(G^*) \leqslant \sigma(G^*).$$

И так как

$$|\omega(G) - \omega(G^*)| < \varepsilon, \quad |\sigma(G) - \sigma(G^*)| < \varepsilon,$$

а ε произвольно, то

$$\omega(G) \leqslant \sigma(G).$$

То, что это неравенство имеет место для любого борелевского множества, а не только для открытого, следует из общих теорем об аддитивных функциях множеств. Лемма доказана.

Лемма 8. *Если для борелевского множества H на поверхности ограниченной внешней кривизны*

$$\omega(H)=\sigma(H),$$

то для любого его борелевского подмножества H'

$$\omega(H')=\sigma(H').$$

Действительно, по лемме 7

$$\omega(H')\leqslant\sigma(H'),\qquad \omega(H-H')\leqslant\sigma(H-H').$$

Отсюда, принимая во внимание аддитивность функций ω, σ и равенство

$$\omega(H)=\sigma(H),$$

заключаем:

$$\omega(H')=\sigma(H').$$

Теорема 1. *Каждая регулярная точка X поверхности ограниченной внешней кривизны имеет окрестность такую, что для любого борелевского множества H из этой окрестности*

$$\omega(H)=\sigma(H).$$

Доказательство. Так как точка X регулярная, то она имеет окрестность G такую, что ни в G, ни на ее границе γ нет точек с касательными плоскостями, параллельными касательной плоскости в X. Пусть $\bar{\gamma}$ — сферическое изображение границы G и $\tilde{\gamma}$ — его полный прообраз на поверхности. Открытое множество $G-\tilde{\gamma}$ содержит точку X и, следовательно, является окрестностью этой точки.

По лемме 5

$$\omega(G-\tilde{\gamma})=\sigma(G-\tilde{\gamma}).$$

А тогда по лемме 8 для любого борелевского множества $H\subset G-\tilde{\gamma}$

$$\omega(H)=\sigma(H).$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *На поверхности ограниченной внешней кривизны существует открытое множество G, содержащее все регулярные точки, такое, что для любого его борелевского подмножества H*

$$\omega(H)=\sigma(H).$$

В частности, если поверхность квазирегулярна, т. е. все точки поверхности регулярны, то это имеет место для любого H.

Доказательство. Пусть $G(X)$ — окрестность регулярной точки X, существование которой гарантируется теоремой 1. Положим

$$G = \sum_{(X)} G(X),$$

где суммирование ведется по всем регулярным точкам поверхности. Среди окрестностей $G(X)$ существует счетное множество таких, которые покрывают все G. Пусть $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$ — эти окрестности и H — любое борелевское множество, принадлежащее G. Положим

$$H_k = H \cap (G_k - G_{k-1} - \ldots - G_1).$$

Очевидно,

$$H_k \subset G_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} H_k = H.$$

В силу теоремы 1 и полной аддитивности ω и σ

$$\omega(H) = \sigma(H).$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Для любого борелевского множества H на замкнутой поверхности ограниченной внешней кривизны*

$$\omega(H) = \sigma(H).$$

Доказательство. Полная внутренняя и полная внешняя кривизны замкнутой поверхности ограниченной внешней кривизны равны $2\pi\chi$, где χ — эйлерова характеристика поверхности. По лемме 8 отсюда следует, что равенство полной внутренней и полной внешней кривизны имеет место для любого борелевского множества на поверхности. Теорема доказана.

Теорема 4. *На поверхности F ограниченной внешней кривизны для любого борелевского множества H*

$$\omega^+(H) = \sigma^+(H), \qquad \omega^-(H) = \sigma^-(H).$$

Доказательство. Пусть E — множество эллиптических точек поверхности. Тогда $\omega^+(F - E) = 0$. В самом деле, если бы это было не так, то нашлось бы множество $M \subset F - E$, для которого $\omega(M) > 0$, но это невозможно, так как $\sigma(M) = 0$, а $\omega(M) \leqslant \sigma(M)$.

С другой стороны, $\omega^-(E) = 0$, так как в противном случае нашлось бы в E такое множество N, для которого $\omega^-(N) < 0$. Но так как $N \subset E$, то $\omega(N) = \sigma(N) > 0$.

А теперь

$$\sigma^+(F) = \sigma(E) = \omega(E) = \omega^+(\Phi).$$

По лемме 8 отсюда для любого H получаем

$$\sigma^{+}(H)=\omega^{+}(H).$$

А так как

$$\sigma(H)\geqslant\omega(H),$$

то

$$\omega^{-}(H)\leqslant\sigma^{-}(H).$$

Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть F — поверхность ограниченной внешней кривизны и X — произвольная точка на ней. Тогда существует окрестность U точки X и бесконечная последовательность аналитических поверхностей F_n такие, что:*

1. Поверхности F_n сходятся к F в U вместе со сферическими изображениями.

2. Положительные внешние кривизны F_n слабо сходятся к положительным внешним кривизнам F в U.

3. Положительные, отрицательные и полные внутренние кривизны F_n слабо сходятся к соответствующим кривизнам F в U.

Если точка X регулярная, то отрицательные и полные внешние кривизны F_n также слабо сходятся к соответствующим кривизнам F в U.

Доказательство. По доказанному ранее можно считать, что последовательность F_n обладает свойствами 1 и 2, а также имеет место слабая сходимость полных внутренних кривизн F_n к полной внутренней кривизне F.

По теореме 4 для F_n должна иметь место слабая сходимость и положительных внутренних кривизн, а следовательно, и отрицательных внутренних кривизн (так как полные и положительные кривизны слабо сходятся).

По тем же соображениям в случае регулярной точки X отрицательные и полные внешние кривизны F_n должны сходиться к соответствующим кривизнам F. Теорема доказана.

Рассмотрим поверхности с неотрицательной внутренней и ограниченной внешней кривизной. Начнем с поверхностей нулевой внутренней кривизны, т. е. поверхностей, у которых положительная и отрицательная внутренние кривизны равны нулю. На такой поверхности не может быть ни эллиптических, ни гиперболических точек.

Действительно, если на поверхности есть гиперболическая точка, то отрицательная внешняя кривизна поверхности отлична от нуля. Следовательно, на поверхности существует бесчисленное множество гиперболических точек, причем площадь их сферического изображения отлична от нуля.

На множестве гиперболических точек поверхности имеет место равенство полной внутренней и полной внешней кривизны.

И так как внешняя кривизна заведомо отрицательна, то и внутренняя отрицательна. Но это невозможно, так как полная кривизна на любом множестве точек поверхности должна быть равна нулю. Таким образом, на поверхности с нулевой внутренней кривизной не может быть гиперболических точек.

Аналогично устанавливается, что на поверхности с нулевой внутренней кривизной не может быть эллиптических точек. Поэтому положительная и отрицательная внешние кривизны такой поверхности равны нулю. Отсюда с помощью теорем § 4 получаем:

Теорема 6. *Поверхность ограниченной внешней и нулевой внутренней кривизны развертывающаяся (т. е. локально изометрична плоскости). Она имеет обычное для регулярных развертывающихся поверхностей строение с прямолинейными образующими и стационарной касательной плоскостью вдоль каждой образующей.*

Теорема 7. *Полная поверхность с нулевой внутренней и ограниченной внешней кривизной цилиндрическая.*

Рассмотрим теперь поверхности, у которых положительная внутренняя кривизна отлична от нуля, а отрицательная равна нулю. На такой поверхности не может быть гиперболических точек. Доказывается это дословно такими же рассуждениями, как и в случае поверхностей нулевой кривизны.

Таким образом, поверхности неотрицательной внутренней кривизны являются также поверхностями неотрицательной внешней кривизны. Поэтому для них имеют место соответствующие теоремы (§ 5).

Теорема 8. *Поверхность с неотрицательной (не равной нулю) внутренней и ограниченной внешней кривизной с краем, лежащим в плоскости, есть выпуклая поверхность, т. е. является областью на границе выпуклого тела.*

Теорема 9. *Полная поверхность с ограниченной внешней кривизной и неотрицательной внутренней кривизной (не равной нулю) есть либо замкнутая выпуклая поверхность, либо бесконечная выпуклая поверхность.*

Как отмечалось в начале настоящей главы, Нэш и Кейпер указали изометрические погружения класса C^1 заданного двумерного многообразия с регулярной метрикой, отличающиеся большим произволом [53], [39]. Из этих работ следует, в частности, возможность изометрического преобразования сферы в гладкую поверхность F сколь угодно малого диаметра. Это указывает на то, что гладкость поверхности представляет собой слишком слабое условие для того, чтобы между внутренней метрикой поверхности и ее внешней формой существовали достаточно сильные связи. Дело существенно меняется, если простую гладкость заменить двукратной дифференцируемостью.

Возникает естественный вопрос, при каких значениях $\alpha>0$ в классе поверхностей $C^{1,\alpha}$ связи между внутренней метрикой и внешней формой поверхности так же богаты, как и для регулярных, дважды дифференцируемых поверхностей, а при каких α эти связи ослабевают в такой же степени, как и для поверхностей класса C^1? Этот вопрос исследовался в цикле работ Ю. Ф. Борисова [24]. Основной результат исследований Борисова составляет следующая теорема.

Всякая поверхность класса $C^{1,\alpha}$ с внутренней метрикой знакопостоянной кривизны (кривизна всех открытых множеств отлична от нуля и одного знака) является поверхностью ограниченной внешней кривизны при любом $\alpha>\frac{2}{3}$. Напротив, при достаточно малых α $\left(\text{например, } \alpha<\frac{1}{13}\right)$ даже аналитичность метрики не влечет за собой ограниченность внешней кривизны.

Из этой теоремы и результатов § 5 следует, что поверхность класса $C^{1,\alpha}$, $\alpha>{}^2/_3$, с положительной внутренней кривизной является локально выпуклой. Далее, применение теоремы о регулярности выпуклой поверхности с регулярной метрикой дает: если поверхность класса $C^{1,\alpha}$ при $\alpha>\frac{2}{3}$ имеет регулярную метрику и положительную гауссову кривизну, то поверхность регулярна. Как уже отмечалось, при достаточно малом α даже аналитичность метрики не влечет за собой регулярность поверхности.

Дополнение

Некоторые нерешенные вопросы

Молодые геометры часто испытывают затруднение в выборе тем для исследования. В этой связи в настоящем Дополнении мы предлагаем некоторые вопросы. В ряде случаев решение намечено или указаны подходы к решению.

1. Доказать следующее утверждение: сферическое изображение геодезической на выпуклой поверхности есть спрямляемая кривая, т. е. каждая внутренняя точка геодезической имеет окрестность, сферическое изображение которой имеет конечную длину.

Предлагается следующий подход к доказательству. Прежде всего замечаем, что спрямляемость достаточно показать для сферического изображения каждого достаточно малого отрезка кратчайшей. Поэтому выпуклую поверхность можно считать замкнутой. Ее всегда можно дополнить до замкнутой с сохранением свойства малого отрезка кратчайшей оставаться кратчайшим. Далее можно считать, что рассматриваемая кратчайшая продолжается кратчайшей хотя бы за один из ее концов. Это верно для каждого отрезка кратчайшей. Итак, можно считать, что речь идет о кратчайшей γ на замкнутой выпуклой поверхности F и кратчайшая γ продолжается в виде кратчайшей за один из ее концов.

Построим последовательность многогранников P_n, сходящуюся к поверхности F. Не ограничивая общности, можно считать, что концы A и B кратчайшей принадлежат многогранникам P_n. Пусть γ_n — кратчайшая на многограннике P_n, соединяющая точки A и B. По свойству неналегания кратчайших (§ 3 гл. I) последовательность кратчайших γ_n сходится к γ. Сферические изображения γ_n^* кратчайших γ_n сходятся к сферическому изображению γ^* кратчайшей γ. Теперь для доказательства спрямляемости γ^* достаточно показать, что длины кривых γ_n^* ограничены в совокупности.

Пусть α_1, α_2, ... — грани многогранника P_n, по которым проходит кратчайшая γ_n, E_1, E_2, ... — полупространства, определяемые плоскостями α_1, α_2, ..., содержащими грани многогранника P_n. Пересечение полупространств E_n есть телесный многогранник P_n'. Пусть T — куб, содержащий все многогран-

ники P_n. Пересечение куба T и многогранника P'_n есть некоторый многогранник Q_n, содержащийся в кубе T. На многограннике Q_n лежит кратчайшая γ_n многогранника P_n. Так как P_n содержится внутри Q_n, то γ_n будет кратчайшей на Q_n (по теореме Буземана).

Пусть $k_1, k_2, \ldots$ — ребра многогранника Q_n, которые пересекает кратчайшая γ_n; $\delta_1, \delta_2, \ldots$ — их длины и $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots$ — внешние углы при ребрах $k_1, k_2, \ldots$ Тогда длина сферического изображения γ_n, т. е. длина γ_n^*, будет равна $s_n = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots$ Величина $\vartheta_1\delta_1 + \vartheta_2\delta_2 + \ldots$ оценивается через интеграл средней кривизны для многогранника Q_n, а следовательно, через ребро куба T, содержащего Q_n. Отсюда следует, что если все ребра $\delta_k > c_0 > 0$, то

$$s_n \leqslant \frac{C\,(T)}{c_0}.$$

Предположим теперь, что у многогранника Q_n есть ребра k_s длины меньше ε_n, и сумма внешних углов ϑ_s при этих ребрах больше σ_n, причем $\varepsilon_n \to 0$, а $\sigma_n \to \infty$, когда $n \to \infty$. Утверждается, что при достаточно большом n кривая γ_n не может быть кратчайшей на Q_n. Причина в том, что при малом ε_n и большом σ_n вблизи кратчайшей γ_n будет сосредоточена значительная кривизна. И поэтому на γ_n не может достигаться абсолютный минимум длин кривых, соединяющих точки A и B на многограннике Q_n.

2. Доказать следующую теорему.

Выпуклая, гомеоморфная кругу поверхность с неотрицательным (неположительным) поворотом вдоль края непрерывно изгибается в любую изометричную ей поверхность.

Подход к доказательству. Рассмотрим сначала случай многогранника. Пусть P_1 — выпуклый, гомеоморфный кругу многогранник, у которого углы при граничных вершинах $\geqslant \pi$ (поворот вдоль края неположительный); P_2 — выпуклый многогранник, изометричный P_1. Покажем, что P_1 непрерывно изгибается в P_2. Построим выпуклые оболочки Q_1 и Q_2 многогранников P_1 и P_2. Они представляют собой замкнутые многогранники. Многогранник Q_i состоит из многогранника P_i и некоторого многогранника P'_i, изометричного плоскому выпуклому многоугольнику. Пусть A и B — две вершины многогранника Q_i, принадлежащие краю многогранника P_i; α и β — кривизны в этих вершинах. Соединим вершины A и B кратчайшей γ внутри области P'_i. Это можно сделать ввиду выпуклости области. Возьмем теперь два плоских треугольника с основанием l, равным длине кратчайшей γ, и углами при основании $\alpha' \leqslant \alpha$, $\beta' \leqslant \beta$. Склеим эти треугольники по боковым сторонам, а стороны оснований подклеим к разрезу многогранника Q_i по кратчайшей γ.

По теореме о склеивании существует замкнутый многогранник Q'_i, который реализует многогранную метрику, получаемую при подклеивании треугольников к разрезу. При непрерывном изменении углов α' и β' от нуля до α и β соответственно многогранник Q'_i непрерывно деформируется (из-за однозначной определенности). Часть многогранника Q'_i, соответствующая по изометрии P_i, испытывает при этой деформации непрерывное изгибание.

После этого берем две другие вершины на границе многогранника P_i или одну вершину на границе, а в качестве другой — вершину, появившуюся в результате подклеивания треугольников, соединяем их кратчайшей, разрезам многогранник по этой кратчайшей и в разрез снова вклеиваем два треугольника. Конечным числом таких операций разрезания и вклеивания мы переведем исходный многогранник Q_i в некоторый многогранник $\bar{Q}_i$, состоящий из многогранника, изометричного P_i и некоторого многогранника $\tilde{P}_i$, изометричного конусу. Края многогранников $\tilde{P}_1$ и $\tilde{P}_2$ имеют одинаковые повороты. Отсюда нетрудно заключить, что они изометричны. После этого из однозначной определенности многогранников следует равенство многогранников $\bar{Q}_1$ и $\bar{Q}_2$, а значит, и равенство их частей, соответствующих по изометрии P_1 и P_2. Таким образом, путем непрерывного изгибания исходные многогранники P_1 и P_2 переведены в равные. Следовательно, существует непрерывное изгибание, переводящее их друг в друга.

Для того чтобы от случая многогранников перейти к общим выпуклым поверхностям, надо воспользоваться возможностью одновременного приближения изометричных выпуклых поверхностей изометричными многогранниками и однозначной определенностью общих выпуклых поверхностей.

Пусть теперь углы при граничных вершинах многогранников P_i не больше π. Снова образуем выпуклые оболочки Q_i. Пусть $\bar{P}_i$ — многогранник, дополняющий P_i до замкнутого многогранника Q_i. Для того чтобы доказать возможность непрерывного изгибания P_1 в P_2, достаточно показать, что $\bar{P}_1$ можно непрерывно деформировать в $\bar{P}_2$, удовлетворяя условиям подклеивания к P_1 в каждый момент деформации. К этому и сводятся дальнейшие построения.

Путем разрезания и вклеивания треугольников можно преобразовать многогранник Q_i в некоторый многогранник $\tilde{Q}_i$, содержащий область $\tilde{P}_i$, изометричную $\bar{P}_i$, и на оставшейся части V_i изометричный конусу (рис. 35). После этого разворачиваем «лепестки» многогранника V_i, сохраняя выпуклость. При этом область $\tilde{P}_i$, дополняющая многогранник V_i до выпуклой оболочки, непрерывно деформируется в некоторую область $\tilde{P}'_i$, а

многогранник V_i перейдет в область некоторого многогранного угла V_i'. Теперь угол V_1' непрерывно переводим в угол V_2'. Соответственно область $\tilde{P}_1'$ непрерывно переводится в $\tilde{P}_2'$. В итоге получается непрерывная деформация $\bar{P}_1$ в $\bar{P}_2$ с сохранением условий подклеивания к P_1 в каждый момент деформации. Переход к общим выпуклым поверхностям основан на тех же соображениях, что и в рассмотренном случае.

3. В § 4 гл. IV получены формулы, с помощью которых каждой паре изометричных поверхностей эллиптического пространства сопоставляется пара изометричных поверхностей евклидова пространства. И обратно, каждой паре изометричных поверхностей евклидова пространства сопоставляется пара изометричных поверхностей эллиптического пространства. Эти формулы содержат векторный параметр e_0. Пусть F_1 и F_2 — две изометричные поверхности евклидова пространства. Найдем соответствующие им изометричные поверхности Φ_1 и Φ_2 эллиптического пространства с параметром $e_0 = e_0'$. Для поверхностей Φ_1 и Φ_2 найдем пару изометричных поверхностей F_1' и F_2' евклидова пространства, пользуясь формулами с параметром $e_0 = e_0''$. Найти формулы, сопоставляющие изометричным поверхностям F_1 и F_2 изометричные поверхности F_1' и F_2'. Выяснить, при каких условиях выпуклость F_1 и F_2 влечет за собой выпуклость F_1' и F_2'. Варьируя параметры e_0' и e_0'', а также взаимное расположение поверхностей F_1 и F_2, выяснить возможность преобразования пары бесконечных изометричных выпуклых поверхностей в пару конечных изометричных выпуклых поверхностей. В частности, выяснить возможность сведения указанным преобразованием вопроса об однозначной определенности бесконечных выпуклых поверхностей к вопросу об однозначной определенности замкнутых выпуклых поверхностей или к вопросу об однозначной определенности выпуклых поверхностей с фиксированным краем.

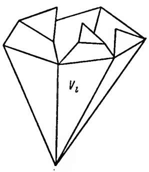

Рис. 35.

4. Подобно тому как в § 4 гл. IV для эллиптического пространства, можно написать формулы, сопоставляющие каждой паре изометричных поверхностей пространства Лобачевского пару изометричных поверхностей евклидова пространства. Изучить это преобразование. В частности, выяснить условия, при которых выпуклость поверхностей в пространстве Лобачевского влечет за собой выпуклость соответствующих поверхностей в

евклндовом пространстве. Выяснить возможностн сведення вопроса об одиозиачиой определенности выпуклых поверхиостей в пространстве Лобачевского к вопросу об одиозиачиой определенности евклидова простраиства. Кое-что в этом отиошенин сделано Г. Н. Гаюбовым [30], одиако недостаточно.

5. Неполиая выпуклая метрнка, задаиная в области G, вообще говоря, не реализуется выпуклой поверхиостью по той простой причиие, что полиая (иитегральная) кривизиа миогообразия G с этой метрикой может быть больше 4π, в то время как кривизиа выпуклой поверхиости всегда $\leqslant 4\pi$. Одиако есть основания утверждать, что при весьма общих предположеииях эта метрика реализуется локально выпуклой поверхиостью, т. е. такой поверхиостью, каждая точка которой нмеет окрестность, являющуюся выпуклой поверхиостью.

Вот иекоторые соображеиия по этому поводу. Пусть G — двусвязная область (гомеоморфная круговому кольцу). Пусть контуры γ_1 и γ_2, ограничивающне область, являются геодезическими ломаными в заданной метрике. Разобьем каждое звено δ_1 ломаной γ_1 средией точкой P_1 пополам и отождествим равноотстоящие от P_1 точки звена δ_1. Аиалогичное отождествление проделаем для звеиьев δ_2 ломаиой γ_2. При этом получится замкиутое многообразие R, у которого кривизна всюду иеотрицательиа, кроме двух точек A_1 и A_2, в которых при указанном отождествлеиии совмещаются вершиины ломаных γ_1 и γ_2.

Многообразие R изометрически погружается в локально евклидово простраиство, рассмотреииое в § 11, гл. VI, с расположеиием точек A_1 и A_2 иа оси z. Последующее отображеиие локальио евклидова простраиства в евклидово путем сопоставлеиия геометрически совпадающих точек этих простраиств и дает иужную реализацию R в виде локально выпуклой поверхиости.

6. Выпуклая метрика M, заданиая в гомеоморфиой кругу областн G, с краем γ, имеющим неотрицательиый поворот в метрике M, реализуется иекоторой выпуклой шапкой F. Рассмотреть вопрос о возможности реализации выпуклой метрики M, задаииой в гомеоморфиой кругу областн G, выпуклой поверхиостью с краем γ, лежащим на задаиной поверхностн Φ.

К решению этого вопроса можио подойти следующим образом. Пусть для простоты Φ — бескоиечиая поверхиость, одноэиачио проектирующаяся на всю плоскость xy. Обозначнм через E^+ ту часть пространства, которая располагается иад поверхностью Φ. Построим римаиово простраиство R из двух зеркально-симметричиых частей евклидова пространства E^+ н иекоторого регулярного слоя δ между иими таким образом, чтобы прн иеограничеином убываиии толщины слоя δ это простраиство R переходило в метрическое пространство R_0, составлениое из двух указаниых экземпляров E^+, склеенных по граичным

поверхностям Ф. Построенное пространство R должно быть симметрично относительно некоторой вполне геодезической поверхности σ, проходящей внутри слоя δ, причем области E^+ пространства R должны соответствовать по симметрии относительно σ.

Образуем далее замкнутое, гомеоморфное сфере многообразие M' из двух противоположно ориентированных экземпляров многообразия M и регулярного пояска h, разделяющего их так, чтобы M' обладало внутренней симметрией относительно замкнутой геодезической γ, проходящей внутри пояска h, причем указанные два экземпляра M, входящие в M', должны соответствовать по симметрии.

Теперь реализуем многообразие M' в пространстве R в виде замкнутой поверхности F' (предполагается, что это можно сделать). Ввиду симметрии многообразия M' и пространства R эту реализацию можно осуществить так, что геодезическая γ будет лежать в поверхности σ и поверхность F' симметрична относительно поверхности σ. Переходя к пределу при стремлении толщины слоя δ и пояска h к нулю, получаем замкнутую поверхность F_0 в пространстве R_0. Часть этой поверхности, расположенная в E^+, и дает нужную реализацию многообразия M в виде выпуклой поверхности с краем на поверхности Ф.

7. Завершить доказательство жесткости многосвязных локально выпуклых поверхностей в римановом пространстве, намеченное в § 12 гл. VI.

8. Пусть F_1 и F_2 — две изометричные одинаково ориентированные выпуклые поверхности. Пусть для единичных векторов соответствующих по изометрии направлений выполняется условие $\tau_1+\tau_2\neq 0$. При этом вектор-функция

$$r=\frac{1}{2}(r_1+r_2),$$

где r_1 и r_2 — векторы соответствующих по изометрии точек поверхностей F_1 и F_2, задает выпуклую поверхность F. При некоторых дополнительных предположениях это доказано в гл. I и II.

Векторное поле $z=r_1-r_2$ является изгибающим полем поверхности F. Благодаря такой связи между парой изометричных поверхностей и бесконечно малыми изгибаниями срединной поверхности (F) многие вопросы об однозначной определенности выпуклых поверхностей могут быть сведены к вопросу о жесткости срединой поверхности.

В этой связи, естественно, возникает следующий вопрос. Всегда ли можно поверхности F_1 и F_2 расположить так, чтобы для любых соответствующих по изометрии направлений было $\tau_1+\tau_2\neq 0$. По-видимому, это имеет место почти для всех (по мере) взаимных расположений. Доказать это.

9. Рассмотреть вопрос о существовании замкнутой выпуклой поверхности, удовлетворяющей уравнению

$$f(R_1, R_2, n) = \varphi(n),$$

где R_1, R_2 — главные радиусы кривизны, а n — единичный вектор нормали поверхности.

Для решения этой задачи воспользоваться соображениями, изложенными в § 5 гл. VII.

10. Рассмотреть вопрос о существовании выпуклой поверхности F, у которой сферическое изображение совпадает с заданной выпуклой областью ω на единичной сфере, опорная функция $H(n)$ на границе сферического изображения обращается в заданную непрерывную функцию $\psi(n)$, а главные радиусы кривизны в каждой внутренней точке поверхности удовлетворяют уравнению

$$f(R_1, R_2) = \varphi(n),$$

где $f(R_1, R_2) \equiv g(R_1R_2, R_1+R_2)$ — строго монотонная по переменным R_1 и R_2 функция, т. е. удовлетворяет условиям $\partial f/\partial R_1 > 0$, $\partial f/\partial R_2 > 0$.

Пусть область ω расположена на верхней полусфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z > 0$. Положим $h(x, y) = H(x, y, 1)$, где H — опорная функция искомой поверхности. Функция h удовлетворяет уравнению эллиптического типа

$$\Phi(h_{11}, h_{12}, h_{22}, x, y) = 0$$

(см. § 4 гл. VII). Решение вопроса о существовании поверхности F сводится к вопросу разрешимости уравнения $\Phi = 0$. Решение этого уравнения можно обосновать с помощью теоремы С. Н. Бернштейна, получив априорные оценки для предполагаемого решения и его производных до второго порядка. При этом нужно сначала рассматривать случай аналитических функций f, φ и область ω, ограниченную аналитическим контуром.

По поводу соображений, касающихся получения априорных оценок, см. §§ 3, 5 гл. VII. В этой связи заметим, что если h_1 и h_2 — решения уравнений $f = \varphi_1$ и $f = \varphi_2$, то $h_1 - h_2$ при $\varphi \leqslant \varphi_2$ не может достигать строгого максимума внутри ω. Чтобы перейти от аналитических данных задачи к регулярным, достаточно установить априорные оценки для вторых производных во внутренних точках. По этому поводу см. § 3 гл. VII.

11. В эллиптическом пространстве, как известно, имеет место метрическая двойственность. Пусть Φ — выпуклая поверхность эллиптического пространства и Φ' — выпуклая поверхность, полярная к Φ (поверхность Φ' огибается полярами точек поверхности Φ). Между поверхностями Φ и Φ' естественным образом устанавливается точечное соответствие. Именно,

произвольной точке P поверхности Φ сопоставляется точка касания поверхности Φ' с полярной точки P. Если кривизна пространства $K=1$, то внешняя кривизна для произвольного множества M на поверхности Φ равна площади соответствующего множества M' на поверхности F'.

Удалим точки некоторой плоскости эллиптического пространства и оставшуюся часть будем интерпретировать на трехмерной полусфере

$$x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2=1, \qquad x_0>0.$$

Пусть Φ — замкнутая выпуклая поверхность, расположенная в сферическом поясе $0<x_0<\varepsilon$. Полярная поверхность Φ' располагается в ε-окрестности полюса $P(0, 0, 0, 1)$.

Линейный элемент поверхности Φ представим в виде

$$ds^2=ds_0^2+\lambda\, d\sigma^2,$$

где ds_0^2 — линейный элемент сферы единичного радиуса, а $\lambda\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Внешняя кривизна поверхности Φ равна

$$K_e=\lambda\varphi_\sigma+O(\lambda^2),$$

где φ_σ зависит от квадратичной формы σ.

Спроектируем окрестность полюса P полусферы на касательную гиперплоскость E полусферы в точке P. Пусть $\bar{\Phi}'$ будет проекцией поверхности Φ' в евклидово пространство E. Преобразуем поверхность $\bar{\Phi}'$ подобно с коэффициентом подобия $1/\lambda$ и перейдем к пределу при $\varepsilon\to 0$. Предельная поверхность будет иметь кривизну $1/\varphi_\sigma$.

Принимая во внимание описанную конструкцию, дать новое решение проблемы Минковского, основанное на теореме о реализации заданной метрики ds^2 на выпуклой поверхности в эллиптическом пространстве.

12. В § 7 гл. VIII рассматривается вопрос о существовании замкнутой выпуклой поверхности с данной условной кривизной. Аналитическое истолкование полученного результата приводит к теореме о разрешимости некоторого уравнения весьма общего вида, заданного на сфере.

Рассмотреть одномерный аналог этой задачи, отбросив условие положительности кривизны. При этом получится некоторая теорема о существовании замкнутой кривой с заданной условной кривизной. Аналитически полученный результат можно трактовать как теорему о существовании периодического решения уравнения вида

$$y''=\varphi(x,\ y,\ y')$$

с периодической функцией φ по переменному x. Выяснить, для каких классов уравнений, т. е. каких функций φ геометрическая теорема гарантирует существование периодических решений. Обобщить полученный результат на случай систем уравнений

$$y_i'' = \varphi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Одномерный аналог проблемы Минковского состоит в доказательстве существования замкнутой кривой с заданным радиусом кривизны $R(\vartheta)$ как функции угла поворота касательной ϑ. Задача разрешима, если

$$\oint_0^{2\pi} e^{i\vartheta} R(\vartheta)\, d\vartheta = 0.$$

Это условие всегда выполнено, если $R(\vartheta+\pi) = R(\vartheta)$. Опорная функция $p(\vartheta)$ искомой кривой записывается просто

$$p(\vartheta) = \int_0^{\vartheta} e^{i(\vartheta+\tau)} R(\tau)\, d\tau.$$

С помощью принципа Шаудера, подобно тому как при доказательстве существования решений сильно эллиптических уравнений Монжа — Ампера в § 8 гл. VIII, доказать наиболее общую теорему о существовании замкнутой кривой с заданной условной длиной. Истолковать полученный результат с точки зрения существования периодических решений уравнения $y'' = \varphi(x, y, y')$ с периодической по x функцией φ. Руководствуясь геометрической идеей, рассмотреть задачу аналитически в наиболее общих предположениях об уравнении. Рассмотреть систему уравнений.

Цитированная литература

Адельсон-Вельский Г. М.

1. Обобщение одной геометрической теоремы С. Н. Бернштейна, ДАН СССР 49 № 6 (1945).

Александров А. Д.

2. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, Гостехиздат, 1948.
3. Выпуклые многогранники, Гостехиздат, 1950.
4. Об одном классе замкнутых поверхностей, Матем. сб. 4 (46): 1 (1938).
5. Гладкость выпуклой поверхности с ограниченной гауссовой кривизной, ДАН СССР **36**, № 7 (1942).
6. Существование и единственность выпуклой поверхности с данной интегральной кривизной, ДАН СССР **35**, № 5 (1942).
7. Существование почти везде второго дифференциала выпуклой функции и некоторые связанные с ним свойства выпуклых поверхностей, Ученые записки ЛГУ, № 37 (1939).
8. Задача Дирихле для уравнения $\mathrm{Det}\|z_{ij}\| = \psi(z_1, \ldots, z_n, z, x_1, \ldots, x_n)$, Вестн. ЛГУ, № 1 (1958).
9. Некоторые теоремы о дифференциальных уравнениях в частных производных, Вестн. ЛГУ, № 8 (1954).
10. Кривизна выпуклых поверхностей, ДАН СССР **50**, № 1 (1945).
11. Внутренняя метрика выпуклых поверхностей в пространствах постоянной кривизны, ДАН СССР **45**, № 1 (1944).
12. О бесконечно малых изгибаниях нерегулярных поверхностей, Матем. сб. **1** (43): 3 (1936).
13. О теоремах единственности для замкнутых поверхностей, ДАН СССР **22**, № 3 (1939).
14. О работах С. Э. Кон-Фоссена, УМН **2**, вып. 3 (1947).
15. Теоремы единственности для поверхностей «в целом». 1. Вестн. ЛГУ, № 19 (1956).
16. К теории смешанных объемов выпуклых тел. Распространение двух теорем Минковского о выпуклых многогранниках на произвольные выпуклые тела, Матем. сб. **3** (45): 1 (1938).

Александров А. Д. и Залгаллер В. А.

17. Двумерные многообразия ограниченной кривизны, Труды матем. ин-та АН СССР **43** (1962).

Александров А. Д. и Сенькин Е. П.

18. О неизгибаемости выпуклых поверхностей, Вестн. ЛГУ, № 8 (1955).

Бакельман И. Я.

19. Геометрические методы решения эллиптических уравнений, «Наука», 1965.

Бернштейн С. Н.

20. Усиление теоремы о поверхностях отрицательной кривизны, ИАН, сер. матем., **6** (1942).
21. Исследование и интегрирование уравнений с частными производными эллиптического типа, Сообщения Харьковского матем. общества **11** (1910).

Бляшке В. (Blaschke W.)
22. Дифференциальная геометрия, т. 1, М.—Л., ОНТИ, 1935.
Боннезен Т. и Фенхель В. (Bonnesen T. and Fenchel W.)
23. Theorie der Konvexen Körper, Chelsea publishing company, New York, 1948.
Борисов Ю. Ф.,
24. Параллельный перенос на гладкой поверхности, Вестн. ЛГУ, № 7 (1958), № 19 (1958), № 1 (1959).
Буземан Г. и Феллер В. (Busemann H. und Feller W.)
25. Krümmungseigenschaften Konvexer Flächen, Acta Math. **66** (1935).
Вейль Г.
26. Об определении замкнутой выпуклой поверхности ее линейным элементом, УМН **3**, вып. 2 (1948).
Векуа И. Н.
27. Системы дифференциальных уравнений эллиптического типа, Матем. сб. **31**(73): 2 (1952).
28. Обобщенные аналитические функции, Физматгиз, 1959.
Волков Ю. А.
29. Устойчивость решения проблемы Минковского, Вестн. ЛГУ, № 1 (1963).
Гаюбов Г. Н.
30. Некоторые вопросы теории поверхностей в гиперболическом пространстве, Научн. тр. Ташкентского ун-та, вып. 245 (1964).
Данелич И. А.
31. Однозначная определенность некоторых выпуклых поверхностей в пространстве Лобачевского, ДАН СССР **115**, № 2 (1957).
Дубровин А. А.
32. О регулярности выпуклой поверхности с регулярной метрикой в пространствах постоянной кривизны, Украинский геометр. сб., вып. 1 (1965).
Ефимов Н. В.
33. Качественные вопросы теории деформации поверхностей, УМН **3**, вып. 2(24) (1948).
34. Качественные вопросы теории деформации поверхностей «в малом», Труды матем. ин-та АН СССР **30** (1949).
35. О жесткости в малом, ДАН СССР **60**, № 5 (1948).
Залгаллер В. А.
36. О кривых ограниченной вариации поворота на выпуклой поверхности, Матем. сб. **26**(68): 2 (1950).
Зауер Р. (Sauer R.)
37. Infinitesimale Verbiegungen zueinander projektiver Flächen, Math. Ann., **3** (1935).
Картан Э. (Cartan E.)
38. Геометрия римановых пространств, ОНТИ, 1936.
Кейпер Н. (Kuiper N.)
39. On C^1-isometric imbeddings I, Proc. Koninkl Nedrl. Acad. Wetench. A, **58** (1955). Русский перевод: «О C^1-изометричных вложениях», Математика, 1 : 2 (1957).
Кон-Фоссен С. Э.
40. Изгибание поверхностей «в целом», УМН **1** (1936).
41. Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом, Физматгиз, 1959.
Кронрод А. С.
42. О функциях двух переменных, УМН **5**, вып. 1 (1950).
Леви Г. (Lewy H.)
43. A priori limitations for solutions of Monge—Ampere equations, Trans. Amer. Math. Soc. **37** (1935). Русск. перевод: «Априорные ограниче-

ния для решений уравнения Монжа — Ампера», УМН 3, вып. 2(24) (1948).

Лейбин А. С.

44. Об изгибаемости выпуклых поверхностей с краем, УМН 5, вып. 5 (1950).

Либерман И. М.

45. Геодезические линии на выпуклых поверхностях, ДАН СССР 32, № 5 (1941).

Медяник А. И.

46. О центральной симметрии замкнутой строго выпуклой поверхности, Украинский геометр. сб., вып. 2 (1966).

Минагава Т. (Minagawa T.)

47. Remarks on the infinitesimal rigiditi of closed convex surfaces, Rodai Mathematical semiary Reports 8, № 1 (1956).

Минковский Г. (Minkowski H.)

48. Volumen und Oberfläche, Math. Ann. 57 (1903).

Миранда К. (Miranda K.)

49. Уравнения с частными производными эллиптического типа, ИЛ, 1957.

50. Su un problema di Minkowski, Rend. Semin. mat. Roma, IV (1939).

Ниренберг (Nirenberg L.)

51. On nonlinear elliptic partial differential equations and Hölder continuity, Commun. on pure and appl. Math. 6 (1953). Русский перевод: «О нелинейных эллиптических дифференциальных уравнениях в частных производных и непрерывности по Гёльдеру», Математика, 3:3 (1959).

52. The Weyl and Minkovski Problems in differential geometry in the Large, Commun. on pure and appl. Math. 6 (1953).

Нэш Дж. (Nash J.)

53. C^1-isometric imbeddings, Ann. of Math. 60, № 3 (1954). Русский перевод: «C^1 изометричные вложения», Математика, 1:2 (1957).

Оловянишников С. П.

54. Обобщение теоремы Коши о выпуклых многогранниках, Матем. сб. 18 (60): 3 (1946).

55. Об изгибании бесконечных выпуклых поверхностей, Матем. сб. 18(60): 3 (1946).

Погорелов А. В.

56. Квазигеодезические линии на выпуклой поверхности, Матем. сб. 25(67): 2 (1949).

57. Изгибание выпуклых поверхностей, Гостехиздат, 1951.

58. Некоторые результаты по геометрии в целом, Изд-во Харьковского ун-та, 1961.

59. Однозначная определенность выпуклых поверхностей, Труды Матем. ин-та АН СССР 29 (1949).

60. Однозначная определенность общих выпуклых поверхностей, Изд. АН УССР, 1951.

61. Бесконечно малые изгибания общих выпуклых поверхностей, Изд-во Харьковского ун-та, 1959.

62. О регулярности выпуклых поверхностей с регулярной метрикой в пространстве постоянной кривизны, ДАН СССР 122, № 2 (1958).

63. Некоторые вопросы геометрии в целом в римановом пространстве, изд-во Харьковского ун-та, 1957.

64. Распространение общей теоремы единственности А. Д. Александрова на случай неаналитических поверхностей, ДАН СССР 62, № 3 (1948).

65. Регулярность выпуклой поверхности с данной гауссовой кривизной, Матем. сб. 31(73): 1 (1952).

66. Об уравнениях Монжа — Ампера эллиптического типа, Изд-во Харьковского ун-та, 1960.
67. Поверхности ограниченной внешней кривизны, Изд-во Харьковского ун-та, 1956.
68. Некоторые вопросы теории поверхностей в эллиптическом пространстве, Изд-во Харьковского ун-та, 1960.

Решетняк Ю. Г.
69. Изотермические координаты в многообразиях ограниченной кривизны, Сиб. матем. ж., т. 1, № 1, 2 (1960).

Хейнц Е. (Heinz E.)
70. Neue a-priori — Abschätzungen für den Ortsvektor einer Fläche positiver Gausscher Krümmung durch ihr Linienelement, Math. Zeatschr. **74** (1960).
71. Über die Differentialungleichung $0<\alpha\leqslant rt-s^2\leqslant\beta<\infty$, Math. Zeitschr. **72** (1959).

Шаудер Ю. (Schauder J.)
72. Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Math. Zeitschr. **38** (1934).

Именной и предметный указатель

Погорелов Алексей Васильевич

ВНЕШНЯЯ ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

М., 1969 г., 760 стр. с илл.

Редакторы *И. Х. Сабитов* и *И. М. Овчинникова*

Техн. редактор *А. А. Благовещенская*

Корректор *Е. Я. Гороховская*

Сдано в набор I/VII 1968 г. Подписано к печати 22/I 1969 г. Бумага $60\times90^1/_{16}$. Физ. печ. л. 47,5. Условн. печ. л. 47,5. Уч.-изд. л. 44,42. Тираж 6000 экз. Т-02618. Цена книги 3 р. 05 к. Заказ № 1332.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Измайловский проспект, 29.

А.В.ПОГОРЕЛОВ · ВНЕШНЯЯ ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ